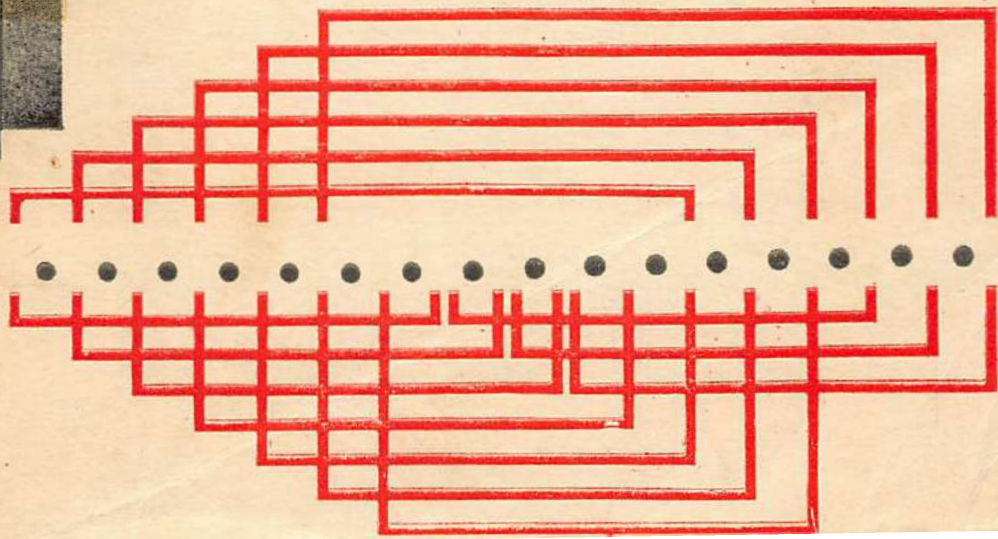
I. CUCULESCU

OLIMPIADELE INTERNAȚIONALE DE MATEMATICĂ ALE ELEVILOR



I. CUCULESCU

OLIMPIADELE INTERNAȚIONALE DE MATEMATICĂ ALE ELEVILOR



EDITURA TEHNICĂ
BUCUREȘTI — 1984

PREFAȚĂ

În această lucrare urmărim să descriem Olimpiada Internațională de Matematică în ceea ce privește modul de propunere a problemelor, soluțiile ce li s-au dat, modul de atribuire a punctajelor și a premiilor. De asemenea, ne vom referi la măsurile de organizare a Olimpiadelor care urmăresc să creeze cele mai bune condiții de desfășurare a acestor activități.

Documentele unei Olimpiade conțin, în legătură cu aceste aspecte, lista de probleme propuse juriului, cu soluții, de regulă ale autorilor, țările ce participă și regulamentul de desfășurare. De la o anumită Olimpiadă încoace, acestea conțin și punctajele totale realizate de fiecare concurent, punctajele totale realizate de fiecare delegație la fiecare problemă, lista premianților. Dacă ne-am fi rezumat la aceste informații, lucrarea n-ar fi dat o imagine completă, vie, utilizabilă de cei interesați în pregătirea pentru participare, a Olimpiadei Internaționale de Matematică.

De aceea am făcut apel la toate notele luate, la toate aspectele reținute de autor, în urma participării la nouă astfel de Olimpiade, în calitate de șef al delegației țării noastre; la una din acestea, organizată în România, în calitate de președinte al juriului. Astfel se explică faptul că ne-am limitat la Olimpiadele din anii 1973—1982 și că descrierea lor este făcută așa cum sînt acestea văzute de pe pozițiile menționate.

Aproximativ 3/4 din lucrare reprezintă probleme și soluții. Problemele sînt exact cele propuse juriului, iar la Olimpiada organizată în România cele primite de comitetul de organizare (vezi cap. 2). Cele cîteva în plus apar numai pentru a preciza unele aspecte prezentate.

Listele de probleme sînt separate de soluțiile lor. Aceasta deoarece, pentru a beneficia de pe urma studiului unei astfel de cărți, este necesar ca un cititor să încerce întîi el să rezolve fiecare din probleme, încercare care, chiar nereușită, îl face să se edifice asupra a ceea ce cere problema respectivă, în ce constă dificultatea ei. Soluțiile sînt redactate presupunînd că acest episod a fost trăit de cititor. Aceste probleme nu trebuie irosite, prin lectura imediată a soluțiilor, deoarece reprezintă o mostră greu repetabilă de probleme ce pot fi rezolvate, trei în patru ore, de un elev foarte bun. Deci acestea nu se „lucrează în serie“, cu zecile într-o zi. Atitudinea corectă nu este de a „scăpa cît mai repede de fiecare problemă“, ci de a o analiza sub toate aspectele, de a descoperi alte soluții,

alte fapte în legătură cu situația respectivă, de a explica eventualul insucces în rezolvare, de a deduce ce trebuie să facă un elev pentru a ajunge să poată rezolva trei astfel de probleme în patru ore. Sperăm că tonul adoptat în această lucrare să îndemne la o astfel de atitudine.

Olimpiada Internațională de Matematică este foarte generoasă cu concurenții prin numărul de premii ce le atribuie. În schimb, este severă cu problemele primite. Din zeci de probleme propuse comitetului de organizare numai șase se propun concurenților și ajung să facă „ocolul lumii". Restul rămîn în documentele Olimpiadei și pierd această șansă practic pentru totdeauna. Lucrarea ar putea fi dedicată tuturor celor ce au propus asemenea probleme și nu și le-au văzut alese, acestea rămînînd printre cele propuse juriului sau propuse comitetului de organizare. Numele autorilor problemelor nu se fac cunoscute la Olimpiadă.

Soluțiile ce le prezentăm nu sînt totdeauna cele ale propunătorilor ci, de regulă, cele găsite de autorul cărții în cursul lucrărilor juriului. Acestea sînt însoțite și de soluții date de concurenți, în primul rînd de cele distinse cu premii speciale, celelalte în măsura în care am luat cunoștință de ele, deci de regulă ale unor concurenți români.

În rest prezentăm : orașele unde s-au desfășurat lucrările fiecărei Olimpiade, țările ce au participat, măsuri de organizare a concursului, aspecte din regulament, aspecte din activitatea juriului, procedura de alegere a celor șase probleme propuse concurenților, argumente exprimate în favoarea sau defavoarea unor probleme, reguli de notare a lucrărilor și dificultăți în legătură cu acestea, principiile și modul efectiv de stabilire a premiilor etc., toate acestea, de regulă, prin exemple concrete. Nu prezentăm clasamente pe națiuni, liste nominale de participanți, de premianți etc.

Adeseori sîntem întrebați: „Ce trebuie să facă un elev pentru a ajunge să participe cu succes la Olimpiada Internațională de Matematică?". Răspunsul este simplu: să ia o listă de probleme de concurs corespunzătoare unei zile, să se închidă într-o cameră și să încerce să le rezolve și să le redacteze impecabil, iar a doua zi să ia, la fel, lista corespunzătoare, de la aceeași Olimpiadă, celeilalte zile. Dacă le rezolvă perfect pe toate, nu rămîne decît să-i urăm același succes la Olimpiada ce urmează, în calitate de participant. Dacă le rezolvă „de premiul 2" sau chiar „de 3", încă putem face același lucru. Dacă nu, să-și analizeze insuccesul, să vadă dacă el se datorează lipsei unor cunoștințe, lipsei antrenamentului pe un anumit tip de probleme, unei desconsiderări sau exagerări a dificultății problemelor respective, lipsei unei afinități pentru activitatea de rezolvare de probleme etc. și să acționeze în consecință dacă simte că are șanse de reușită.

AUTORUL

1

CE ESTE O OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ?

La o Olimpiadă de Matematică participanții rezolvă probleme. Astfel încît pentru a înțelege exact ce este o Olimpiadă de Matematică va trebui să începem cu:

1.1. Ce este o problemă de matematică?

„Un dreptunghi are lungimea de 6 m și înălțimea de 4 m. Care este aria sa?"

„Într-un camion s-au încercăt 50 de lăzi cu roșii a 10 kg lada și 25 de lăzi cu cartofi de cîte 15 kg. Cîte kilograme s-au încărcat?"

Acestea nu sînt probleme! Acestea sînt întrebări de fixare a cunoștințelor, deoarece oricine a învățat formula ariei dreptunghiului, respectiv semnificațiile operațiilor de adunare și înmulțire și regulile elementare de efectuare ale lor, poate răspunde la ele.

Una din primele adevărate probleme de aritmetică ce le întîlnesc copiii în școlile primare este de tipul următor.

Ion și Gheorghe au împreună 125 lei. Ion are cu 9 lei mai mult decît Gheorghe. Cîți bani are Ion și cîți Gheorghe?

Aceasta este o problemă, deoarece cineva poate să știe la perfecție semnificațiile celor patru operații și modul lor de efectuare, dar să nu miște un pas către răspunsul la această întrebare.

Un învățător ar putea răspunde: „Eu i-am învățat pe elevii mei și ei știu să rezolve o astfel de problemă. Scădem 9 din 125 (eventual cu completarea: pentru a pune deoparte surplusul lui Ion) și obținem 116. Împărțim 116 la 2 și obținem 58. Deci Gheorghe are 58 lei și Ion are $58 + 9 = 67$. Se și verifică: $58 + 67 = 125$."

Prin aceasta însă întrebarea pusă a încetat de a mai fi o problemă! Ea a devenit o întrebare pentru verificarea însușirii unui

algoritm! Repetînd-o de mai multe ori cu alte date numerice, riscăm chiar ca elevii să sfîrşească prin a uita raţionamentul, concentrîndu-se asupra rapidităţii de efectuare a calculelor, de aplicare a algoritmului.

De aceea apreciem şi o rezolvare stîngace de felul următor. Să încercăm a-i da lui Ion 100 lei, lui Gheorghe rămînîndu-i $125-100=25$ lei. Diferenţa este prea mare : $100-25=75$. Să luăm un leu de la Ion şi să-l dăm lui Gheorghe. Ion va avea 99, Gheorghe 26 şi diferenţa este acum 73. Deci luînd un leu de la Ion şi dîndu-l lui Gheorghe, diferenţa scade cu 2. Pentru ca diferenţa să scadă cu $75-9=66$ va trebui să luăm $66:2=33$ lei de la Ion şi să-i dăm lui Gheorghe. Deci Ion are $100-33=67$ lei şi Gheorghe $25+33=58$ lei!

Chiar simpatia noastră este atrasă de autorul acestei soluţii. Evident că nu pledăm prin aceasta în favoarea unei soluţii mai ocolite faţă de una directă. Dar pledăm pentru dominarea situaţiei, pentru crearea de şanse de a descoperi şi soluţia : să-i dăm 9 lei lui Gheorghe ; Ion şi Gheorghe vor avea astfel în total $125+9=134$ lei şi vor avea fiecare aceeaşi sumă, anume $134:2=67$, Gheorghe a avut $67-9=58$ etc. Sau, poate, de a găsi şi altă soluţie.

Este foarte greu să definim ce este o problemă de matematică, dar sperăm că prin cele expuse am dat o idee asupra a ceea ce se înţelege prin aceasta, în special în cazul organizării unei Olimpiade de Matematică.

O problemă de olimpiadă trebuie deci să determine următoarele situaţii : a) „nu ştiu !“, b) „să mă gîndesc“, c) „am găsit ideea“, d) „să redactez corect şi complet“. Evident că d) poate determina şi c') „m-am înşelat !“, c'') „să perfecţionez“, sau chiar b') „să caut altă cale.“

În orice caz, dacă în loc de b) apare b'') „să-mi aduc aminte“, am ieşit din spiritul Olimpiadei de Matematică. Dacă a) nu apare sau dacă este urmat sistematic de b''), riscăm dispreţul concurenţilor. Evident că în cazul neapariţiei lui c), Olimpiada este ratată ca acţiune.

Olimpiada de Matematică este un teren de acţiune în primul rînd pentru inteligenţă.

1.2. Olimpiada de Matematică

Odată precizate ideile în legătură cu elementul de bază al unei Olimpiade de Matematică, anume rezolvarea unei probleme, vom lua în considerare şi celelalte componente ale unei astfel de mani-

festări. Ne vom referi în special la o olimpiadă de tipul Olimpiadei Naționale de Matematică, așa cum este organizată în țara noastră și în alte țări.

Elementele de fond ce apar în plus față de „un concurent rezolvă o problemă de matematică sau mai multe“ sînt: a) propunerea problemelor, b) corectarea lucrărilor și acordarea punctajelor, c) modul de calificare în etapele superioare.

Nu sînt lipsite de interes nici aspectele legate de condițiile în care se desfășoară activitățile menționate și în primul rînd, măsura în care aceste condiții favorizează sau nu pe unii concurenți; această situație poate apărea și fără ca organizatorii să-și dea seama.

1.3. Propunerea de probleme pentru Olimpiada de Matematică

A propune probleme cunoscute este în contradicție totală cu spiritul Olimpiadei de Matematică, după cum am încercat să explicăm la 1.1, iar problemele cu totul noi apar, de regulă, drept prea dificile. Aceasta este principala dilemă în care se află comisiile ce stabilesc subiectele pentru olimpiade.

O problemă de olimpiadă trebuie să satisfacă în plus cerința ca ideea de rezolvare să poată apărea și detaliile de redactare să poată fi precizate în cele 3—4 ore cîte sînt puse la dispoziția concurenților, timp în care trebuie rezolvate, de regulă, mai multe probleme. Probleme excelente pentru Gazeta Matematică, la care timpul de rezolvare este de ordinul lunilor, pot fi inacceptabile la Olimpiadă!

Fiecare din cele patru probleme ale unui set poate fi minunată pentru Olimpiadă, dar setul poate apărea drept total neindicat!

Un tip de problemă care nu are ce căuta la o olimpiadă este cel în care soluția începe cu: să înlocuim în relația stabilită în problema X, din Gazeta Matematică sau din altă parte, variabila a cu expresia... Aceasta apare și mai ridicol, dacă Gazeta Matematică este, de exemplu, din 1970, iar Olimpiada are loc în 1980!

Elementul constructiv de bază al propunerii de probleme reușite, adecvate unei olimpiade, este o activitate problemistică, susținută, în tot timpul anului, printre profesorii de matematică din școli și printre cei ce se ocupă de organizarea olimpiadelor.

Ce se înțelege printr-o problemă „cunoscută“?. Și la această întrebare este greu de dat un răspuns cu „valoare juridică“. O pro-

blemă ce nu apare nicăieri poate fi etichetată de justețe drept cunoscută, în timp ce o problemă care este doar o variantă a unei probleme apărute demult și uitate poate să apară ca „proaspătă". Mai degrabă am considera noțiunea de „cunoscută unor cercuri largi de concurenți" decît cea de „apărută undeva, cîndva, într-o variantă", pentru a descrie o categorie de probleme ce se cer evitate.

Ideea păstrării secretului în legătură cu problemele ce se vor propune la Olimpiadă nu poate lipsi; ea însă poate conduce la exagerări, la „idealul" ca toate problemele să fie propuse de aceeași persoană, cit mai depărtată de concurenți. Prezența universitarilor în comitetul de organizare este un element care permite realizarea deziderarului ca decizia în legătură cu setul de probleme să nu fie luată și nici cunoscută de persoane ce au elevi printre concurenți. Nu trebuie însă uitat că munca de zi cu zi a universitarilor nu constă, ca în cazul profesorilor din școli, în a propune sistematic probleme de matematică elementară.

1.4. Modul de corectare și modul de stabilire a punctajelor

Olimpiada este un concurs și nu un examen. Deci ordinea de clasificare a concurenților contează în primul rînd și nu depășirea unei bariere (a notei 5, de exemplu). Aceasta deosebește Olimpiada de o teză etc. Olimpiada este un concurs cu puțini cîștigători; aceasta deosebește olimpiada de un examen de admitere.

Deosebirile acestea sînt însă de mai mică importanță în comparație cu una esențială: tezele și concursurile de admitere sînt bazate pe probleme mai mult sau mai puțin standard și un elev bun, la vederea unei astfel de probleme, de regulă, spune „știu!", ceea ce nu este cazul la olimpiadă. Aceasta face ca principalul pericol cînd este vorba de a nota lucrări de olimpiadă să fie următorul. Concurentul X găsește cheia problemei, dar face greșelile G_1, G_2, G_3, ..., pentru care i se scade nota cu a_1, a_2, a_3, ... puncte, iar concurentul Y nu găsește cheia problemei dar face observațiile judicioase O_1, O_2, O_3, ..., pentru care primește b_1, b_2, b_3, ... puncte. În final, X obține nota $10 - a_1 - a_2 - a_3 - \ldots$ care se poate dovedi mai mică decît $1 + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$, nota lui Y. Aberant, dar totuși mai frecvent decît se pare. Paradoxal, dar uneori mai frecvent cînd este vorba de persoane mai competente în matematică!

O astfel de situație apare cînd se uită că este vorba de concurenți tineri, de regulă neconsacrați, care pot fi uneori ei înșiși surprinși

de faptul că o idee a lor sparge dificultatea problemei, cînd se uită că timpul este totuşi scurt.

Cea mai eficientă cale de a evita astfel de riscuri este ca persoanele ce corectează să fi rezolvat ele însele în prealabil problemele. Atunci se vede cum „imediat“ nu înseamnă „evident“ etc. O altă cale este de a apela pentru corectare în mare măsură la matematicieni care în tinereţea lor, au participat la olimpiade şi ştiu ce înseamnă să redactezi o astfel de lucrare.

O altă situaţie în care decizia este dificil de luat se iveşte cînd nu există o teză perfectă: concurentul A a greşit la problema 1, concurentul B — la problema 2 etc. Ce pondere dăm problemelor? Atribuim pentru o problemă rezolvată parţial, „pe jumătate“, nota 5, 6 sau 7, dacă nota maximă la acea problemă este 10? În principiu, poate fi o simplă convenţie, dar dacă aceste convenţii diferă de la o problemă la alta, atunci unul din concurenţi va depăşi pe ceilalţi ca urmare numai a convenţiei şi poate nu a valorii lucrării sale.

O problemă organizatorică apare în legătură cu timpul afectat corectării. Dacă timpul este, din motive obiective, de exemplu la etapa pe ţară sau la etapele judeţene unde concurenţii sînt deplasaţi în majoritatea lor în altă localitate decît cea de domiciliu, scurt, aceasta conduce uneori la decizia de a preselecta tezele mai bune, care apoi urmează să fie aranjate precis în ordine valorică, preselecţie care prin însăşi natura ei este aproximativă.

În fine, pot fi teze, ale unor concurenţi talentaţi, a căror corectare poate însemna un efort de multe ori mai mare decît cel pentru corectarea unei teze „normale“. Şi aceasta în condiţii de oboseală, pe neaşteptate, test dur al competenţei profesionale a corectorului, deoarece de cele mai multe ori astfel de lucrări conţin idei originale, deosebite, de soluţionare a problemelor. Diviziunea muncii între şeful de echipă de corectori şi membri oferă o supapă de siguranţă pentru astfel de situaţii ce riscă uneori să amîne comunicarea rezultatelor concursului pînă la ore foarte tîrzii.

1.5. Calificarea la etapele superioare ale Olimpiadei

În legătură cu această problemă apar în primul rînd aspecte organizatorice: cîţi concurenţi pot fi aduşi la etapa pe ţară sau la etapele judeţene. Răspunsul depinde şi de numărul de corectori. Pentru a limita inegalităţile, se dau aceleaşi probleme în toate judeţele

la etapa județeană, deși multiplicarea, transmisia și asigurarea secretului reprezintă un efort. Nici așa nu se pot elimina diferențele între opțiunile diferitelor comisii în fața acelorași probleme de corectare. Deciziile în ceea ce privește regula de calificare oscilează între un barem unic ca notă pentru toate județele, caz în care pot fi județe fără nici un concurent la etapa pe țară, și un număr de locuri afectate fiecărui județ, același sau proporțional cu diferite caracteristici numerice independente de notele obținute de concurenți.

Ce răspundem însă cînd ni se spune : concurentul X este mult mai valoros decît ceilalți, dar s-a încurcat neașteptat, a fost bolnav etc. și nu a reușit să se califice? A deschide poarta etapei superioare oricărui doritor ar fi o soluție ce ar conduce la un dezechilibru, însă apar decizii de a accepta la o etapă mai avansată concurenți care în anii trecuți au obținut la olimpiadă succese evident mai mari decît calificarea ratată în anul respectiv.

Lotul de participanți la Olimpiada Internațională se alege în urma unor probe de baraj, scrise. La primele astfel de probe iau parte concurenții cu cele mai bune rezultate la Olimpiada Națională, în număr de pînă la 100, deci nu numai premianții. În urma rezultatelor se alege un lot lărgit de pînă la 40 elevi, care urmează un program special de pregătire, ce are în vedere și posibilitatea ca unii din ei, care nu vor intra în anul respectiv în echipă, să intre în anii viitori. Pe baza rezultatelor la ultimele probe de baraj, la care participă lotul lărgit, se definitivează lista celor ce vor reprezenta țara la Olimpiada Internațională din acel an. Detalii ale procedurii de selecție descrise pot varia de la an la an.

De ce nu se iau pur și simplu cîștigătorii Olimpiadei Naționale și se mai organizează și aceste probe de baraj va apărea clar începînd cu 2.7 și pe măsură ce vom prezenta probleme de la Olimpiadele Internaționale. Pe scurt, putem spune că participarea la aceste olimpiade reclamă din partea concurenților capacitatea de a face față unor situații matematice neașteptate, de a nu se demobiliza în fața lor, în mult mai mare măsură. La situațiile descrise în 1.1 se adaugă deci și a') „nu știu cum să abordez o asemenea problemă" și b''') „întrevăd două căi, dar nu știu pe care s-o aleg" etc.

Am prezentat problemele din acest paragraf pe scurt și în general. Aspecte concrete vor apărea în descrierea desfășurării diferitelor Olimpiade Internaționale, în paragrafele următoare. Am considerat însă necesar a schița toate acestea la început, deoarece Olimpiada Internațională pune uneori probleme și mai delicate și subtile și înțelegerea lor este mult facilitată dacă se au în vedere aspectele lor mai simple.

2

REGULAMENTUL DE DESFĂŞURARE A OLIMPIADEI INTERNAŢIONALE DE MATEMATICĂ

Dorim să prezentăm Olimpiada Internaţională în evoluţia ei de-a lungul a 10 ani. De aceea vom expune în acest paragraf modul de desfăşurare a ei şi problemele legate de aceasta în stadiul în care se găseau ele în 1973.

2.1. Regulamentul de desfăşurare

Olimpiada Internaţională de Matematică a elevilor a fost organizată prima dată la iniţiativa ţării noastre, în România, în 1958; au participat cîteva ţări din jur. Pentru a evita probleme de schimb valutar, s-a convenit ca toate cheltuielile, cu excepţia drumului, să fie suportate de ţara gazdă. Ţările participante au hotărît să organizeze olimpiada pe rînd, într-o ordine ciclică fixată.

Numărul de concurenţi ai delegaţiei fiecărei ţări a fost decis să fie de maximum 8.

Fiecare ţară trimite la olimpiadă un şef de delegaţie şi un secund, profesori. Secundul poate lipsi, dar şeful nu, din motive ce vor fi clare imediat.

Concurenţii trebuie să nu aibă mai mult de 20 ani şi să nu participe la nici o formă de învăţămînt matematic specializat (în primul rînd, să nu fie studenţi la facultăţi de matematică etc.).

Cu aproximativ două luni înainte de fiecare olimpiadă, ţările participante trimiteau un număr de cîte cel mult 6 probleme comitetului de organizare al olimpiadei, din ţara gazdă. Ţara gazdă nu propune probleme. Netrimiterea de probleme sau trimiterea a mai puţin de şase nu are nici un efect asupra participării ţării respective

la olimpiadă. O comisie a țării gazdă face o preselecție a problemelor, în urma căreia prezintă juriului o listă de circa 16 probleme, alese numai dintre cele primite de la țările participante.

Juriul este format din șefii tuturor delegațiilor prezente la olimpiadă și este condus de un reprezentant al țării gazdă. Deciziile se iau prin majoritate de voturi, în caz de egalitate votul președintelui fiind decisiv. La lucrările juriului pot participa și secunzii; în cazul în care un șef de delegație nu poate lua parte la o ședință, secundul său îl poate înlocui.

Limbile oficiale ale olimpiadei, în care au loc dezbaterile, în care se se trimit comitetului de organizare problemele și în care sînt redactate documentele, printre care și lista de probleme, cu soluțiile lor, ce o prezintă comisia țării gazdă la începutul olimpiadei, sînt engleza, franceza, rusa și germana. Se presupune că fiecare șef de delegație și fiecare secund poate lucra în una din aceste limbi.

Prima parte a lucrărilor juriului constă în alegerea, din lista prezentată de comitetul de organizare, a celor șase probleme ce vor fi date spre rezolvare concurenților, în împărțirea lor în două grupuri de cîte trei corespunzătoare celor două zile de concurs, în stabilirea numărului de puncte ce se acordă unui concurent în cazul rezolvării complete a fiecăreia dintre cele șase probleme; de regulă, suma celor șase punctaje, deci punctajul maxim cel poate realiza un concurent este 40. De asemenea, se elaborează variantele oficiale, în cele patru limbi menționate, ale listelor de probleme de concurs. Șeful fiecărei delegații traduce apoi problemele în limba țării sale și controlează modul în care acestea sînt multiplicate.

Concursul propriu-zis se desfășoară în două zile consecutive. Fiecare concurent primește lista celor trei probleme ce urmează să le rezolve în ziua respectivă, în limba sa maternă, limbă în care își redactează și lucrarea. Sînt opt săli de concurs, în fiecare din acestea fiind cîte un concurent din fiecare țară.

Fiecare șef de delegație, împreună cu secundul său, corectează lucrările concurenților din delegația țării sale.

Asigurarea uniformității principiilor de notare se face astfel. Țara gazdă formează, pentru fiecare din cele șase probleme, cîte o comisie; aceste comisii se numesc comisii de coordonare, iar membrii lor — coordonatori. Coordonatorii sînt matematicieni din țara gazdă. Fiecare delegație prezintă, în fața fiecăreia din comisiile de coordonare, modul cum concurenții ei au rezolvat problema respectivă și punctajele ce se atribuie se stabilesc de comun acord între delegație și coordonatori. Această activitate (discuție, decizie) se numește coordonare. În cazul lucrărilor concurenților țării gazdă, la coordo-

nare participă, în locul echipei respective de coordonatori, delegaţia ţării care a trimis problema, de care este vorba, comitetului de organizare.

A doua parte a lucrărilor juriului constă, înainte de coordonare, în a stabili, împreună cu coordonatorii, unele principii generale de atribuire a punctajelor, eventual unele „bareme".

După coordonare, în juriu se ia decizia finală asupra punctajului ce se acordă unui concurent, la o anumită problemă, în fiecare caz de dezacord între delegaţia respectivă şi comisia de coordonare. Avînd în faţă punctajul final obţinut de fiecare concurent, rezultate aşezate în ordinea descrescîndă a punctajelor, juriul decide concurenţii cărora li se atribuie premiul 1, respectiv 2 şi 3. De asemenea, juriul decide asupra acordării unor premii speciale unor concurenţi, pentru rezolvarea deosebită a anumitor probleme (aceasta independent de punctajul total obţinut de aceştia).

2.2. Unele explicaţii suplimentare

Este evident că, deoarece ţările organizatoare suportă pe rînd cheltuielile de desfăşurare ale olimpiadei, deci în mod egal, nici o altă regulă nu apare drept echitabilă în afară de cea care permite fiecărei delegaţii să prezinte un număr determinat de concurenţi. Acest număr s-a hotărît a fi 8. O ţară poate trimite mai puţin de 8, aceasta fiind însă o decizie numai a delegaţiei respective. Chiar dacă argumentul „financiar" n-ar fi fost luat în discuţie, este clar că a stabili şi a pune în aplicare un barem de participare pentru toate delegaţiile ar fi practic imposibil.

Şeful delegaţiei vine la lucrările olimpiadei din prima zi. Secundul, împreună cu concurenţii, vine de regulă mai tîrziu, cu 1—2 zile înainte de concursul propriu-zis.

La Olimpiada din 1973 au participat 16 delegaţii. Deci comitetul de organizare ar fi putut primi cu două luni înainte chiar 96 de probleme (nu ştim exact cîte au fost, dar de regulă numărul este mai mic). Dacă ar fi fost numai 50, examinarea tuturor acestor probleme de şefii de delegaţii ar fi luat mult timp. Din acest motiv lor li se prezintă un număr de aproximativ 16, cu soluţiile respective. Ei au de obicei o zi, la început, pentru a le examina, rezolva ei înşişi etc., zi în care nu au loc, în principiu, alte activităţi, timp ce apare suficient pentru a le aprofunda.

Situația specială a țării gazdă, aceea de a face această preselecție, este contrabalansată de faptul că ea nu propune probleme.

Votul asupra celor șase probleme (din cele aproximativ 16) ce vor fi date spre rezolvare concurenților este precedat de discutarea în juriu a soluțiilor celor 16 probleme și de discuții în legătură cu măsura în care fiecare este potrivită pentru olimpiadă.

Înainte de redactarea celor șase probleme de concurs în cele patru limbi oficiale, în juriu se discută detaliile acestei redactări, pentru a elimina orice echivoc și a face posibilă traducerea exactă în toate celelalte limbi ale delegațiilor.

Prima parte a lucrărilor juriului durează pînă la patru zile.

Lucrările scrise ale concurenților nu sînt „secrete", în sensul dat acestui cuvînt la examenele de admitere, de exemplu.

Coordonarea începe în ziua următoare ultimei zile de concurs. Coordonarea unei probleme la o delegație durează circa o oră. Deci în cazul a 16 delegații coordonarea durează cel puțin două zile. Ea se face după un program afișat în prealabil. Dacă ținem seama și de cele două după amieze din zilele de concurs și de faptul că fiecare delegație are maximum 8 concurenți, deci $8 \times 6 = 48$ unități „elev-problemă", timpul apare suficient pentru a citi cu atenție, rînd cu rînd, lucrările și a apărea în fața comisiilor de coordonare, cunoscînd în detaliu rezolvările date de concurenți și gata de a da orice fel de explicații și a răspunde la întrebările coordonatorilor.

Cele șase ore de coordonare ale fiecărei delegații sînt, de obicei, plasate izolat și nu „una după alta".

Evident că fiecare echipă de coordonatori trebuie să poată discuta, măcar prin unul din membrii ei, în oricare din cele patru limbi oficiale. Aceste echipe au de regulă, trei membri.

Numărul total de premii este de ordinul a 1/2 din numărul total de concurenți. Deci un concurent ce a luat premiul 2 nu înseamnă că s-a clasat al 2-lea. De exemplu, la 120 concurenți pot fi 60 premii, să zicem 10 premii 1, 20 premii 2 și 30 premii 3 și deci al 30-lea clasat ia și el premiul 2 !

Cele șase probleme de concurs sînt însoțite fiecare de numele țării care a trimis-o comitetului de organizare; astfel Olimpiada Internațională apare și ca o competiție între problemisticile diferitelor țări participante, evident în limitele adecvării la olimpiadă.

În fiecare zi de concurs, concurenții au la dispoziție patru ore, pentru lucru.

Cu ocazia descrierii desfășurării diferitelor Olimpiade Internaționale de Matematică vom adăuga și alte precizări.

2.3. Șeful delegației

Împreună cu secundul său, el poartă răspunderea totală asupra corectitudinii traducerii problemelor în limba țării sale, traducere ce este înmînată concurenților din delegația sa, exact sub forma ce el a redactat-o. De asemenea, poartă răspunderea totală în ceea ce privește prezentarea tuturor realizărilor din lucrările concurenților din țara sa coordonatorilor, pentru ca acestor lucrări să li se acorde punctajele corespunzătoare.

Așa cum am arătat și în 1.4, pentru a face față cu succes obligațiilor este bine ca șeful delegației să rezolve el însuși cele aproximativ 16 probleme puse în discuție. Numai o cunoaștere profundă a tuturor aspectelor legate de cele șase probleme de concurs îl va pune la adăpost de greșeli în traducerea lor și îl va aduce în situația să facă față discuțiilor cu comisiile de coordonatori, care, pentru a fi imparțiali, insistă foarte mult pe prezentarea diferitelor detalii de raționament și redactare și urmăresc ei înșiși, pe cît posibil, lucrările concurenților.

Evident că nu se presupune și nici nu este cazul ca la fiecare aspect discutat în juriu toți delegații să ia cuvîntul. Pasivitatea sistematică a unui șef de delegație nu este însă în favoarea prestigiului delegației respective. Acest prestigiu crește în primul rînd ca urmare a unor soluții originale date problemelor, a unor observații și sugestii judicioase relative la diferite dificultăți sau controverse ce apar în desfășurarea lucrărilor juriului.

Coordonarea apare ca un contact matematic între două grupe de matematicieni : șeful delegației cu secundul său și comisia de coordonatori.

Toate aceste activități cer din partea șefului delegației și a secundului său o înțelegere profundă a spiritului matematicii, capacitatea de a se orienta și a reacționa repede și exact în diferite situații imprevizibile, dar și o înțelegere a dificultăților în care se află un concurent față în față cu probleme, de regulă, pline de surprize. Asemenea calități nu se pot educa la comandă ; ele se formează în decursul unei întregi vieți matematice, care începe, de obicei, cu participarea la olimpiade, ca elev.

O formulă larg uzitată, dar prin nimic obligatorie, este ca șeful delegației să fie universitar, iar secundul — profesor în învățămîntul școlar.

2.4. Scopul principal al Olimpiadei Internaţionale de Matematică

O mare influenţă asupra capacităţii de mobilizare a şefului şi a secundului unei delegaţii în vederea efortului susţinut ce-l reclamă activitatea în juriu o are convingerea lor profundă asupra importanţei Olimpiadei Internaţionale de Matematică în viaţa şcolară.

Matematica nu se face „în stare de urgenţă". Dimpotrivă, cele mai valoroase rezultate ale ei au în urmă perioade lungi de căutări, de muncă. Aceasta ar fi una din principalele obiecţii în calea organizării de olimpiade de matematică, una din principalele îndoieli asupra semnificaţiei rezultatelor lor. Nu trebuie însă uitat că spiritul de competiţie este propriu, accesibil, tuturor tinerilor, dar tendinţa spre o activitate de tipul celei proprii matematicii se formează mai greu.

Olimpiada de matematică este tocmai un teren optim pentru captarea de energii rezultate dintr-un spirit elementar de competiţie şi canalizarea lor spre scopuri mai concrete, mai serioase. Evident că olimpiada internaţională are de a face, de regulă, cu tineri în care această transformare s-a produs deja.

Trebuie făcută distincţia între rolul Olimpiadelor Internaţionale de Matematică şi rolul Jocurilor Olimpice sportive. Cele sportive conduc la o consacrare definitivă pentru cîştigătorii lor, pe cînd cele de Matematică scot doar în evidenţă talente ce urmează să se împlinească în cursul unei îndelungate activităţi ulterioare.

Remarcînd faptul că există matematicieni de valoare, între care şi români, care în tinereţe nu au participat la olimpiade de matematică sau nu au obţinut rezultate deosebite la astfel de participări, să apelăm totuşi la „criteriul practicii" pentru a vedea în ce măsură Olimpiada Internaţională de Matematică îşi îndeplineşte menirea, în ce măsură valorile scoase de ea în evidenţă s-au dovedit reale, aceasta în ceea ce priveşte participanţii români.

Ce se putea spune în 1973, după desfăşurarea a 14 Olimpiade Internaţionale de Matematică?

Cea mai reuşită participare a unui concurent român apare şi astăzi cea a lui Dan Voiculescu (premiul 1 în 1966 şi 1967, premiul 2 în 1965). Pînă în 1973 trei premii, dintre care cel puţin un premiu 2, obţinuseră Eugen Popa (premiul 2 în 1966 şi 1967 şi premiul 3 în 1965), Horia Călin Pop (premiul 3 în 1967 şi 1968 şi premiul 2 în 1969) şi Alexandru Dimca (premiul 3 în 1970 şi premiul 2 în 1971 şi 1972). În 1973 primii erau asistenţi universitari, iar Horia Călin Pop

student, la Facultățile de Matematică din București, Iași, București, respectiv. Impresiile ce le determinaseră deja în lumea matematică se exprimau numai prin superlative. În anii următori același lucru s-a putut spune și despre tezele de doctorat ale celor patru. D. Voiculescu a primit în 1981 dreptul de a îndruma doctoranzi, fiind deja în 1983 conducător științific al unei teze deosebit de valorosase. D. Voiculescu a fost, la a 20-a Olimpiadă Internațională de Matematică, organizată în România, coordonator și vicepreședinte al juriului, Horia Călin Pop a fost secund al delegației țării noastre la a 21-a Olimpiadă și coordonator la cea de-a 20-a, funcție ce a îndeplinit-o și Alexandru Dimca.

Exemplele prezentate pot fi completate cu multe altele. Ele reprezintă argumente puternice în favoarea faptului că Olimpiada Internațională de Matematică își atinge pe deplin scopul — de a scoate în evidență tinere talente matematice — și că aceasta este o manifestare matematică de cea mai înaltă clasă la nivel școlar.

Scopul Olimpiadei Internaționale, așa cum a fost el descris mai sus, dă posibilitatea unei unități de vederi între membrii juriului, între aceștia și coordonatori etc.

Olimpiada Internațională de Matematică a arătat și ea, mereu, că matematica este o cale surprinzător de eficientă de a realiza o unitate spirituală între oameni, indiferent de naționalitatea lor.

2.5. Ordinea organizării Olimpiadei Internaționale de Matematică de diferite țări

În 1973 aceasta apărea astfel: în 1973 — U.R.S.S., urmînd ca, în anii 1974. 1975, ... ea să fie organizată, în această ordine, de R. D. Germană, Bulgaria, Iugoslavia, România, Ungaria, Cehoslovacia și Polonia.

La Olimpiada din 1973 (a 15-a) au participat, pe lîngă țările enumerate, și Cuba, Mongolia, Austria, Finlanda, Anglia, Franța, Suedia. Olanda, ca invitate. Aceasta fără ca în acel moment să se fi pus în discuție posibilitatea ca una din țările invitate să organizeze și ea Olimpiada.

Începînd cu a 9-a Olimpiadă Internațională (1967) apăruse un astfel de grup de țări participante, invitate (Mongolia participase și înainte de 1967), care nu se numărau printre „organizatoare". Drepturile lor în juriu etc. erau egale cu ale celorlalte țări.

2.6. Cîteva probleme de la Olimpiadele Internaționale dinainte de 1973

Unul din modurile cele mai eficiente prin care un șef de delegație se poate pregăti pentru activitatea sa în juriu este rezolvarea și studiul problemelor de la Olimpiadele Internaționale de Matematică anterioare, de la Olimpiadele Naționale ale țărilor participante. În 1973 exista cartea „Olimpiadele Internaționale de Matematică" de E. A. Morozova și I. S. Petrakov (apărută în limba rusă în 1971, vezi [5]), care „se oprea" la Olimpiada a 11-a.

Să prezentăm întîi cele două probleme „mai ușoare" de la Olimpiadele a 11-a și a 10-a, cotate fiecare cu cîte 5 puncte.

Problema 1, Olimpiada a 11-a (propusă de R.D.G.). *Să se demonstreze că există o infinitate de numere naturale a pentru care $n^4 + a$ nu este prim pentru nici un n natural.*

Soluție. Dacă am reuși să descompunem polinomul $x^4 + a$ în produsul a două polinoame de gradul 2 cu coeficienți întregi, atunci am fi foarte aproape de a fi găsit un a cu proprietatea din enunț. Scriind $x^4 + a = (x^2 + mx + n)(x^2 + px + q)$, se observă că va trebui ca $p = -m$ (coeficientul lui x^3) și apoi $q = n$ (coeficientul lui x). Deci descompunerea va fi de forma $x^4 + a = (x^2 + mx + n)(x^2 - mx + n)$ și va trebui ca $m^2 - 2n = 0$ (coeficientul lui x^2), deci m să fie par, $m = 2k$, $n = 2k^2$. Ajungem la $x^4 + 4k^4 = (x^2 + 2kx + 2k^2)(x^2 - 2kx + 2k^2)$ și s-ar părea că orice $a = 4k^4$ are proprietatea dorită. Pentru a dovedi aceasta ar trebui să ne convingem că nici unul din cei doi factori nu poate fi egal cu ± 1 pentru nici un x întreg. Cei doi factori se pot scrie $(x \pm k)^2 + k^2$ și se poate obține 1 (dacă $k \neq 0$) numai pentru $x = \pm k$ și $k = \pm 1$; deci orice $a = 4k^4$ cu $k > 1$ are proprietatea din enunț și afirmația este demonstrată.

C o m e n t a r i u . Problema nu pare grea. Dar un concurent ar fi putut încerca și altfel. De exemplu, numerele prime, cu excepția lui 2 și a lui 3, sînt de forma $6k \pm 1$. Considerînd $0, \pm 1, \pm 2, 3$, se observă că numerele n^4 se pot scrie ca $6k + 0, 1, 4, 3$. Oricum am alege însă a, unul din numerele $\pm 1 - a$ este de forma $6k + 0, 1, 4, 3$ (cele două, $6k + 2, 5$, care lipsesc, sînt la distanță de 3 între ele și nu de 2 sau 4, cum sînt $\pm 1 - a$). Deci pe această cale nu găsim nici un a cu proprietatea din enunț. Dacă încercăm cu alt număr în loc de 6, de exemplu cu 30, nu avem mai mult succes, după cum se pare.

Problema 4, Olimpiada a 10-a (propusă de Polonia). *Să se demonstreze că în orice tetraedru există un vîrf așa încît cu cele trei muchii ce pleacă din el să se poată construi un triunghi ce le are ca laturi.*

Soluție. Nu se învață nici o condiție necesară și suficientă ca 6 numere date să poată fi lungimile celor 6 muchii ale unui tetraedru și nici nu pare simplu a deduce o astfel de condiție. Aceasta nu trebuie însă să ne descurajeze, deoarece fenomenul matematic descris de problemă poate să fie mai puțin profund.

Să începem prin a observa că, notînd cu 1, 2, 3, 4, 5, 6 muchiile tetraedrului în ordinea crescătoare a lungimilor lor, dacă 1, 2, 3 pornesc din același vîrf, atunci ele sînt laturile unui triunghi, deoarece de exemplu $(1) + (2)$ este mai mare decît muchia opusă lui 3, după cum se vede considerînd fața formată din 1, 2 și muchia opusă lui 3, deci $(1) + (2) > (3)$. Analog arătăm că $(1) + (3) > (2)$, $(2) + (3) > (1)$.

Dacă 1, 2, 3 formează o față, atunci 4, 5, 6 pornesc din același vîrf și formează laturile unui triunghi, deoarece $|(5) - (6)|$ este mai mic decît muchia opusă lui 4, deci și decît 4 etc.

Dar nu în orice tetraedru are loc una din situațiile descrise. De exemplu, cele patru fețe pot fi 124, 156, 253, 463 (fig. 1). Deci problema nu este încă rezolvată. Să considerăm, mai departe, două muchii opuse a, b cu $a \geq b$. Dacă m și n sînt două muchii dife-

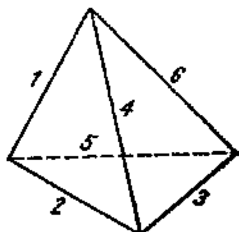


Fig. 1

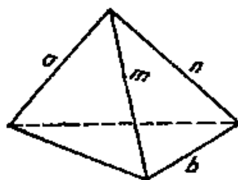


Fig. 2

rite de a, care pleacă, ambele, din același capăt al lui a (fig. 2), atunci $a \geq b > |m - n|$. Dacă am putea deduce și că $a < m + n$, atunci am ști că a, m, n formează un triunghi și problema ar fi rezolvată.

Această deducție este imediată dacă una din muchiile m, n este mai mare sau egală cu a. Dacă 6 nu se află printre a, b, atunci putem alege acea pereche m, n în care se află 6 și deducția este realizată.

Chiar printre muchiile 1, 2, 3, 4 există două opuse (era destul să știm aceasta despre 1, 2, 3, 4, 5), deoarece sînt numai trei perechi de muchii opuse. Alegînd două muchii opuse din mulțimea {1,2,3,4} și notînd cu a pe cea mai lungă, ajungem în situația dorită.

Nu numai că problema este rezolvată, dar am pus în evidență și un moment de „nefinețe" în demonstrație, pentru a nu mai repeta cele legate de condiția ca șase numere să fie muchiile unui tetraedru.

Raționamentul de mai sus a evitat punerea în evidență a tuturor figurilor, neechivalente două cîte două, de tipul fig. 1 etc.

Să prezentăm acum și cele două probleme „mai grele" de la Olimpiadele 11 și 10, cotate fiecare cu cîte 8 puncte.

Problema a 6-a, Olimpiada a 11-a (propusă de U.R.S.S.). *Să se demonstreze că dacă* $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ *și* $x_1y_1 - z_1^2 > 0$, $x_2y_2 - z_2^2 > 0$, *atunci*

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leqslant \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2}$$

și să se stabilească în ce caz are loc egalitatea.

Soluție. Rezultă și $y_1 > 0$, $y_2 > 0$. Dacă înlocuim z_1 cu $|z_1|$ și z_2 cu $|z_2|$, membrul întîi poate cel mult să crească (membrul doi rămînînd neschimbat); ne convingem de aceasta observînd că, pentru $z_1 > 0$, și $z_2 > 0$ avem $2z_1z_2 < 2\sqrt{x_1y_1x_2y_2} \leqslant x_1y_2 + x_2y_1$, de unde rezultă ușor că membrul stîng nu poate fi nepozitiv. Mai mult, membrul stîng este mai mic sau egal cu $8/[(u_1+u_2)^2 - (z_1+z_2)^2]$, dacă notăm $u_1 = \sqrt{x_1y_1}$, $u_2 = \sqrt{x_2y_2}$.

Toate aceste considerații arată că egalitatea implică faptul că z_1 și z_2 sînt de același semn și $x_1y_2 = x_2y_1$. Acestea reduc inegalitatea de demonstrat la $\frac{8}{(u_1 + u_2)^2 - (z_1 + z_2)^2} \leqslant \frac{1}{u_1^2 - z_1^2} + \frac{1}{u_2^2 - z_2^2}$ și apoi, notînd $p_1 = u_1 + z_1$, $q_1 = u_1 - z_1$, $p_2 = u_2 + z_2$, $q_2 = u_2 - z_2$ și observînd că p_1, q_1, p_2, q_2 sînt pozitivi, la $\frac{8}{(p_1 + p_2)(q_1 + q_2)} \leqslant$ $\leqslant \frac{1}{p_1q_1} + \frac{1}{p_2q_2}$, care inegalitate se stabilește utilizînd $p_1 + p_2 \geqslant$ $\geqslant 2\sqrt{p_1p_2}$, $q_1 + q_2 \geqslant 2\sqrt{q_1q_2}$ și deducînd faptul că membrul stîng este $\leqslant 2/\sqrt{p_1q_1p_2q_2}$, care este mai mic sau egal cu membrul drept

ca urmare a inegalității dintre media aritmetică și cea geometrică aplicate încă o dată.

În raționamentul de mai sus se obține semnul egal atunci și numai atunci, cînd $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$, $p_1q_1 = p_2q_2$, ceea ce revine la $u_1 = u_2$ și $z_1 = z_2$. Apoi $u_1 = u_2$ devine $x_1y_1 = x_2y_2$ și, împreună cu $x_1y_2 = x_2y_1$, revine la $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Inegalitatea este demonstrată; egalitatea are loc atunci și numai atunci, cînd $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$.

Problema 6, Olimpiada a 10-a (propusă de Anglia). *Să se calculeze pentru orice n întreg pozitiv suma*

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{2^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]+\ldots$$

Soluție. Nu este o serie, ci o sumă finită, deoarece pentru $n < 2^k$ avem $n + 2^k < 2^{k+1}$ și numai primii k termeni pot fi nenuli.

Pentru $n = 0$ suma este 0.

Cînd n crește, suma își schimbă valoarea numai cînd n trece printr-o poziție pentru care $n + 2^k = r \cdot 2^{k+1}$ pentru cel puțin un k întreg. Aceasta este echivalent cu: n este întreg și n se divide cu 2^k, dar nu cu 2^{k+1}. Pentru un n întreg dat, există exact un astfel de k. Deci, cînd n crește, la trecerea prin fiecare valoare întreagă suma crește exact cu o unitate. Încă o observație simplă (suma este constantă, ca funcție de n, pe fiecare $[k, k+1)$ cu k întreg) ne arată că suma este egală cu $[n]$.

Iată și altă soluție, descoperită de un concurent. Avem $[x + 1/2] = [2x] - [x]$, după cum se verifică prin considerarea cazurilor $k \leqslant x < k + 1/2$ și $k + 1/2 \leqslant x < k + 1$, pentru orice k întreg. Deci

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left[\frac{n}{2^k}\right]-\left[\frac{n}{2^{k+1}}\right]\right)=[n].$$

Prin aceste patru probleme obținem o idee despre cît de grele sau de ușoare apar problemele de la Olimpiada Internațională de Matematică.

2.7. Programa analitică a Olimpiadei Internaționale

Am amînat pînă aici prezentarea acestei probleme, deoarece paragraful 2.6 a făcut clar faptul că la Olimpiada Internațională nu se pune accent pe cunoștințe, ci pe iscusința în rezolvare etc.

Răspunsul oficial este : programa Olimpiadei este partea comună a programelor de matematică de liceu din toate țările participante. Aceasta face ca probleme de analiză matematică să nu se propună la Olimpiada Internațională. În ce măsură însă este bine ca participanții să știe să manevreze noțiuni și instrumente din analiza matematică, va apărea clar pe parcursul paragrafelor următoare.

Deci pregătirea concurenților pentru această Olimpiadă nu constă în a le preda cunoștințe în plus, ci în primul rînd a le antrena abilitatea de a rezolva probleme, cu cunoștințele ce le-au căpătat în școală; evident, temeinicia lor este presupusă...

Olimpiada Internațională nu se dă „pe clase". De regulă, s-a constatat că elevii din clasele mai mari au mai multe șanse, dar au apărut și exemple spectaculoase de premii, chiar 1, obținute de elevi „de clasa a 9-a".

2.8. Ce facultate vor urma participanții la Olimpiada Internațională?

Cele relatate din 2.4 par a conduce la un răspuns ferm : Facultatea de Matematică. Evident că unele excepții n-ar surprinde. Iată însă că dintre cei cinci concurenți români din 1973 ce erau în ultima clasă, trei și-au exprimat dorința de a urma una din Facultățile Institutului Politehnic! Într-o discuție, unul din ei a afirmat : „Eu doresc să devin un inginer bun, dar nu orice fel de inginer, ci unul pentru care matematica să fie un instrument de bază în activitatea sa, unul în viața căruia matematica să joace un rol esențial". Și, într-adevăr, concurenții de la Olimpiada Internațională ce au urmat Institutul Politehnic s-au dovedit, de regulă, printre cei mai buni studenți și, în același timp, fideli pasiunii pentru matematică, pentru o matematică în sinteză cu problemele tehnice.

Aceste fapte nu fac decît să sublinieze încă o dată justețea concepției Partidului nostru asupra rolului științelor fundamentale în formarea de specialiști în toate domeniile.

3

A 15-a OLIMPIADĂ INTERNAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ (Moscova, U.R.S.S., 1973)

3.1. Problemele propuse juriului

Pentru a indica şi ţara ce a propus problema respectivă, vom folosi, aşa cum se obişnuieşte la Olimpiada Internaţională, indicativul rutier. De exemplu PL2 înseamnă problema nr. 2 din lista trimisă de Polonia comitetului de organizare, conform regulilor din 2.1. În lucrarea de faţă vom utiliza aceste indicative conform noilor reglementări, (deci oarecum deosebite de cele ce s-au folosit efectiv în documentele Olimpiadelor), anume (dăm numai lista ţărilor ce au participat cel puţin o dată la Olimpiadă) :

DZ(Algeria), AU(Australia), AT(Austria), BE(Belgia), BR(Bazilia), BG(Bulgaria), CA(Canada), CO(Columbia), CU(Cuba), CS(Cehoslovacia), FI(Finlanda), FR(Franţa), DD(R.D.G.), DE(R.F.G.), GR(Grecia), HU(Ungaria), IL(Israel), IT(Italia), KW(Kuwait), LU(Luxemburg), MX(Mexic), MN(Mongolia), NL(Olanda), PL(Polonia), RO(România), SE(Suedia), TN(Tunisia), TR(Turcia), SU(U.R.S.S.), GB(Marea Britanie), US(S.U.A.), VE(Venezuela), VN(Vietnam), YU(Iugoslavia).

Problemele propuse juriului au fost următoarele.

CU1. *Să se demonstreze că pentru orice n avem*

$$2^n \prod_{k=1}^{n} \sin \frac{k}{2n+1} = \sqrt{2n+1}.$$

CU2. *Să se descompună într-un produs de m polinoame de gradul 2 cu coeficienţi reali polinomul*

$$x^{2m} - 2|a|^m x^m \cos m\theta + a^{2m}.$$

PL2. *Să se stabilească dacă există o mulțime finită M de puncte în spațiu, nesituate toate în același plan, așa ca pentru orice dreaptă ce conține cel puțin două puncte din M să existe o altă dreaptă, paralelă cu aceasta (dar distinctă de ea), care să conțină și ea cel puțin două puncte din M.*

PL3. *Fie ABCD un tetraedru. Să se demonstreze că există un triunghi ale cărui laturi au ca lungimi $AB \cdot CD$, $AC \cdot BD$, $AD \cdot BC$*

BG6. *Un tetraedru ABCD este înscris în sfera S. Să se determine locul geometric al punctelor P, situate în interiorul lui S, pentru care* $\frac{AP}{PA_1} + \frac{BP}{PB_1} + \frac{CP}{PC_1} + \frac{DP}{PD_1} = 4$, *unde A_1, B_1, C_1, D_1 sînt celelalte puncte de intersecție ale dreptelor AP, BP, CP, DP cu sfera S.*

FR2. *Un cerc de rază 1 se mișcă în interiorul unui triedru tridreptunghic, rămînînd tot timpul tangent la cele trei fețe ale triedrului. Care este locul geometric al centrului său?*

YU4. *Să se afle sfera de rază maximă care poate fi așezată în orice tetraedru ce are toate înălțimile* $\geqslant 1$.

YU5. *Un soldat trebuie să verifice dacă există vreo mină în interiorul sau pe laturile unui triunghi echilateral ABC. Detectorul său acționează la o distanță maximă egală cu jumătate din înălțimea triunghiului. Soldatul pleacă dintr-un vîrf al triunghiului. Care este drumul de lungime minimă ce-l poate el parcurge, pentru ca la sfîrșitul lui să fie sigur că și-a îndeplinit misiunea?*

GB1. *Fie P o mulțime de 7 numere prime, C mulțimea celor 28 de numere compuse ce sînt produse de cîte două numere, nu neapărat distincte, din P. Mulțimea C se împarte în 7 submulțimi disjuncte, fiecare formată din cîte 4 numere. Pentru fiecare număr x din C există două dintre numerele din aceeași submulțime cu el, x_1, x_2, așa ca x, x_1 să aibă un factor comun și de asemenea x, x_2. Cîte astfel de descompuneri există?*

RO1. *Să se arate că există exact $C_k^{[k/2]}$ șiruri $a_1, \ldots, a_{k+1}$ de numere întregi $\geqslant 0$, în care $a_1 = 0$ și $|a_i - a_{i+1}| = 1$ pentru $i = 0, 1, \ldots, k$.*

RO2. *Fie G un punct în interiorul triedrului de muchii Ox, Oy, Oz. Să se construiască planul ce trece prin G și care determină împreună cu Ox, Oy, Oz un tetraedru de volum minim.*

CS3. *Se consideră o sferă S. Să se determine locul geometric al vîrfului A al paralelogramului ABCD în care $AC \leqslant BD$ și diagonala BD este situată în întregime în interiorul sau pe frontiera lui S.*

CS6. *Să se demonstreze că suma unui număr impar de vectori de lungime 1, de origine comună O şi situaţi toţi în acelaşi semiplan determinat de o dreaptă ce trece prin O, are lungimea cel puţin 1.*

SE3. *Fie $a_1, \ldots, a_n$ n numere pozitive şi $0 < q < 1$. Să se determine n numere $b_1, \ldots, b_n$, aşa încît:*

a) $a_k < b_k$ *pentru* $k = 1, \ldots, n$;

b) $q < \frac{b_{k+1}}{b_k} < \frac{1}{q}$ *pentru* $k = 1, \ldots, n-1$;

c) $b_1 + \ldots + b_n < \frac{1+q}{1-q}(a_1 + \ldots + a_n)$.

SE4. *Să se determine valoarea minimă a lui $a^2 + b^2$ cînd (a, b) parcurge toate perechile de numere reale pentru care ecuaţia $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ are cel puţin o rădăcină reală.*

SE6. *Se consideră matricele*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se numesc operaţii elementare:

a) *schimbarea semnelor tuturor elementelor unei linii;*
b) *schimbarea semnelor tuturor elementelor unei coloane;*
c) *permutarea a două linii;*
d) *permutarea a două coloane.*

Să se demonstreze că A nu poate fi transformată în B prin aplicarea succesivă a unui număr finit de transformări elementare.

3.2. Probleme refuzate de juriu de la început

Ca urmare a primei întîlniri a juriului, înainte de a se fi trecut la studiul acestor probleme de către membrii săi, au „căzut" trei dintre ele. Anume:

RO1, deoarece soluţia ei apare, sub o formă sau alta, în cartea lui W. Feller „An Introduction to Probability Theory and its Applica-

tions", vol. 1, cap. 3 (John Wiley, 1966). Această carte este cunoscută unor cercuri largi de cititori şi astfel un concurent care s-ar fi ocupat de teoria elementară a probabilităţilor ar fi putut avea un avantaj neaşteptat.

CS3, deoarece a fost considerată drept cunoscută. Asemenea situaţii apar ca o dovadă de „fair play" din partea unor delegaţii, care nu doresc avantaje întîmplătoare pe tabela de rezultate.

SE6, deoarece se observă că transformările elementare nu schimbă valoarea absolută a determinantului matricei asupra căreia ele se aplică, şi avem $\det A = 16$, $\det B = 0$. Pe această cale problema apare deci banală.

Dar în legătură cu SE6 rămîne întrebarea : putem da un exemplu de două matrice A şi B, pătrate, cu acelaşi număr de linii, pentru care $|\det A| = |\det B|$ şi care să nu poată fi transformate una în alta printr-un număr finit de transformări elementare (în sensul problemei SE6)? Autorul acestei cărţi nu posedă un răspuns la această întrebare.

Să prezentăm, totuşi, soluţiile celorlalte două probleme refuzate din start pentru a avea o idee asupra a ceea ce s-a pierdut prin această decizie.

Soluţia problemei CS3 (vezi 3.1). Să notăm cu M centrul paralelogramului. Acesta este situat în interiorul sferei S. Reciproc, orice punct interior sferei S este centrul unui paralelogram cu proprietăţile din enunţ (pentru a ne convinge de aceasta alegem un paralelogram suficient de mic cu centrul în punctul dat).

Odată ales M, punctele B şi D vor trebui alese în interiorul sferei, aşa încît M să fie mijlocul lui BD. Dacă O este centrul sferei, să considerăm planul P perpendicular în M pe OM. Unul din punctele B, D se va afla în calota mică tăiată de P din S, deci distanţa sa la M nu va depăşi raza cercului (cu centrul în M), după care planul P intersectează suprafaţa sferei S.

Dacă M, B, D au fost alese, A poate fi ales oriunde în sfera de centru M şi rază $MB = MD$. Cînd M este fixat şi B, D variază, raza maximă a acestei sfere este, conform alineatului precedent, raza cercului de secţiune a sferei S cu planul P, adică $(R^2 - OM^2)^{1/2}$.

Acum este uşor de dedus că locul geometric al lui A este o sferă de centru O şi rază $\sup\limits_{0<x<R}(x+\sqrt{R^2-x^2})$; sfera va fi închisă dacă superiorul se atinge şi deschisă în caz contrar (este vorba, evident, de o sferă „plină"). Peste tot R este raza sferei S.

Pătratul razei locului geometric este $R^2 + 2 \sup_{0<x<R} x\sqrt{R^2 - x^2}$, pătratul superiorului ce apare este $\sup_{0<x<R} x^2(R^2 - x^2)$, care se atinge pentru $x^2 = R^2/2$, deci (calcul elementar) locul geometric căutat este sfera plină de rază egală cu de $\sqrt{2}$ ori raza sferei S şi concentrică relativ la S.

În tot raţionamentul ne-am limitat la paralelograme „nedegenerate", în particular în care $B \neq D$ şi $A \neq C$ (deci din sfera în care variază A pentru M, B, D daţi trebuie eliminat centrul etc.).

Soluţia problemei RO2 (vezi 3.1). Aceasta este bazată pe aşa-numitul „principiu al reflexiei".

Să considerăm mulţimea M a tuturor şirurilor ce au proprietăţile din enunţ, cu excepţia, eventual, a proprietăţii „$a_i \geqslant 0$ pentru orice i", dar pentru care $a_{k+1} \geqslant 0$.

Să notăm cu N mulţimea tuturor şirurilor ce au toate proprietăţile din enunţ. Pentru orice şir $a = (a_1, \ldots, a_{k+1})$ din $M \setminus N$ să considerăm numărul $s = \min\{r | a_r < 0\} = \min\{r | a_r = -1\}$, ultima fiind valabilă ca urmare a proprietăţilor $a_1 = 0$, $|a_i - a_{i+1}| = 1$; în particular $s \geqslant 2$. Să considerăm apoi şirul $\varphi(a) = (b_1, \ldots, b_{k+1})$, definit prin $b_i = -a_i$ pentru $i \leqslant s$ şi $b_i = a_i + 2$ pentru $i \geqslant s$ ($b_s = 1$ fie că-l calculăm după prima, fie după a doua variantă).

Să observăm că $\varphi(a) \in M$, deci $\varphi : M \setminus N \to M$.

Să arătăm acum că φ este o bijecţie între $M \setminus N$ şi mulţimea P a tuturor şirurilor $(b_1, \ldots, b_{k+1})$ din M pentru care $b_{k+1} \geqslant 2$.

În notaţiile utilizate pentru a defini pe φ, să observăm că $s = \min\{r | b_r = 1\}$, deci, cunoscînd $b = \varphi(a)$, îl putem reconstitui pe a în mod unic, adică φ este injectivă.

Faptul că $\varphi(M \setminus N) \subset P$ este evident din definiţie.

Fie acum $(b_1, \ldots, b_{k+1}) \in P$, adică $b_1 = 0$, $|b_i - b_{i+1}| = 1$ pentru $i = 0, \ldots, k$ şi $b_{k+1} \geqslant 2$. Rezultă că are sens $s = \min\{r | b_r = 1\}$. Să definim $a_i = -b_i$ pentru $i \leqslant s$, $a_i = b_i - 2$ pentru $i \geqslant s$, deci $a_s = -1$, ... Se verifică imediat că $(a_1, \ldots, a_{k+1}) \in M$; cum $a_s = -1$, rezultă că $(a_1, \ldots, a_{k+1}) \in M \setminus N$. Se verifică apoi imediat că $\varphi((a_1, \ldots, a_{k+1})) = (b_1, \ldots, b_{k+1})$. Cu aceasta s-a arătat că $\varphi : M \setminus N \to P$ este bijectivă.

Problema cere să se determine card N = card M − card$(M \setminus N)$ = card M − card P = card$(M \setminus P)$, deci numărul de elemente ale mulţimii tuturor şirurilor $(a_1, \ldots, a_{k+1})$ în care $a_1 = 0$, $|a_i - a_{i+1}| = 1$ pentru $i = 1, \ldots, k$, $a_{k+1} = 0$ sau 1.

Aceste şiruri sînt în corespondenţă bijectivă cu şirurile $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$, în care $\varepsilon_i = \pm 1$ pentru $i = 1, \ldots, k$ şi $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_k = 0$ sau 1

prin $\varepsilon_i = a_{i+1} - a_i$. Condiţia $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_k = 0$ sau 1 se transcrie: numărul de indici i pentru care $\varepsilon_i = -1$ este exact $[k/2]$. Ataşînd fiecărui astfel de şir $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ mulţimea $\{r | 1 \leqslant r \leqslant k, \varepsilon_r = -1\}$, se obţine o bijecţie între mulţimea acestor şiruri şi combinările de k obiecte cîte $[k/2]$, încheind rezolvarea problemei.

A cunoaşte „metoda reflecţiei" ca şi modul de a defini pe M apare într-adevăr ca un avantaj substanţial pentru un concurent.

3.3. Încă o problemă, într-un sens, pierdută

Problema PL2 (vezi 3.1) a rămas pe listă, dar unul din membrii juriului, într-o discuţie cu un grup de şefi de delegaţie, nu s-a abţinut şi a dezvăluit soluţia găsită de el pentru această problemă. Această soluţie a fost următoarea.

Răspunsul la întrebare este afirmativ şi soluţia constă în a construi un exemplu de astfel de mulţime. Prin aceasta problema se deosebea de celelalte, oferind un cîmp larg de acţiune inventivităţii concurenţilor, cu atît mai mult cu cît nu apărea un astfel de exemplu care să se dovedească mai accesibil decît altele. Aceasta explică entuziasmul spontan al celui ce a dezvăluit soluţia.

Se porneşte de la observaţia că dacă mulţimea M are un centru de simetrie O, atunci pentru a verifica faptul că ea are proprietatea din enunţ vor trebui considerate numai drepte ce trec prin O.

Se consideră deci o prismă patrulateră dreaptă, regulată şi se aşază pe cele două baze ale ei două piramide regulate congruente, în afara prismei, avînd ca baze cele două baze ale prismei (fig. 3).

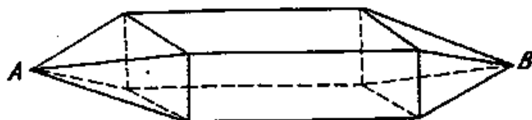


Fig. 3

Mulţimea M a vîrfurilor poliedrului obţinut este invariantă la o rotaţie de 90° în jurul lui AB. Va fi destul deci să verificăm proprietatea din enunţ pentru dreapta AB, ceea ce este imediat considerînd una din muchiile laterale ale prismei, şi pentru o diagonală spaţială a prismei. Pentru ca în acest al doilea caz verificarea să reuşească va trebui să alegem muchiile laterale ale celor două piramide paralele fiecare cu cîte una din diagonalele spaţiale ale prismei, deci, pe scurt,

să alegem A şi B drept simetricele lui O faţă de cele două baze ale prismei.

Cu aceasta rezolvarea problemei este încheiată.

Şi acum, faţă în faţă cu cele 12 probleme rămase. Nu este judicios a le lua la rînd, deoarece una poate opri în loc pe rezolvitor pentru mai multă vreme. Una din tactici este de a începe cu cele ce par mai „şcolăreşti", deci cărora li se întrevăd de la început soluţii.

3.4. Soluţiile a trei probleme de algebră

Soluţia problemei CU1 (vezi 3.1). Se ştie că $\sin((2n+1)x) = P_n(\sin x)$, unde P_n este un polinom de grad $2n+1$. Deci 0, $\pm\sin(\pi/(2n+1)), \ldots, \pm\sin(n\pi/(2n+1))$ sînt rădăcini ale ecuaţiei $P_n(y) = 0$ şi cum ele sînt distincte, rezultă că acestea sînt toate cele $2n+1$ rădăcini ale lui $P_n(y) = 0$.

Problema se reduce deci la a demonstra că, dacă $P_n(y) = a_{2n+1}^{(n)}y^{2n+1} + \ldots + a_1^{(n)}y$, atunci $a_1^{(n)}(a_{2n+1}^{(n)})^{-1} = (2n+1)2^{-2n}(-1)^n$. Vom face aceasta determinînd $a_1^{(n)}$, $a_{2n+1}^{(n)}$.

Să introducem şi polinoamele $Q_n(y) = b_{2n}^{(n)}y^{2n} + \ldots + b_0^{(n)}$, definite prin $\cos((2n+1)x) = \cos x \cdot Q_n(\sin x)$. Obţinem relaţiile de recurenţă

$$\sin((2n+3)x) = \sin((2n+1)x)\cos 2x + \cos((2n+1)x)\sin 2x =$$
$$= P_n(\sin x)(1 - 2\sin^2 x) + Q_n(\sin x)\, 2\cos^2 x \sin x,$$
$$\cos((2n+3)x) = \cos((2n+1)x)\cos 2x - \sin((2n+1)x)\sin 2x =$$
$$= Q_n(\sin x)\cos x(1 - 2\sin^2 x) - 2P_n(\sin x)\sin x\cos x,$$

adică

$$P_{n+1}(y) = (1-2y^2)P_n(y) + 2y(1-y^2)Q_n(y),$$
$$Q_{n+1}(y) = -2yP_n(y) + (1-2y^2)Q_n(y),$$

ceea ce conduce la

$$a_{2n+3}^{(n+1)} = -2a_{2n+1}^{(n)} - 2b_{2n}^{(n)},\quad b_{2n+2}^{(n+1)} = -2a_{2n+1}^{(n)} - 2b_{2n}^{(n)},$$
$$a_1^{(n+1)} = a_1^{(n)} + 2b_0^{(n)},\quad b_0^{(n+1)} = b_0^{(n)}.$$

Condiţiile iniţiale, pentru $n = 0$, sînt [cum $\sin x = \sin x$ şi $\cos x = \cos x$, deci $P_0(y) = y$, $Q_0(y) = 1$]

$$a_{2\cdot 0+1}^{(0)} = b_{2\cdot 0}^{(0)} = a_1^{(0)} = b_0^{(0)} = 1.$$

Ultimele două relații de recurență dau $b_0^{(n)} = 1$ pentru orice n, $a_1^{(n)} = 1 + 2n$. Primele dau întîi $a_{2n+1}^{(n)} = b_{2n}^{(n)}$ pentru orice n (inducție-simplificare neașteptată, deoarece altfel ar fi trebuit să ridicăm matricea coeficienților la puterea n) și apoi $a_{2n+3}^{(n+1)} = -4a_{2n+1}^{(n)}$, deci $a_{2n+1}^{(n)} = (-4)^n$, încheind demonstrația.

Soluția problemei CU2 (vezi 3.1). Dacă notăm x^m cu y, atunci polinomul $P(x)$ din enunț devine $y^2 - 2|a|^m y\cos m\theta + a^{2m}$, care se descompune în $(y - |a|^m(\cos m\theta + \mathrm{i}\sin m\theta))(y - |a|^m(\cos m\theta - \mathrm{i}\sin m\theta))$.

Dacă înlocuim acum y cu x^m, primul factor va avea, conform formulei $(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)^m = \cos m\alpha + \mathrm{i}\sin m\alpha$, m rădăcini distincte, anume $|a|(\cos(\theta + (2k\pi/m)) + \mathrm{i}\sin(\theta + (2k\pi/m)))$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, iar cel de-al doilea va avea ca rădăcini distincte $|a|(\cos(\theta + (2k\pi/m)) - \mathrm{i}\sin(\theta + (2k\pi/m)))$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Aceste rezultate ne conduc la o descompunere a lui $P(x)$ în produsul polinoamelor corespunzătoare de gradul 1, care au însă coeficienți complecși. Grupînd factorii cîte doi, corespunzători aceluiași k, obținem $P(x) = \prod_{k=0}^{m-1} (x^2 - 2|a|\cos(\theta + (2k\pi/m)) + |a|^2)$.

Nu intrăm în detaliile unei discuții care ne arată în ce caz toți acești factori sînt distincți, în ce caz apar printre ei factori cu rădăcini reale etc.

Soluția problemei SE4 (vezi 3.1). Ecuația este o ecuație reciprocă. Împărțim la x^2, notăm $x + x^{-1} = y$, deci $x^2 + x^{-2} = y^2 - 2$ și obținem $y^2 + ay + b - 2 = 0$. Pentru a rezolva ecuația inițială va trebui să rezolvăm ecuația în y și apoi să rezolvăm două ecuații în x de forma $x^2 - yx + 1 = 0$. O astfel de ecuație are rădăcini reale dacă și numai dacă $y^2 - 4 \geqslant 0$, adică $y \notin (-2, 2)$.

Deci condiția necesară și suficientă ca ecuația din enunț să aibă cel puțin o rădăcină reală este ca ecuația $P(y) = y^2 + ay + b - 2 = 0$ să aibă cel puțin o rădăcină reală în afara intervalului $(-2, 2)$.

Să observăm că $P(2) = 2a + b + 2$, că $P(-2) = -2a + b + 2$, că semisuma rădăcinilor lui $P(y) = 0$ este $-a/2$ și că discriminantul ei este $a^2 - 4b + 8$.

Conform regulii semnului trinomului, ecuația $P(y) = 0$ are cel puțin o rădăcină reală în afara lui $(-2, 2)$ în următoarele trei cazuri: 1) $2a + b + 2 \leqslant 0$, 2) $-2a + b + 2 \leqslant 0$ și 3) ambele expresii de la 1) și 2) sînt > 0, $a^2 - 4b + 8 \geqslant 0$ [deci $P(y) = 0$ are două rădăcini reale, sau ambele în $(-\infty, -2)$, sau ambele în $(2, +\infty)$, sau ambele în $(-2, 2)$] și $-a/2 \notin (-2, 2)$ (eliminînd astfel ultimul caz din paranteza precedentă).

Scriind condiția cu discriminantul sub forma $b \leqslant (a^2/4) + 2$, putem figura porțiunea din planul ab, în care ecuația $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ are cel puțin o rădăcină reală (aceasta este porțiunea hașurată din fig. 4, care-și conține „marginile", numerele indicînd în care din cele trei cazuri ne aflăm în regiunea respectivă).

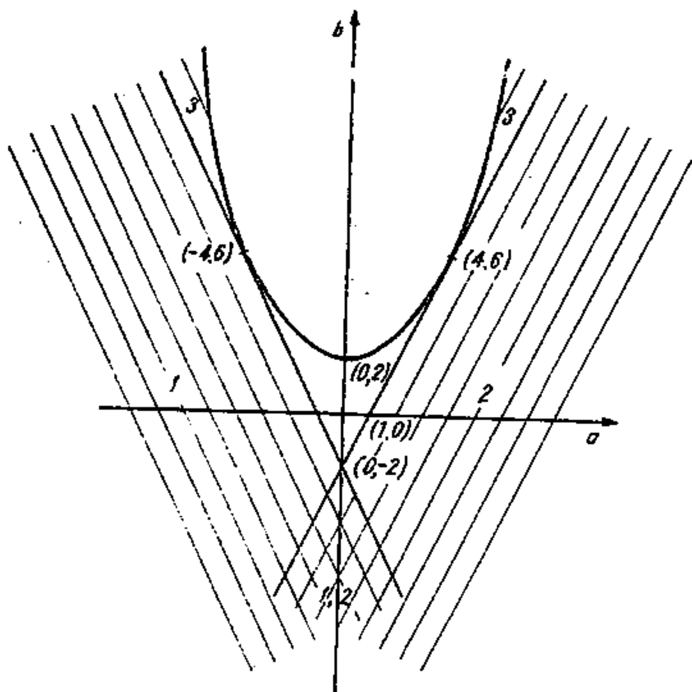


Fig. 4

Semiplanele 1 și 2 sînt neapărat în afara parabolei (dacă discriminantul ar fi negativ, trinomul ar fi peste tot pozitiv) și cum dreptele ce le determină o ating în (4, 6), respectiv (−4, 6), acestea nu pot fi decît tangente la ea.

Acum este ușor de văzut că minimul lui $a^2 + b^2$, cînd (a, b) parcurge zona hașurată, este pătratul distanței de la (0, 0) la una din cele două drepte, adică pătratul înălțimii unui triunghi dreptunghic de catete 1 și 2, care se calculează imediat a fi 4/5.

3.5. Soluțiile problemelor de geometrie în spațiu

Să începem cu una al cărei enunț sugerează calea spre soluție.

Soluția problemei PL3 (vezi 3.1). Trebuie arătat că $AD \cdot BC < AB \cdot CD + AC \cdot BD$, oricum am nota vîrfurile tetraedrului cu A, B, C, D, deci un fel de teoremă Ptolemeu în spațiu (este vorba de afirmația ce conține o inegalitate).

Să fixăm lungimile lui AB, AC, BC și ale lui BD, CD și să lăsăm AD variabilă; este ca și cum am desființa muchia AD și am reduce tetraedrul la două triunghiuri ABC, BCD articulate (prinse în balamale) de-a lungul lui BC (fig. 5). Dacă pozițiile lui A, B, C sînt fixate, D va descrie un cerc situat într-un plan π perpendicular pe BC, cu centrul în punctul comun M lui π și BC. Perpendiculara din A pe acel plan π va fi paralelă cu BC, deci conținută în planul ABC și va intersecta π într-un punct N situat pe perpendiculara în M la BC, dusă în planul ABC, punct N situat de aceeași parte a lui BC ca și A.

În mișcarea sa, D va atinge depărtarea maximă de A cînd acesta va atinge depărtarea maximă de N (deoarece oblicele cu picioare mai depărtate de piciorul perpendicularei sînt mai lungi). Aceasta corespunde unei situații în planul π (fig. 6). Deci AD va fi maxim cînd tetraedrul va degenera, D ajungînd în planul ABC, în semiplanul determinat de BC ce nu conține A.

Cu aceasta problema s-a redus la teorema lui Ptolemeu în plan, cu semnul $\leqslant$, însă nu într-un patrulater convex cum sîntem obișnuiți, ci pentru cazul mai general cînd A și D sînt în semiplane diferite determinate de BC. Să reamintim deci pe scurt demonstrația acestei teoreme, într-o variantă ce se potrivește cazului nostru.

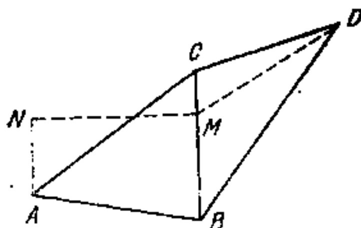


Fig. 5

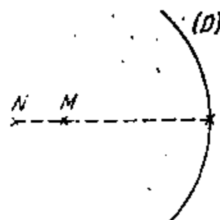


Fig. 6

Segmentul AD va intersecta una din semidreptele BC, CB, fie ea, de exemplu BC. Să considerăm o semidreaptă BX în interiorul unghiului ABD, așa ca $\measuredangle ABX = \measuredangle CBD$, deci și $\measuredangle XBD = \measuredangle ABC$ (fig. 7). Să alegem punctul Q pe această semidreaptă astfel încît

$BA/BQ = BC/BD$. Aceasta conduce şi la $\triangle ABQ \sim \triangle CBD$ şi la $\triangle ABC \sim \triangle QBD$, deci la $AQ/CD = AB/BC$, $DQ/AC = BD/BC$ şi apoi la $AD \leqslant AQ + QD = (AB \cdot CD + AC \cdot BD)/BC$, q.e.d.

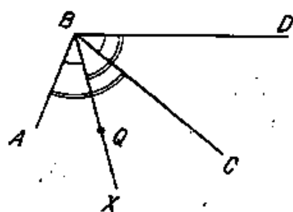


Fig. 7

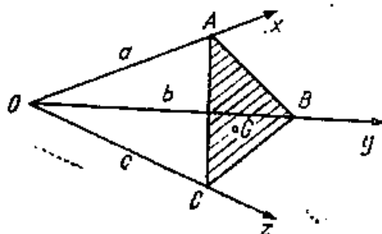


Fig. 8

Să prezentăm acum soluţia celeilalte probleme propuse de România.

Soluţia problemei RO2 (vezi 3.1). Analitic problema apare simplă. Volumul este proporţional cu abc (fig. 8). Ecuaţia planului ABC în coordonatele corespunzătoare triedrului este $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$. Dacă notăm cu m, n, p coordonatele lui G, presupuse, conform ipotezei, pozitive, atunci legătura dintre numerele pozitive a, b, c este exprimată prin relaţia ce spune că G se află pe planul ABC, adică $(m/a) + (n/b) + (p/c) = 1$.

În loc să căutăm să facem abc minim, vom face mnp/abc maxim. Suma numerelor pozitive m/a, n/b, p/c fiind constantă (egală cu 1), produsul lor va fi maxim cînd aceste numere vor fi egale, deci cînd $m/a = n/b = p/c = 1/3$, adică $a = 3m$, $b = 3n$, $c = 3p$.

Geometric, planul căutat va fi paralel cu planul care taie pe muchiile triedrului segmentele de lungime m, n, p, deci cu planul ce trece prin capetele diferite de O ale celor trei muchii ale paralelipipedului, ce are OG ca una din diagonalele spaţiale şi are feţele paralele cu feţele triedrului, ce încep în O. Putem observa şi că G va fi centrul de greutate al triunghiului ABC.

Un concurent pentru care acest gen de geometrie analitică este inaccesibil ar trebui să demonstreze geometric, pe figură, relaţia

$$\frac{m}{a} + \frac{n}{b} + \frac{p}{c} = 1.$$

Soluţia problemei BG6 (vezi 3.1). Să observăm întîi că $PA \cdot PA_1 = PB \cdot PB_1 = PC \cdot PC_1 = PD \cdot PD_1 = R^2 - PO^2$, unde R este raza sferei şi O centrul ei; aceasta rezultă aplicînd teorema asupra puterii punctului în cercurile de secţiune ale sferei cu planele OPA etc. Prin felul cum am scris relaţia am ţinut seama şi de faptul că P este ales în interiorul sferei. Relaţia din enunţ devine

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 4(R^2 - PO^2).$$

Acum să aplicăm teorema medianei de trei ori (fig. 9): (dacă $YT = TZ$, atunci $XY^2 + XZ^2 = 2XT^2 + 2YT^2$). Să notăm cu

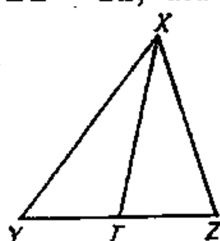


Fig. 9

G_{AB}, G_{CD} mijloacele segmentelor AB, CD şi cu G mijlocul lui $G_{AB}G_{CD}$. Obţinem

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 2PG_{AB}^2 + 2AG_{AB}^2 + $$
$$+ 2PG_{CD}^2 + 2CG_{CD}^2 = 4PG^2 + 4GG_{AB}^2 + 2AG_{AB}^2 + 2CG_{CD}^2,$$

suma ultimilor trei termeni fiind constantă în problema noastră. Relaţia din enunţ devine $4(PG^2 + PO^2) = K$ (constant) sau, notînd cu M mijlocul lui OG şi aplicînd iar teorema medianei, $8PM^2 + 8OM^2 = K_1$ şi deci $PM^2 = K_2$ (constant).

Locul geometric căutat va fi deci o sferă de centru M dacă $K_2 > 0$, va consta numai din punctul M dacă $K_2 = 0$ şi va fi vid dacă $K_2 < 0$. Trebuie observat şi că raţionamentul de pînă aici este „reversibil", adică alegînd un punct P pe locul geometric indicat şi folosind relaţiile stabilite, ajungem la concluzia că P satisface şi relaţia din enunţ, deci că locul geometric este „întreaga sferă" etc.

Problema permite însă să decidem şi în care din situaţiile enumerate mai sus ne aflăm. Să observăm pentru aceasta că O este unul din punctele locului geometric, deoarece pentru $P = O$ avem $AP = PA_1$ etc., deci locul nu poate fi vid.

Deci răspunsul precis este: dacă O este diferit de G, atunci locul geometric căutat este sfera de diametru OG, iar dacă $O = G$, acesta se reduce la punctul O.

Să observăm şi că G este centrul de greutate al tetraedrului.

Soluţia problemei YU4 (vezi 3.1). Cum arată oare un tetraedru cu proprietăţile din enunţ? Nu pare a fi uşor de răspuns, de aceea să începem, pentru a ne apropia de înţelegerea situaţiei, prin a considera un tetraedru regulat $ABCD$, ale cărui înălţimi, despre care

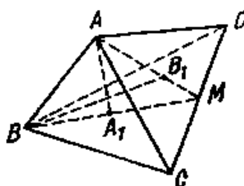


Fig. 10

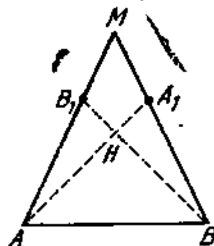


Fig. 11

ştim că au toate aceeaşi lungime, au lungimea 1. Picioarele A_1, ... ale înălţimilor sale sînt centrele feţelor respective (fig. 10). Să notăm cu M mijlocul lui CD şi să figurăm separat planul MAB (fig. 11).

Avem $MA_1/MB = 1/3 = MB_1/MA$, deci $HA_1/HA = A_1B_1/AB = MA_1/MB = 1/3$ şi $HA_1 = AA_1/4 = 1/4$.

Sfera de centru H şi rază 1/4 este tangentă la toate feţele tetraedrului.

Pe de altă parte, dacă o sferă de centru S şi rază r este conţinută în întregime în tetraedru, atunci volumul V_{ABCD} este suma a patru volume, primul fiind V_{SBCD}, egal cu 1/3 din produsul ariei feţei BCD cu înălţimea din S, înălţime care nu este mai mică decît raza r. Obţinem $V_{ABCD} \geq (1/3) \cdot 4rS_{BCD} = 4rV_{ABCD}$, deci $r \leq 1/4$, cu aceasta fiind încheiată demonstraţia faptului că valoarea maximă a razei unei sfere conţinute în întregime într-un tetraedru regulat de înălţime 1 este 1/4.

Dacă am reuşi acum să arătăm că în orice tetraedru, ale cărui înălţimi sînt toate ≥ 1, putem să includem o sferă de rază 1/4, problema ar fi rezolvată (răspunsul fiind 1/4). Pentru a dovedi această afirmaţie va fi suficient să indicăm, pentru orice tetraedru dat ce are toate înălţimile ≥ 1, un punct în interiorul său situat la distanţă de cel puţin 1/4 de oricare din feţele sale.

Se ştie, stabilindu-se printr-un raţionament ce are la bază figurile 10 şi 11, că în orice tetraedru segmentele ce unesc vîrfurile cu centrele de greutate ale feţelor opuse sînt concurente într-un punct, situat la 1/4 din lungimea fiecăruia din aceste segmente distanţă de centrul de greutate al feţei respective. Acest punct satisface cerinţele. Aceasta este evident din fig. 12, în care A este un vîrf, AA_1 este înălţimea respectivă, A' este centrul de greutate al feţei opuse, G este punctul de care a fost vorba, deci $A'G = AA'/4$. Paralela prin G la AA_1 este perpendiculară pe faţa opusă, ea taie A_1A' în Q, $GQ = AA_1/4 \geq 1/4$, GQ fiind distanţa de la G la acea faţă opusă.

Raţionamentul prezentat deschide şi posibilitatea de a stabili care sînt tetraedrele din enunţ în care nu încape nici o sferă de rază $\geq 1/4$.



Fig. 12

Următoarea problemă avea să stîrnească îndelungate discuţii în juriu.

Soluţia problemei FR2 (vezi 3.1). Să notăm triedrul cu $Oxyz$ şi să notăm cu α, β, γ unghiurile dintre planul cercului şi planele Oyz, Ozx, Oxy respectiv. Fie A, B, C intersecţiile planului cercului cu muchiile Ox, Oy, Oz ale triedrului. Fie I centrul cercului din problemă, care nu este altceva decît centrul cercului înscris în triunghiul ABC (fig. 13). Am dus şi

$AM \perp BC$ în planul ABC. Conform teoremei celor trei perpendiculare avem $OM \perp BC$, deci $\alpha = \sphericalangle OMA$ și $\sphericalangle OAM = 90° - \alpha$.

Am dus și $IA' \perp BC$. Avem $IA' \| AM$, deci IA' face cu OA unghiul $90° - \alpha$. Proiecția lui A' pe Ox este O; fie X proiecția lui I pe Ox. Din teorema asupra proiecțiilor rezultă $OX = \cos(90° - \alpha) = \sin \alpha$.

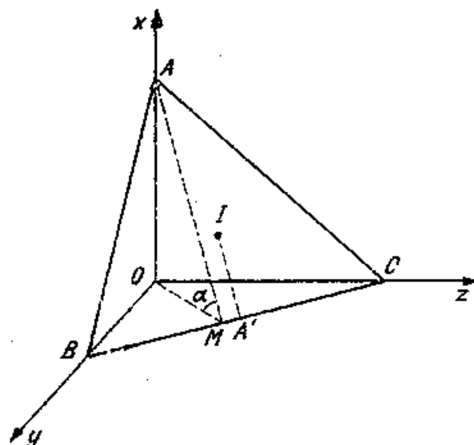


Fig. 13

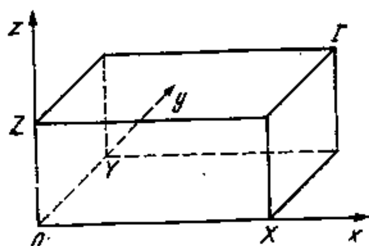


Fig. 14

După cum apare dintr-un paralelipiped dreptunghic ce are OI ca diagonală spațială (fig. 14), cunoașterea mărimilor OX, OY, OZ determină unic pe I. Care sînt deci toate tripletele ($\sin \alpha$, $\sin \beta$, $\sin \gamma$) posibile?

Fie $OP \perp ABC$. Să observăm că $\alpha = \sphericalangle xOP$, $\beta = \sphericalangle yOP$, $\gamma = \sphericalangle zOP$. Dintr-o figură analoagă cu fig. 14, însă cu P în loc de I, ne convingem că avem $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Deci

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 3 - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = 2.$$

Considerînd din nou fig. 14, vedem că

$$OI^2 = OX^2 + OY^2 + OZ^2 = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2.$$

Deci locul geometric căutat este o parte a suprafeței S a sferei de centru O și rază $\sqrt{2}$, evident situată în interiorul sau pe frontiera triedrului $Oxyz$.

Dar el nu este format din toată această porțiune! Într-adevăr, avem $\sin \alpha \leqslant 1$ etc., deci locul geometric este inclus în porțiunea lui S din triedrul $Oxyz$, din care s-au scos cele trei „sferturi de calote" ce corespund respectiv la situațiile $OX > 1$, $OY > 1$, $OZ > 1$ (fig. 15), deci în porțiunea indicată în figură prin hașuri.

Cum demonstrăm însă că această porţiune este într-adevăr tot locul geometric? Să alegem un punct J pe ea. Fie X_1, Y_1, Z_1 proiecţiile sale pe Ox, Oy, Oz. Vom avea $OX_1^2 + OY_1^2 + OZ_1^2 = 2, OX_1 \leq 1, OY_1 \leq 1, OZ_1 \leq 1$. Vom putea deci determina unghiurile α, β, γ cuprinse între $0°$ şi $90°$ aşa încît $\sin \alpha = OX_1$, $\sin \beta = OY_1$, $\sin \gamma = OZ_1$ şi vom obţine, ca mai sus, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

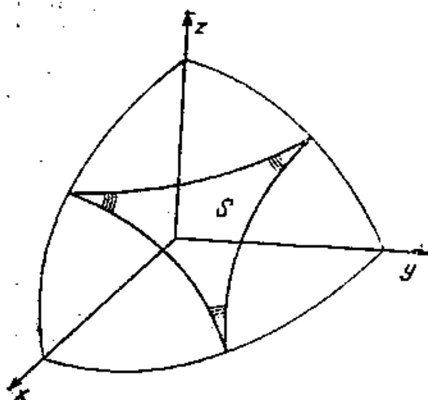


Fig. 15

Să construim un paralelipiped ca în fig. 14, notat cu $OX_2 \ldots I_2$, în care $OX_2 = \cos \alpha$, $OY_2 = \cos \beta$, $OZ_2 = \cos \gamma$ şi va rezulta $OI_2 = 1$, deci OI_2 va face cu Ox, Oy, Oz unghiurile α, β, γ. Să ducem un plan perpendicular pe OI_2. Dacă nici unul din unghiurile α, β, γ nu este $0°$ sau $90°$, acest plan va intersecta triedrul $Oxyz$ după un triunghi $A_2B_2C_2$. Dacă înlocuim acest plan cu unul paralel cu el, obţinem ca secţiune un triunghi ABC asemenea cu $A_2B_2C_2$, raportul de asemănare putînd fi ales arbitrar. Il alegem astfel încît raza cercului înscris în triunghiul ABC să fie 1. Planul ABC va face cu Oyz, Ozx Oxy, respectiv unghiurile α, β, γ. Repetînd raţionamentul de la început, arătăm că proiecţiile centrului I al cercului înscris în ABC pe Ox, Oy, Oz coincid cu X_1, Y_1, Z_1 respectiv, deci $I = J$.

Rămîne de considerat cazul cînd unul sau mai multe din unghiurile α, β, γ sînt $0°$ sau $90°$. Ne mulţumim să indicăm figurile respective (fig. 16).

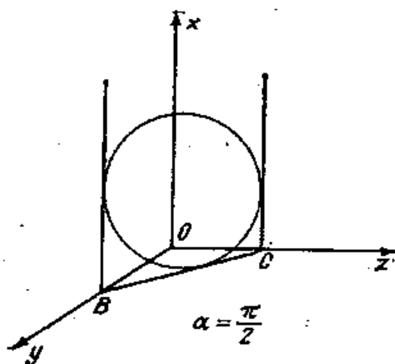


Fig. 16

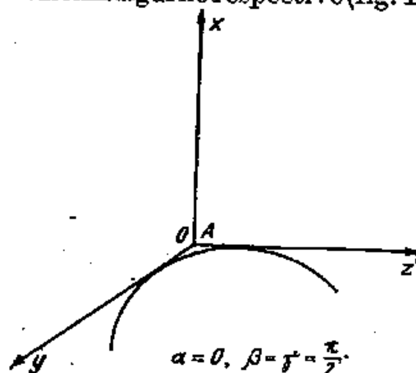


Fig. 16

Pentru a înțelege discuțiile din juriu pe marginea acestei probleme, să menționăm că soluția de mai sus a fost găsită cu ocazia scrierii acestei cărți. În ziua respectivă din iulie 1973 găsisem o altă soluție, parțială, prin care se arăta că locul geometric este inclus în mulțimea indicată prin hașuri în fig. 15, dar care nu conducea la o demonstrație a faptului că orice punct al acelei figuri aparține locului geometric. Nu am reușit să reconstitui acea soluție. Soluția autorilor începea prin a proiecta figura pe xOy, se obținea o elipsă etc.

Relativ la celelalte probleme prezentate în 3.5.

BG6 pare directă, o probă de tehnică. YU4 poate oferi surprize. RO2 nu are o soluție pur geometrică și nu avem elemente pentru a prevedea care va fi soarta unui concurent ce ar insista în a căuta o astfel de soluție. Față în față cu PL3 cunoașterea sau necunoașterea teoremei Ptolemeu, cu inegalitate, este un element ce determină esențial reacția unui concurent. Care ar fi ea în al doilea caz, ar descoperi el cu această ocazie teorema amintită, rămîn ca teme de reflecție.

3.6. Cele două probleme de geometrie plană

Ambele au în ele ceva deosebit.

Problema YU5 este un fel de analog geometric al problemelor de algebră ce reclamă „punerea în ecuație". Sau, altfel spus, apare ca o problemă „practică". Părerea asupra concurenților de la Olimpiada Internațională, justificată întotdeauna de aceștia, este că ei au depășit cu mult situațiile atît de răspîndite între elevi de a nu înțelege ce li se cere în asemenea cazuri și, în consecință, de a nu avea reacție în fața unor astfel de probleme foarte simple. Numai că YU5 nu s-a dovedit banală.

Soluția problemei YU5 (vezi 3.1). Fie A vîrful triunghiului echilateral ABC din care pleacă soldatul. Pentru a-și îndeplini misiunea, este necesar ca soldatul să treacă prin cel puțin unul din punctele situate la o distanță $< h/2$, unde h este înălțimea triunghiului, de vîrful B (deci pe arcul Γ_B corespunzător) și prin cel puțin unul din punctele situate la o distanță $< h/2$ de C. Este aceasta și suficient?

Deocamdată nu ne preocupăm de aceasta și rezolvăm întîi problema simplificată; o astfel de decizie, în „focul" concursului, este însă o dovadă de maturitate din partea unui concurent. În plus, pentru a fixa ideile, să presupunem că soldatul va vizita întîi Γ_B și apoi Γ_C. În această situație drumul său se va termina o dată cu atingerea lui Γ_C. Rezolvăm deci întîi următoarea problemă. Care este curba de lungime minimă ce începe în A, atinge Γ_B și se sfîrșește într-un punct din Γ_C (fig. 17)?

Astfel formulată, problema poate pune pe concurenţi într-o dificultate cu caracter principial, exprimabilă prin replica: „nu am lucrat nici odată cu curbe oarecare, nu ştiu ce este lungimea lor". Dar proprietatea elementară care spune că drumul cel mai scurt între două puncte este linia dreaptă arată imediat că este suficient să considerăm numai curbe formate din două segmente de dreaptă, dintre care al doilea situat pe o dreaptă ce trece prin C (dacă adăugăm constanta $h/2$ la lungimea drumului, $h/2$ fiind distanţa de la capătul drumului la C) (fig. 18).

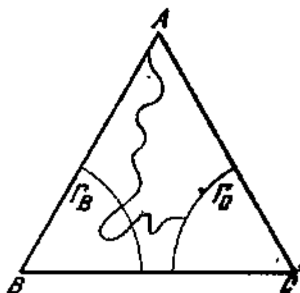


Fig. 17

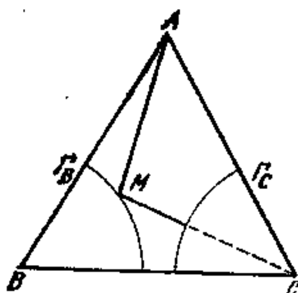


Fig. 18

Problema auxiliară devine deci: cum trebuie ales M pe Γ_B aşa ca $AM + MC$ să fie minim posibil?

Dacă în loc de Γ_B ar fi fost o dreaptă, ar fi fost o problemă cunoscută al cărei răspuns este cel din fig. 19, situaţie în care cele două unghiuri din figură au mărimi egale. Aceasta ne face să considerăm punctul M_0 de pe arcul Γ_B în care tangenta face unghiuri de mărimi egale cu AM_0, CM_0. Un astfel de punct este intersecţia arcului Γ_B cu bisectoarea unghiului B (fig. 20).

Dacă $M \in \Gamma_B$, $M \neq M_0$, atunci $AM + MC > AM' + M'C \geq AM_0 + M_0C$, prima conform cu $CM' < CM + MM'$, a doua

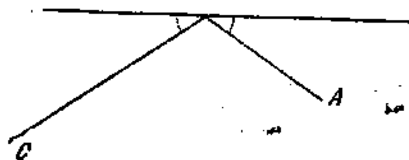


Fig. 19

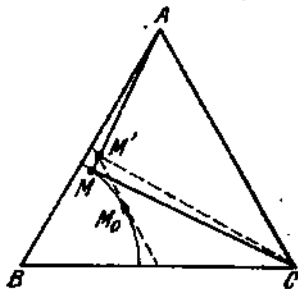


Fig. 20

conform problemei cunoscute menţionate mai înainte. Cu aceasta am arătat că M_0 este soluţia problemei auxiliare, deci că linia AM_0M_1, unde M_1 este intersecţia lui Γ_C cu M_0O, este cea mai scurtă dintre toate liniile ce pleacă din A, ating Γ_B şi se sfîrşesc pe Γ_C.

Să revenim la problema iniţială. Vom dovedi că linia AM_0M_1 este o soluţie şi a acestei probleme, deci că pentru orice punct P din interiorul sau de pe laturile triunghiului ABC există un punct Q, situat pe unul din segmentele AM_0, M_0M_1, pentru care $PQ < h/2$.

Să împărţim pentru aceasta ABC în 6 porţiuni, ce pot fi urmărite pe fig. 21: triunghiul AM_0N, patrulaterele BN_0M_0N, $M_0N_0N_1M_1$, $CN_1M_1N_2$ şi $M_0M_1N_2N_3$ şi triunghiul AM_0N_3, unde $M_0N \perp AB$, M_0N_0 şi M_1N_1 sînt perpendiculare pe BC, iar M_1N_2 şi M_0N_3 sînt perpendiculare pe AC.

Fig. 21

Pentru P în ANM_0 vom alege drept Q intersecţia lui AM_0 cu perpendiculara din P pe AB şi vom avea $PQ < NM_0 < BM_0 = h/2$, deci $PQ < h/2$.

Pentru P în BN_0M_0N vom alege $Q = M_0$ şi cum BN_0M_0N este inclus în cercul de diametru $BM_0 = h/2$, avem $PQ < h/2$.

Pentru P în $M_0N_0N_1M_1$ alegem Q drept intersecţia lui M_0M_1 cu perpendiculara din P pe BC şi avem $PQ < M_0N_0 < BM_0 = h/2$.

Pentru P în $CN_1M_1N_2$ alegem $Q = M_1$ şi rezultă $PQ < h/2$ la fel ca „în colţul B".

Pentru P în cele două porţiuni rămase alegem Q drept intersecţia perpendicularei din P pe AC cu linia AM_0M_1. Rezultă $PQ < M_0N_3 = h - BM_0 = h/2$.

Cu aceasta problema este complet rezolvată.

Observaţie. Dacă raza detectorului ar fi fost mai mică decît $h/2$, toată soluţia rămînea valabilă, cu excepţia ultimului alineat. Raţionamentul din acest ultim alineat poate fi rafinat aşa încît el să fie valabil şi pentru valori ale razei detectorului mai mici decît $h/2$, dar nu oricît de apropiate de 0.

Corectarea unor lucrări ce conţin soluţii ale acestei probleme apare dificilă şi cu atît mai mult „coordonarea" corespunzătoare.

Soluţia problemei CS6 (vezi 3.1). Această problemă are o soluţie foarte elementară pe care o vom schiţa numai, deoarece redactarea ei riguroasă, într-un anumit pas, în limbaj geometric, ar lua mult spaţiu. În 3.10 vom prezenta diverse moduri în care concurenţii au ocolit această dificultate.

Fie S un semiplan, d dreapta ce-l determină și O un punct pe d. Să notăm cu F_n mulțimea tuturor punctelor P pentru care există n vectori $v_1, \ldots, v_n$ de origine O, de lungimi 1, situați în S, așa ca $\overline{OP} = v_1 + \ldots + v_n$. Să observăm că F_1 este un semicerc de centru O și rază 1, cu cele două capete pe d (fig. 22). Să observăm și că F_{n+1} este reuniunea tuturor semicercurilor, de centre P, de raze 1, cu capetele pe paralela din P la d și situate în semiplanele generate de acea paralelă, ce nu conțin d, cînd P parcurge F_n (fig. 23). Se obțin astfel, pas cu pas, mulțimile $F_1, F_2, F_3, \ldots$ (fig. 24) și chiar formula



Fig. 22

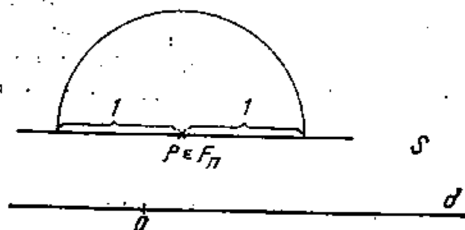
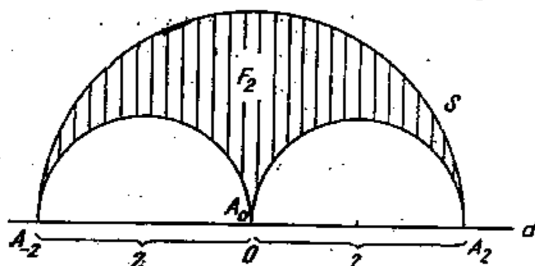


Fig. 23



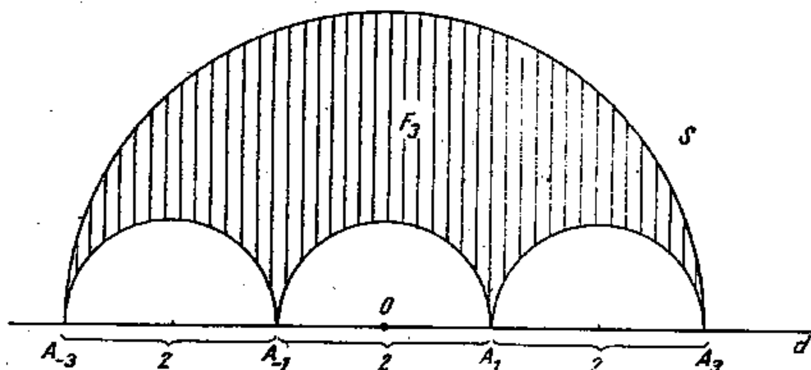


Fig. 24

generală, în care $d(P, Q)$ înseamnă distanța între punctele P și Q, iar A_n — punctul de pe d, la distanță $|n|$ de O, la dreapta lui O dacă $n > 0$ și la stînga dacă $n < 0$:

$$(1) \quad \begin{aligned} F_n = \{P | P \in S,\ d(0,\ P) \leq n,\ d(A_{-n+1},\ P) \geq \\ \geq 1,\ d(A_{-n+3},\ P) \geq 1, \ldots, d(A_{n-3},\ P) \geq 1,\ d(A_{n-1},\ P) \geq 1\}. \end{aligned}$$

Pentru n impar F_n nu are nici un punct în interiorul cercului de centru O și rază 1, deoarece printre condițiile din formula (1) apare și $d(A_0,\ P) \geq 1$, iar $A_0 = 0$. Cu aceasta problema ar fi rezolvată, dacă am adăuga o argumentare a faptului că, dacă F_n este dată de formula (1), atunci și F_{n+1} este dată de această formulă.

3.7. O problemă grea

Este vorba de SE3. Fiind singura în genul ei, spre deosebire, de exemplu, de cele de geometrie în spațiu care erau în număr de șase, urma să atragă asupra sa atenția juriului.

Rezolvarea ei s-a dovedit a lua timp, deși firul soluției este drept, natural, nu oferă variante, așa încît pînă la urmă s-ar părea că problema nu a fost pe atît de grea, pe cît de deosebită ca tip. Cu astfel de probleme se cîștigă cel mai mult din punct de vedere matematic la Olimpiada Internațională.

Soluția problemei SE3 (vezi 3.1). Să începem prin a observa că dacă am găsit un șir $b_1, \ldots, b_n$ care să satisfacă a) și b) din enunț cu $\leq$ în loc de $<$, dar c) cu $<$, atunci se poate găsi imediat unul ce satisface a), b), c) așa cum sînt ele formulate. Într-adevăr, se vor considera $b_1 + \varepsilon, \ldots, b_n + \varepsilon$ cu $\varepsilon > 0$ suficient de mic pentru ca valabilitatea lui c) să nu înceteze; în legătură cu păstrarea valabilității lui b) trebuie remarcat că $(b_{k+1} + \varepsilon)/(b_k + \varepsilon)$ se află în intervalul cu capetele în 1 și b_{k+1}/b_k și anume în interiorul lui dacă acesta este nedegenerat.

Deci vom rezolva problema cu $\leq$ în loc de $<$ în condițiile a), b).

Ce ne împiedică să luăm $b_k = a_k$? Evident că numai condiția b). Care este valoarea minimă a lui b_k, pentru un k dat, compatibilă cu condițiile a) și b)?

Avem $b_k \geq qb_{k-1} \geq \ldots \geq q^{k-1}b_1$, deci $b_k \geq qa_{k-1}, \ldots, b_k \geq q^{k-1}a_1$. Pe de altă parte,

$$b_k \geq qb_{k+1} \geq \ldots \geq q^{n-k}b_n, \text{ deci } b_k \geq qa_{k+1}, \ldots, b_k \geq q^{n-k}a_n.$$

Să încercăm deci să alegem $b_k = \max\{q^{|k-r|} a_r \mid r = 1, 2, \ldots, n\}$; mai mic nu se poate!

Pentru $r = k$ obținem $b_k \geq a_k$, deci valabilitatea lui a), cu $\leq$. Avem $qb_k = \max\{q^{|k-r|+1}a_r \mid r = 1, 2, \ldots, n\}$, iar

$$b_{k+1} = \max\{q^{|k+1-r|}a_r \mid r = 1, 2, \ldots, n\}$$

și

$$b_k/q = \max\{q^{|k-r|-1}a_r \mid r = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Cum $|k-r| - 1 \leq |k - r + 1| \leq |k - r| + 1$, obținem, ținînd seama că $q < 1$, $b_k/q \geq b_{k+1} \geq qb_k$, adică valabilitatea lui b), cu $\leq$.

Pentru a dovedi că b_k satisface și c) nu trebuie raționat chiar atît de „strîns". Este destul să scriem $b_k \leq \sum_{r=1}^{n} q^{|k-r|}a_r$ și să adunăm inegalitățile obținute. Acestea sînt, scrise desfășurat:

$$b_1 \leq a_1 + qa_2 + \ldots + q^{k-1}a_k + \ldots + q^{n-1}a_n$$

$$b_2 \leq qa_1 + a_2 + \ldots + q^{k-2}a_k + \ldots + q^{n-2}a_n$$

. . . .

$$b_k \leq q^{k-1}a_1 + q^{k-2}a_2 + \ldots + a_k + \ldots + q^{n-k}a_n$$

. . . .

$$b_n \leq q^{n-1}a_1 + q^{n-2}a_2 + \ldots + q^{n-k}a_k + \ldots + a_n$$

și adunate conduc la:

$$b_1 + \ldots + b_n \leq (1 + 2(q + \ldots + q^{n-1}))(a_1 + \ldots + a_n).$$

Soluția se încheie observînd că $q + \ldots + q^{n-1} < q/(1 - q)$, deci

$$1 + 2(q + \ldots + q^{n-1}) < 1 + 2q/(1 - q) = (1 + q)/(1 - q).$$

Observație. Să presupunem că $a_k = 1$ și toți ceilalți a_i sînt „aproape nuli". Atunci obținem $b_i = q^{|i-k|}$ plus o cantitate neglijabilă și inegalitatea de la c) revine pentru $k \leq n/2$ la $1 + 2(q + \ldots + q^{k-1}) + q^k + \ldots + q^{n-k} < (1 + q)/(1 - q)$. Aceasta ne arată că, dacă vrem ca valoarea coeficientului $(1 + q)/(1 - q)$ să nu depindă de n, nu o putem micșora, în ciuda faptului că ultima parte a soluției pare a utiliza la un moment dat evaluarea în general grosolană $\max(c_1, \ldots, c_s) < \sum_{i=1}^{s} c_i$ pentru $c_i > 0$.

3.8. O problemă cu o evoluție neașteptată

Este vorba de singura ce a mai rămas, GB1. Comitetul de organizare nu a avut la dispoziție o soluție a ei și în plus delegatul Angliei a sosit mai tîrziu. Evident că, din moment ce problema cerea să se determine numărul de elemente ale unei mulțimi finite, pînă la urmă, „cu răbdare" sau cu un calculator (utilizarea lui nu este însă permisă concurenților), s-ar fi ajuns la o soluție. Dar nu am reușit să găsim o soluție care să facă să merite ca această problemă să fie propusă în concurs.

Să discutăm puțin problema. Printre cele 28 de numere șapte sînt de forma p^2 și celelalte 21 de forma pq cu $p \neq q$. Dacă p^2 apare într-una din cele șapte submulțimi de patru numere, atunci, conform condiției din enunț, în acea submulțime trebuie să existe încă două numere de forma pq, pr cu p, q, r evident distincți. Al patrulea număr rezultă a fi sau ps cu $s \notin \{p, q, r\}$, sau qr. Deci nu pot exista două pătrate perfecte în aceeași submulțime de patru. În consecință, fiecare din cele șapte submulțimi de patru elemente ale unei împărțiri cu proprietățile din enunț este sau de forma $\{p^2, pq, pr, ps\}$, sau de forma $\{p^2, pq, pr, qr\}$ (nu se poate ca aceasta să nu conțină nici un pătrat perfect).

Din cauza acestui „sau" nu se întrevede o cale de continuare a soluției care să nu intre în calcule greoaie. În această situație am propus juriului următoarele două variante:

Problema GB1'. *Același enunț cu* GB1, *dar presupunînd că numerele din oricare din submulțimile de patru elemente sînt prime între ele în ansamblu (nu există nici un divizor comun* > 1 *al celor patru).*

Problema GB1". *Același enunț cu* GB1, *dar presupunînd că toate numerele din fiecare din submulțimile de patru elemente au un divizor comun.*

Soluția problemei GB1' (vezi 3.1 și 3.8). Fie $P = \{p_0, p_1, \ldots, p_6\}$. Să considerăm o descompunere a lui C cu proprietățile din enunț. Fiecare din cele șapte submulțimi de cîte patru elemente ale acestei descompuneri este de forma $\{p^2, pq, pr, qr\}$ cu p, q, r distincte, în P.

Să notăm cu $M_1 = \{p_0^2, p_0q_1, p_0q_2, q_1q_2\}$, $M_2 = \{q_3^2, q_3p_0, q_3q_4, p_0q_4\}$, $M_3 = \{q_5^2, q_5p_0, q_5q_6, p_0q_5\}$ cele trei submulțimi ale descompunerii ce conțin multipli de p_0. Să observăm că $(q_1, \ldots, q_6)$ este o permutare a lui $(p_1, \ldots, p_6)$. Însă deocamdată notațiile q_i sînt ambigue: putem permuta q_1 cu q_2 sau putem permuta simultan q_3 cu q_5 și q_4 cu q_6, ceea ce revine la a permuta M_2 cu M_3, și situația va fi aceeași.

Să considerăm acum submulţimea descompunerii ce conţine q_3q_5 (acest element, deci şi submulţimea considerată, este bine determinat, deoarece el nu este afectat de nici una din permutările menţionate). Acea submulţime nu mai poate conţine p_0^2, q_3^2 şi q_5^2 şi nici q_4^2 sau q_6^2 (ar conţine atunci şi q_3q_4, respectiv q_5q_6). Deci ea va conţine q_1^2 sau q_2^2. Putem aranja notaţia aşa încît acesta să fie q_1^2; cu aceasta ambiguitatea relativă la q_1, q_2 este înlăturată, singura ambiguitate rămînînd cea legată de posibilitatea permutării simultane a lui q_3 cu q_5 şi a lui q_4 cu q_6. Submulţimea considerată va fi deci

$$M_4 = \{q_1^2, q_1q_3, q_1q_5, q_3q_5\}.$$

Pentru a urmări mai uşor cele ce urmează vom face un tabel în care vom scrie, pe linii, mulţimile deja determinate ale descompunerii. De exemplu, în loc de M_4 vom scrie 1, 3, 5 (3 se poate permuta cu 5, dar 1 pe primul loc înseamnă $q_1^2 \in M_4$). Anume

0, 1, 2

3, 0, 4

5, 0, 6

1, 3, 5

Deci se cunoaşte poziţia pentru toţi multiplii de p_0, pentru cîte cinci din multiplii lui q_1, q_3, q_5, pentru cîte doi din multiplii lui q_2, q_4, q_6.

Va exista o altă mulţime, notată cu M_5, a acestei descompuneri, ce va conţine cei doi multipli de q_1 rămaşi, anume q_1q_4 şi q_1q_6, mulţime ce nu mai poate conţine pe q_1^2, deci aceasta va conţine q_4^2 sau q_6^2. Ţinînd seama de ambiguitatea de notaţie rămasă, putem aranja notaţiile aşa încît această mulţime să conţină q_4^2, deci $M_5 = \{q_4^2, q_4q_1, q_4q_6, q_1q_6\}$, şi tabelul de mai sus se completează cu linia 4, 1, 6.

În acest moment este stabilit faptul că fiecare descompunere a lui C cu proprietăţile din enunţ determină unic o permutare a mulţimii de şase elemente ce se obţine scoţînd p_0 din P. Dacă am şti că o astfel de descompunere există, atunci se observă imediat că dacă i se aplică una din permutările indicate, se obţine tot o astfel de descompunere şi ar rezulta că numărul descompunerilor cerut de problemă este egal cu numărul permutărilor de 6 obiecte, deci cu $6! = 720$.

Pentru a dovedi existenţa unei astfel de descompuneri va trebui arătată posibilitatea completării tabelului întocmit. Aceasta se face

printr-un raţionament analog, completarea necesară fiind

6, 2, 3

2, 4, 5,

adică

$$M_6 = \{q_6^2, q_6q_2, q_6q_3, q_2q_3\}, \ M_7 = \{q_2^2, q_2q_4, q_3q_5, q_4q_5\}.$$

Cu aceasta problema este complet rezolvată.

Soluţia problemei GB1″ (vezi 3.1 şi 3.8). Să fixăm o descompunere a lui C cu proprietăţile din enunţ. Orice submulţime de patru elemente din această descompunere este de forma $\{p^2, pq, pr, ps\}$ cu p, q, r, s în P, distincţi doi cîte doi.

Deci pq, pentru $p, q \in P$, aparţine sau submulţimii ce conţine p^2, sau celei ce conţine q^2. În primul caz se va scrie $p < q$, în al doilea $q < p$. Exact una din cele două relaţii are loc.

Pentru fiecare $p \in P$ se consideră cele trei elemente q, r, s pentru care $p < q, p < r, p < s$. Sînt posibile două cazuri: 1) cele trei elemente pot fi notate astfel încît $q < r, r < s, s < q$ (notaţia fiind precizată abstracţie făcînd de o permutare circulară a elementelor $q, r, s, \ldots$) şi 2) cele trei elemente pot fi notate astfel încît $q < r, q < s, r < s$ (notaţia fiind acum bine precizată).

a) Să presupunem că toţi $p \in P$ sînt în cazul 1.

Să fixăm un element $p_0 \in P$. Să notăm cu p_1, p_2, p_3 elementele q pentru care $p < q$, aranjate astfel încît (aceasta se poate face în trei moduri) $p_1 < p_2, p_2 < p_3, p_3 < p_1$.

Să notăm cu p_4 şi p_5 celelalte două elemente q pentru care $p_1 < q$ aranjate astfel încît (ţinînd seamă de faptul că p_1 este în cazul 1 şi $p_1 < p_2$) $p_2 < p_4, p_4 < p_5, p_5 < p_2$. Să notăm cu p_6 elementul din P rămas.

Să întocmim un tabel, într-un fel analog cu cel de la rezolvarea problemei GB1′, în care pe fiecare linie să scriem în stînga indicele cîte unui element din p şi apoi indicii celor trei elemente q pentru care $p < q$. Cîtă vreme liniile 0 şi 1 sînt complete, cele trei elemente q pentru care $q < p_0$ şi cele trei q pentru care $q < p_1$ sînt şi ele determinate şi sînt trecute în tabel, tabel care este deocamdată incomplet:

0 ; 1, 2, 3

1 ; 2, 4, 5

2 ; 3, 4

3 ; 1

4 ; 0, 5

5 ; 0

6 ; 0, 1

Acum se poate completa și linia 4, ca urmare a raționamentului: p_4 este în cazul 1 și $p_5 < p_0$, deci pe linia 4 trebuie să mai apară indicele unui element q pentru care $p_0 < q$ și $p_4 < q$ și, analizînd tabelul, se constată că numai p_3 satisface aceste condiții (liniile 1 și 2 arată că, de exemplu, $p_1 < p_4$, deci $p_4 < p_1$ este fals).

Odată această concluzie obținută, se poate completa tabelul cu cea de-a treia situație $q < p_4$, anume $q = p_6$, apoi cu cele trei situații $r < p_6$, anume $r = p_2, p_3, p_5$, apoi cu cea de-a treia situație $s < p_2$, anume $s = p_5$ și, în fine, cu cea de-a treia situație $t < p_5$, anume $t = p_3$. Se obține tabelul următor, care arată că există descompuneri relativ la care toți $p \in P$ sînt în cazul 1; am scris pe fiecare linie ultimele trei numere în ordinea ciclică ce corespunde cazului 1, de exemplu pe linia 2 avem $p_3 < p_6$, $p_6 < p_4$, $p_4 < p_3$:

0; 1, 2, 3
1; 2, 4, 5
2; 3, 6, 4
3; 1, 5, 6
4; 0, 3, 5
5; 0, 2, 6
6; 0, 1, 4

Să nu ne grăbim însă cu concluzia că sînt atîtea descompuneri cîte permutări ale celor șase elemente $p_1, \ldots, p_6$ există (vezi rezolvarea problemei precedente GB1'). Aceasta nu este adevărat, deoarece ambiguitatea de notație relativă la p_1, p_2, p_3 nu a fost înlăturată și nici nu poate fi. Dacă notăm pe p_1 cu p_2, pe p_2 cu p_3 și pe p_3 cu p_1 și apoi, urmărind tabelul pentru a justifica decizia, notăm pe p_4 cu p_6, pe p_5 cu p_4 și pe p_6 cu p_5, obținem același tabel. Această schimbare de notație se poate repeta, dar după efectuarea ei de trei ori se revine la notația inițială. Deci permutările celor 6 obiecte corespund cîte 3 la aceeași descompunere (și numai cîte 3) și deci există $6!/3 = 240$ descompuneri în care toți $p \in P$ sînt în cazul 1.

b) Să presupunem că nu toți $p \in P$ sînt în cazul 1. Fie $p_1 \in P$, relativ la o descompunere dată, în cazul 2. Să notăm cu p_2, p_3, p_4 elementele unic determinate pentru care $p_1 < p_2$, $p_1 < p_3$, $p_1 < p_4$, $p_2 < p_3$, $p_2 < p_4$, $p_3 < p_4$. Deci $p_4 < q$ este fals pentru $q = p_1$, p_2, p_3 și cum relația trebuie să fie adevărată pentru trei elemente q, acele elemente vor fi cele trei ce nu au fost încă notate. Vom deosebi două situații.

b$_1$) p_4 este și el în cazul 2. Atunci notațiile pot fi alese astfel încît $p_5 < p_6$, $p_5 < p_7$, $p_6 < p_7$ pentru elementele ce nu fuseseră notate

și obținem un tabel incomplet „destul de bogat", tabel ce are aceeași semnificație ca și cel de mai înainte :

1 ; 2, 3, 4
2 ; 3, 4
3 ; 4
4 ; 5, 6, 7
5 ; 6, 7
6 ; 7
7 ;

Acesta se completează imediat cu cele trei elemente q pentru care $q < p_1$, anume $q = p_5, p_6, p_7$, apoi cu celelalte două r pentru care $r < p_5$, anume $r = p_2, p_3$, apoi cu celelalte două s pentru care $s < p_2$, anume $s = p_6, p_7$, apoi cu ultimul pentru care avem $< p_6$, anume p_3 și în fine cu relația $p_7 < p_3$, ultima rămasă...

Se obține un tabel pe care nu-l mai scriem, deoarece corespunde unei situații în care toți $p \in P$ sînt în cazul 2 și care poate fi descrisă mai simplu considerînd ordinea ciclică $p_1, \ldots, p_7$ și remarcînd că pentru un p dat cei trei q, pentru care $p < q$, sînt cei trei care „urmează imediat după el".

Elementul notat p_1 poate fi fixat, iar $p_2, \ldots, p_7$, ale căror notații sînt bine determinate o dată ce s-a dat descompunerea, reprezintă o permutare oarecare a celorlalte 6. Deci există $6! = 720$ de descompuneri în care toți $p \in P$ sînt în cazul 2.

b_2) p_4 este în cazul 1. Și în acest caz elementele ce nu au fost notate vor fi reprezentate prin p_5, p_6, p_7, dar deocamdată notațiile lor nu rezultă unic. Pentru a evita această situație se observă că $p_2 < p_3$, $p_2 < p_4$, dar $p_2 < p_1$ este fals. Sînt trei elemente q pentru care $p_1 < q$, al treilea va fi deci unul dintre elementele p_5, p_6, p_7. Să-l notăm cu p_5 și acum notațiile p_6, p_7 vor fi unic determinate prin $p_5 < p_6$, $p_6 < p_7$, $p_7 < p_5$. Se obține tabelul, în care s-au trecut și acei q pentru care $q < p_1$, și acei r pentru care $r < p_2$ (tabel deocamdată parțial) :

1 ; 2, 3, 4
2 ; 3, 4, 5
3 ; 4
4 ; 5, 6, 7
5 ; 1, 6
6 ; 1, 2, 7
7 ; 1, 2, 5

Acest tabel se completează ușor, întîi observînd că rezultă $p_3 < p_6$ și $p_3 < p_7$ (ca urmare a faptului că ultimele două linii sînt complete) și apoi $p_5 < p_3$. Deci

1; 2, 3, 4
2; 3, 4, 5
3; 4, 6, 7
4; 5, 6, 7
5; 1, 3, 6
6; 1, 2, 7
7; 1, 2, 5

Spre deosebire de situațiile de la a) și b_1), în care p_1 fusese ales arbitrar (ceea ce era posibil deoarece toți $p \in P$ erau în același caz, 1 sau 2), în situația de aici nu vom mai fixa pe p_1; acesta a fost luat drept unul în cazul 2, știind însă că există și elemente în cazul 1.

Deci vom afirma că orice permutare a celor șapte elemente $p_1, \ldots, p_7$ determină o descompunere cu proprietățile din enunț, relativ la care există și elemente în P în cazul 1 și elemente în cazul 2 și că orice astfel de descompunere se obține pe această cale.

Vom obține, analog cu cazul a, un număr de astfel de descompuneri egal cu $7!/k = 5040/k$, unde k este definit drept numărul de permutări ce determină aceeași descompunere, sau, ceea ce este tot una, numărul de permutări ce lasă pe loc descompunerea din tabelul de mai sus.

Să determinăm, în încheiere, acel număr k. Din tabel se vede că p_1, p_3, p_6 sînt în cazul 2 și p_2, p_4, p_5, p_7 sînt în cazul 1. Dacă p_1 rămîne cu aceeași notație, s-a văzut că și celelalte rămîn. Dacă vom nota p_1 cu p_3, atunci (p_2, p_3, p_4 fiind unic determinați de p_1), p_2 va trebui notat cu p_4, p_3 cu p_6 și p_4 cu p_7. Deoarece p_3 a fost notat p_6, deducem analog că p_6 va trebui notat p_1, p_7 cu p_2 și p_5 rămîne să fie notat tot cu p_5 (nu este de mirare, p_5 este singurul în cazul 1 pentru care toți cei trei q cu $p_5 < q$ sînt în cazul 2). Se obține permutarea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 7 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ care lasă pe loc descompunerea considerată.

Analog, notînd p_1 cu p_6, se obține faptul că și $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ are această proprietate. Altele, în afară de permutarea identică, nu pot lăsa pe loc descompunerea, deoarece p_1 nu poate fi dus decît într-un element în cazul 2.

Deci $k = 3$ și în total se obțin $240 + 720 + 1680 = 2640$ descompuneri.

Evident că varianta GB1″ este cam prea mult pentru Olimpiada Internațională, ținînd seamă și de timpul de concurs. Dar GB1′ pare potrivită, mai cu seamă că este și singura de combinatorică din listă.

La sosirea sa la Moscova, șeful delegației Angliei a confirmat faptul că autorii problemei au avut în vedere nu GB1, ci GB1′, dar în redactare s-a omis condiția suplimentară respectivă.

Cu aceasta s-au prezentat rezolvările tuturor problemelor propuse juriului la a 15-a Olimpiadă Internațională de Matematică.

Este de observat, și sperăm că din prezentarea dată a rezultat aceasta, că pentru un șef de delegație nu este suficient să rezolve aceste probleme indiferent prin ce mijloace, punînd în mișcare toate cunoștințele sale, toată experiența sa matematică. Este indicat ca el să nu piardă nici un moment din vedere întrebările : cum va gîndi și cum va proceda un concurent?, care este calea cea mai naturală, chiar cea mai elementară, spre soluție? Evident că se pot aștepta soluții de excepție din partea concurenților, acestea contribuind foarte mult la reușita unei olimpiade, dar numărul lor este de regulă mic în comparație cu numărul total de „unități concurent × problemă".

3.9. Discuțiile din juriu pînă la hotărîrea celor șase probleme de concurs

Unul din principiile ce se cer respectate este și cel de a da probleme, pe cît posibil, din domenii cît mai diferite ale matematicii. Atitudinea juriului relativ la o anumită problemă din listă este influențată, pe lîngă trăsăturile în sine ale acelei probleme, și de acest element.

Cu tot efortul depus de a pune în drepturi problema GB1, materializat în special prin varianta GB1′, aceasta nu a avut priză. Așa se întîmplă de regulă cu problemele, care ajung în discuția la care ne referim, incomplet precizate ca enunț sau ca soluție.

Destul de repede, în urma unor propuneri individuale, dar aprobate fiecare cu o majoritate apropiată de unanimitate, au fost alese pentru concurs problemele PL2, CS6, YU5 și SE3, fapt explicabil pe baza comentariilor din 3.3, 3.6, 3.7. Adăugăm și argumentul că pentru CS6, ca și pentru PL2 de altfel, deși exista o soluție, se prevedea apariția altor soluții interesante din partea concurenților.

La fel a fost aleasă și problema SE4, spre surprinderea unor delegații care o considerau drept școlărească. Este într-adevăr școlă-

rească pentru concurenții unei țări în care studiul aprofundat al trinomului de gradul 2 etc. face parte din programa școlară. Dar tot așa RO2 și chiar BG6 pot apărea școlărești pentru concurenții unei țări în ale cărei licee se insistă mult pe geometrie analitică, pe teorema asupra maximului unui produs în care suma termenilor este fixă etc.

Discuții îndelungate au avut loc în legătură cu alegerea celei de a șasea probleme de concurs. Au rămas în discuție BG6 și FR2. Pentru FR2 nimeni dintre participanții la discuție (membrii juriului, coordonatori) n-a avut la dispoziție altă soluție completă convingătoare în afara soluției autorilor ce utiliza proprietăți ale elipsei, depășind astfel programa analitică a multor țări participante. Este adevărat însă că FR2 este o problemă deosebit de frumoasă.

Dorința de a se întruni o majoritate de 2/3 a împiedicat decizia. Dintre afirmațiile din discuții menționăm: „Să nu le cerem concurenților soluția completă", „Este o ofensă la adresa elevilor noștri să le propunem o problemă și să nu le cerem soluția completă!" „De ce votați împotriva unei probleme atît de frumoase ca FR2?" (un reprezentant al țării gazdă), „Frumoasă, dar cum o vom coordona?".

S-au trecut în revistă ca posibile multe din celelalte probleme de pe listă, fără a putea impune vreuna din acestea. S-a propus ca ieșire din impas alegerea unei probleme dintre cele trimise de delegații, înainte de Olimpiadă, comitetului de organizare, deci dintre cele nealese de comitet. Și această propunere a fost acceptată, fapt nemaiîntîlnit de atunci la Olimpiada Internațională de Matematică.

Problema ce a devenit astfel problemă de concurs a fost următoarea.

PL1. *Fie M o mulțime de funcții definite pe R cu valori în R, fiecare de forma $f(x) = ax + b$ cu $a \neq 0$, astfel încît:*

a) *$f \in M$, $g \in M$ implică $f \circ g \in M$;*

b) *$f \in M$ implică $f^{-1} \in M$, unde f^{-1} este funcția inversă funcției f;*

c) *pentru orice $f \in M$ există un $x \in R$ astfel ca $f(x) = x$.*

Să se demonstreze că există $x_0 \in R$ așa ca $f(x_0) = x_0$ pentru orice $f \in M$.

Această problemă nu a fost nici aleasă la întîmplare și nici în urma examinării în juriu a tuturor problemelor lăsate de o parte de comitetul de organizare; comitetul renunțase la ea, după ce o avusese în vedere, nefiind sigur că ea nu depășește programele unor țări participante.

De altfel, în legătură cu formularea ei precisă au avut loc discuții în juriu sensibil mai lungi decît relativ la alte probleme; a existat și o propunere de a utiliza noțiunea de grup în enunțul ei.

Multe delegații, ce-și știau concurenții drept „docți“ în direcția matematicii moderne, au aderat fără rezervă la includerea acestei probleme pe lista celor șase de concurs.

Soluția problemei PL1. Se observă că dacă $f \in M$ și dacă se scrie, pentru mai multă precizie, $f(x) = a_f x + b_f$, atunci $a_f = 1$ implică $b_f = 0$, cu alte cuvinte $a_f \neq 1$ pentru orice $f \in M$ diferită de aplicația identică (aplicație ce se află în M ca urmare a condițiilor a, b). Într-adevăr, dacă $a_f = 1$, atunci $f(x) = x$ revine la $x + b_f = x$ etc.

Pentru fiecare $f \in M$, cu excepția aplicației identice pentru care orice x satisface $f(x) = x$, există un singur $x \in R$, ce se va nota cu x_f, pentru care $f(x) = x$, anume $x_f = b_f/(1 - a_f)$.

Dacă se va dovedi că pentru orice f și g din M, dintre care nici una nu este aplicația identică, avem $x_f = x_g$, atunci problema va fi rezolvată, prin alegerea lui x_0 drept x_f pentru un f ales oricum în M, diferit de aplicația identică.

Pentru a dovedi că $x_f = x_g$ va trebui găsită o modalitate ca, aplicînd proprietățile a, b, c din enunț, să se ajungă la o relație între două funcții f, g alese la întîmplare în M.

Să determinăm întîi f^{-1}. Avem $f^{-1}(x) = a_f^{-1}x - b_f a_f^{-1}$.

Acum se poate stabili următorul fapt. Dacă $f, g \in M$ și $a_f = a_g$, atunci $b_f = b_g$(deci $f = g$). Într-adevăr, $h = f^{-1} \circ g$ va fi în M, $f^{-1}(g(x)) = a_f^{-1}(a_g x + b_g) - b_f a_f^{-1} = x + a_f^{-1}(b_g - b_f)$, deci $a_h = 1$ și rezultă conform celor stabilite la început că $b_h = 0$, adică $b_g = b_f$.

Să considerăm acum f, g în M, diferite de aplicația identică. Se pot considera funcțiile $h = f \circ g$ și $k = g \circ f$ din M (vezi a). Avem $f(g(x)) = a_f a_g x + a_f b_g + b_f$, deci $a_h = a_f a_g$, $b_h = a_f b_g + b_f$. Inversînd rolurile lui f și g, obținem întîi $a_k = a_f a_g = a_h$, deci conform celor dovedite înainte va rezulta $b_h = b_k$, adică $a_f b_g + b_f = a_g b_f + b_g$, $b_h(1 - a_g) = b_g(1 - a_g)$ și, în fine, $b_f/(1 - a_f) = b_g/(1 - a_g)$, $x_f = x_g$, ceea ce, după cum s-a observat, încheie rezolvarea.

Juriul a hotărît apoi ca în prima zi de concurs să se dea problemele CS6, PL2, SE4, în această ordine, iar în a doua zi — problemele YU5, PL1, SE3, în această ordine. Conform tradiției Olimpiadei, din acest moment aceste probleme se vor numi, în această ordine: problemele *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*. Așa vor apărea pe programele de coordonare, pe tabelele de rezultate etc.

Tot în tradiția Olimpiadei este și faptul de a propune două probleme ușoare, două medii și două grele; evident că aceste denumiri sînt uneori infirmate de rezultate. Ordonarea problemelor în cadrul fiecărei zile de concurs, votată în juriu, are și următoarea semnificație: problemele *1* și *4* se consideră ușoare, *2* și *5* — medii, *3* și *6* — grele.

Prin votul juriului se stabilește apoi numărul de puncte ce se acordă pentru rezolvarea completă a fiecăreia dintre problemele propuse (număr ce nu poate fi depășit prin „soluții excepționale"). În cazul de față hotărîrea a fost: *1*—6 puncte, *2*—6 puncte, *3*—8 puncte; *4*—6 puncte, *5*—6 puncte, *6*—8 puncte.

Și aici, cele 8 puncte acordate problemei *3* au surprins pe unii.

După redactarea acestor probleme în cele patru limbi oficiale și aprobarea celor patru texte de juriu (o grijă deosebită acordîndu-se echivalenței lor), fiecare delegație a tradus, pe baza oricăreia din cele patru versiuni, problemele în limba respectivă și a bătut la mașină cele două pagini cu probleme, corespunzătoare celor două zile. Deci răspunderea pentru corectitudinea listelor de probleme ce vor fi înmînate în zilele de concurs elevilor unei delegații cade în exclusivitate asupra șefului și secundului acelei delegații.

În cazul în care cele două foi bătute la mașină se multiplică, la xerox de exemplu, șeful și secundul delegației controlează personal fidelitatea copiilor și le introduc ei înșiși în plicurile respective. În cazul delegației țării noastre, pe aceste plicuri se scrie RO1, ..., RO8, iar elevii primesc aceste indicative în ordine alfabetică.

Aceste episoade nu au pus niciodată probleme deosebite și nu vom mai reveni la ele.

3.10. Soluții deosebite descoperite de concurenți și coordonarea

Șeful și secundul unei delegații cunosc soluțiile date problemelor de concurenții țării lor în cele mai mici detalii. Timpul însă nu permite discuții personale prelungite cu șefii sau secunzii altor delegații, așa încît singura sursă demnă de luat în considerare de a obține informații precise asupra soluțiilor date de concurenții altor țări sînt discuțiile din ultima ședință a juriului în legătură cu acordarea de premii speciale pentru soluții deosebite. Arbitrajele din juriu ale unor divergențe între coordonatori și delegații vizează de regulă soluții incomplete; nu s-a înregistrat nici un caz în care o echipă de coordonatori să respingă o rezolvare corectă.

În legătură cu problema *1* (CS6, vezi 3.1) sînt de remarcat cîteva din soluțiile date de concurenți.

Soluție a problemei 1 (CS6, vezi 3.1). Afirmația se va demonstra prin inducție. Pentru $n = 1$ este banală. Să arătăm că este adevărată pentru $n + 2$ știind că este adevărată pentru n.

Să notăm semiplanul cu S, dreapta ce-l mărginește cu d, punctul de pe ea cu O; să notăm cu a una din semidreptele de pe d ce pleacă din O. Să notăm cei $n + 2$ vectori cu $v_1, \ldots, v_{n+2}$, astfel încît $\sphericalangle(v_i, a)$ să fie crescător în i (fig 25)

Fie $u = v_1 + v_{n+2}$, $w = v_2 + \ldots + v_{n+1}$, $v = v_1 + \ldots + v_{n+2}$, deci $v = w + u$. Se știe din ipoteza de inducție că lungimea lui w este $\geqslant 1$.

Dacă $u = 0$, atunci $v = w$ etc.

Dacă $u \neq 0$, acesta este dirijat pe bisectoarea $\sphericalangle(v_1, v_{n+2})$. Vectorul w este dirijat în interiorul acestui unghi (sau pe o latură), deci $\alpha = \sphericalangle(u, w) < 90°$. Se obține fig. 26, în care lungimea lui v rezultă

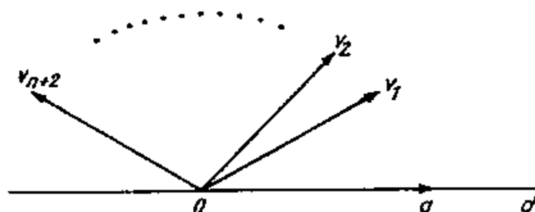


Fig. 25

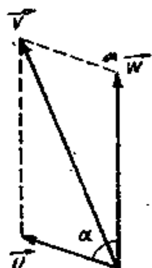


Fig. 26

mai mare ca a lui w, deci > 1, deoarece în triunghiul format de cei doi vectori v se opune unghiului obtuz $180° - \alpha$, iar w — unui unghi ascuțit.

Altă soluție pentru problema 1 (CS6, vezi 3.1). Să începem cu următoarea observație. Fie A un punct în planul unui cerc C (fig.27).

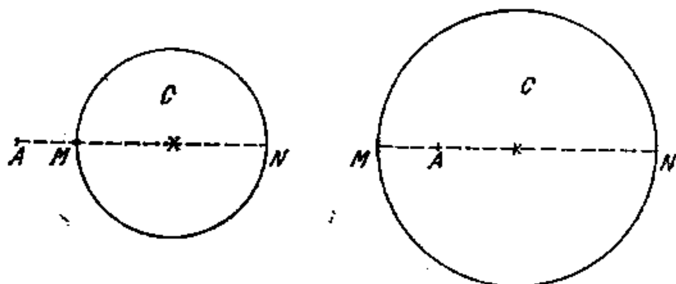


Fig. 27

Pe diametrul ce trece prin A al cercului C există un punct M mai apropiat şi un punct N mai depărtat de A. Cînd un punct P parcurge, de la M la N, unul din cele două semicercuri, atunci distanţa AP creşte mereu. Rezultă că dacă se consideră un arc PQ al cercului C,

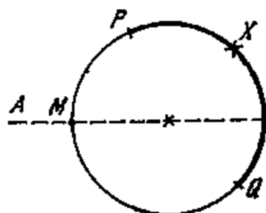


Fig. 28

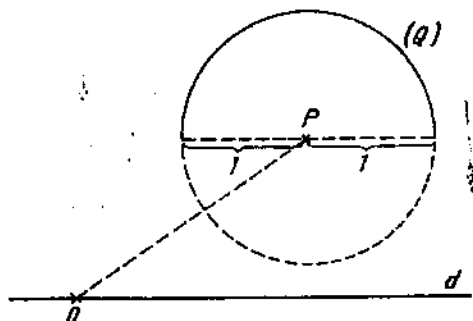


Fig. 29

arc ce nu conţine punctul M de pe cerc ce este cel mai apropiat de A, atunci $\min(AP, AQ) \leqslant AX$ pentru orice punct X de pe acel, arc (fig. 28).

Să considerăm acum n vectori $v_1, \ldots, v_n$ ca în enunţul problemei, indiferent de paritatea lui n. Dacă se fixează $v_1, \ldots, v_{n-1}$ şi se notează $\overline{OP} = v_1 + \ldots + v_{n-1}$, atunci, cînd v_n variază, capătul Q al lui $\overline{OQ} = v_1 + \ldots + v_n = \overline{OP} + v_n$ descrie un semicerc de centru P, de rază 1, care nu conţine punctul cel mai apropiat de O de pe cercul respectiv (fig. 29). Aceasta arată că putem înlocui v_n cu un vector de lungime 1, paralel cu d, aşa încît lungimea lui $v_1 + \ldots + v_n$ să nu crească, înlocuire posibilă pe baza observaţiei argumentate prin fig. 28.

Procedînd la fel cu $v_{n-1}, \ldots, v_1$, se ajunge la concluzia că există vectori $w_1, \ldots, w_n$, paraleli cu d, de lungimi egale cu 1, astfel ca lungimea lui $w_1 + \ldots + w_n$ să nu depăşească pe cea a lui $v_1 + \ldots + v_n$. Vectorii $w_2, \ldots, w_n$ vor fi, fiecare, egali cu $\pm w_1$ şi deci suma lor va fi kw_1, unde k este un număr întreg de aceeaşi paritate cu n. Pentru n impar avem $|k| \geqslant 1$, q.e.d.

A treia soluţie a problemei 1 (CS6, vezi 3.1). Sistemul $(v_1, \ldots, v_n)$ este un element (gîndind fiecare vector v_i drept extremitatea sa, originea fiind în O) ce parcurge mulţimea M, produs cartezian de n semicercuri de raze 1, considerate a include cele două capete ale lor. Lungimea lui $v_1 + \ldots + v_n$ este o funcţie continuă de $(v_1, \ldots, v_n)$. Mulţimea M este un spaţiu topologic compact, de exemplu fiind

produsul topologic al unor spaţii compacte. Deci minimul lungimii lui $v_1 + \ldots + v_n$ este atins; fie $(w_1, \ldots, w_n)$ un sistem în care aceasta are loc.

Dacă, de exemplu, w_1 nu este paralel cu d, se consideră $w = w_2 + \ldots + w_n$, vector de origine O situat în semiplanul S. Prin înlo-

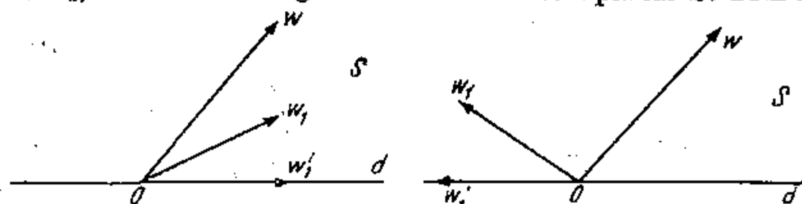


Fig. 30

cuirea lui w_1 cu un vector w_1' de lungime 1 paralel cu d, bine ales (fig. 30), unghiul dintre w şi w_1 va creşte şi deci lungimea lui $w + w_1$ va scădea. Cum aceasta contrazice ipoteza, rezultă că toţi w_i sînt paraleli cu d; conform raţionamentului de la sfîrşitul soluţiei precedente, rezultă că pentru n impar lungimea lui $w_1 + \ldots + w_n$ este $\geqslant 1$.

Pentru problema *2* (PL2, vezi 3.1) au existat soluţii date de concurenţi în care s-au indicat precis coordonatele carteziene ale punctelor mulţimii M şi s-a verificat analitic proprietatea cerută. Se pare că nici un concurent nu a găsit soluţia prezentată în 3.3, dar au existat soluţii analoage.

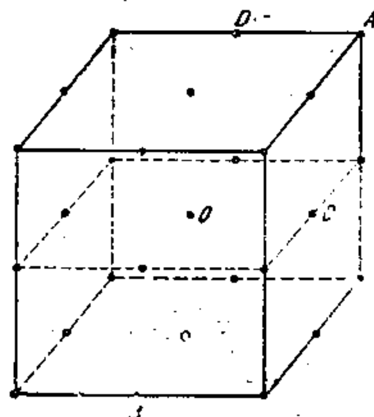


Fig. 31

În juriu s-a pus şi întrebarea dacă este adevărat că orice mulţime finită de puncte din spaţiu este conţinută într-o mulţime M cu proprietăţile din enunţul problemei *2*; nu s-a descoperit răspunsul.

Printre soluţiile ce au apărut în lucrările concurenţilor remarcăm următoarele.

Soluţie la problema 2 (PL2, vezi 3.1). Se consideră mulţimea M formată din vîrfurile a opt cuburi de latură 1 ce compun un cub de latură 2, deci din 27 de puncte (fig. 31). Aceasta are drept centru de simetrie centrul O al cubului de latură 2, deci, conform celor observate în 3.3, va fi suficient, pentru a verifica faptul că M are proprietăţile cerute de

enunț, să se stabilească aceasta pentru perechile de forma OP cu $P \in M, P \neq 0$.

Dacă P este un vîrf A al cubului de latură 2, atunci se consideră punctele B și C din M, din fig. 31. Dacă P este mijlocul B al unei muchii a acelui cub, se consideră punctele A și C, iar dacă P este centrul C al unei fețe, se consideră A și D.

Altă soluție la problema 2 (PL2, vezi 3.1). Se consideră mulțimea M formată din vîrfurile a două poligoane regulate, fiecare avînd un număr par de laturi, nu neapărat același, dar $\geqslant 6$, situate în două plane diferite și avînd un „diametru" comun. Mulțimea M are drept centru de simetrie mijlocul O al acelui diametru. Verificarea proprietății cerute este necesar a fi deci făcută numai pentru perechi de forma AB, în care A și B sînt diametral opuse în același poligon; pentru acestea se aleg C și D alăturate lui A, B respectiv, dar „în sensuri opuse" (fig. 32). Acestea nu coincid, deoarece poligonul are cel puțin 6 laturi.

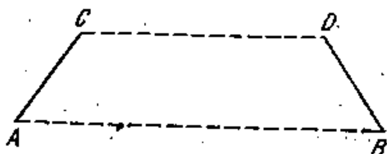


Fig. 32

Previziunile privind cîmpul de acțiune oferit concurenților de problemele *1* și *2* s-au confirmat pe deplin!

Problema *3* (SE4 din 3.1) s-a dovedit într-adevăr mai ușoară decît problemele *2* și *5* (PL2 și PL1, vezi 3.1 și 3.9), dar a condus și ea la soluții deosebite. Vom prezenta două din ele.

Soluție a problemei 3 (SE4 din 3.1). O dată cu o rădăcină x ecuația are ca rădăcină și pe $1/x$. Aceasta permite a scrie $x^4 + ax^3 + bx^2 + + ax + 1 = (x^2 + mx + 1)(x^2 + nx + 1)$, existența unei rădăcini reale însemnînd, de exemplu, că $|m| \geqslant 2$. Rezultă $a = m + n$, $b = 2 + mn$, deci $a^2 + b^2 = (1 + m^2)n^2 + 6nm + 4 + m^2$. Pentru m fixat acest trinom de grad doi în n își atinge minimul pentru $n = -3m/(1 + m^2)$, minim egal cu $(-9m^2/(1 + m^2)) + 4 + m^2$.

Acestei expresii trebuie să i se afle minimul cînd $|m| \geqslant 2$, deci cînd $m^2 \geqslant 4$. Problema se simplifică notînd $r = 1 + m^2$; ea revine astfel la a afla minimul lui $-9(r - 1)r^{-1} + 3 + r = r + (9/r) - 6$ pentru $r \geqslant 5$.

Aceasta se poate face și prin derivate, dar și observînd că expresia se scrie ca pătrat al lui $\sqrt{r} - (3/\sqrt{r})$, că pentru $r \geqslant 5$ avem $\sqrt{r} - (3/\sqrt{r}) \geqslant 0$, $\sqrt{r}$ crește cînd r crește, $3/\sqrt{r}$ scade, deci $-3/\sqrt{r}$ crește și $\sqrt{r} - (3/\sqrt{r})$ crește si ea și, în concluzie, pentru $r \geqslant 5$ expresia $\sqrt{r} - (3/\sqrt{r})$ este minimă cînd $r = 5$, valoare pentru care expresia de mai înainte $r + (9/r) - 6$ are valoarea $4/5$.

Altă soluție a problemei 3 (SE4 din 3.1). Pentru x fixat ecuația $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ reprezintă în coordonatele (a, b) o dreaptă (cu excepția cazului $x = 0\ldots$). Minimul lui $a^2 + b^2$ pentru toate ecuațiile din enunț ce au ca rădăcină un număr real dat x este pătratul distanței de la originea O la acea dreaptă, deci, conform unei formule din geometria analitică, $(x^4 + 1)^2/((x^3 + x)^2 + x^4)$.

Problema revine deci la a determina minimul acelei expresii cînd x parcurge R. Aceasta se poate face cu ajutorul derivatei funcției; nu vom reproduce acest calcul, facil de altfel. Dar se poate nota x^2 cu y, expresia devenind $(y^2 + 1)^2/(y(y + 1)^2 + y^2) = (y + y^{-1})^2/(3 + y + y^{-1})$, domeniul de variație al lui y fiind $y \geqslant 0$, și apoi $y + y^{-1}$ cu z, expresia devenind $z^2/(3 + z)$, iar domeniul de variație, după cum se verifică ușor, $z \geqslant 2$.

Mai departe, problema se reduce la a afla valoarea maximă a lui $(3 + z)z^{-2} = 3u^2 + u$, unde $u = z^{-1}$, iar $z \geqslant 2$, deci $0 < u \leqslant 1/2$. Trinomul de gradul doi își atinge maximul la unul din capetele intervalului (avînd primul coeficient $3 > 0$), deci nu pentru $u = 0$, unde el este 0, ci pentru $u = 1/2$, unde valoarea sa este $(3/4) + (1/2) = 5/4$; valoarea minimă a expresiei inițiale este deci $(5/4)^{-1} = 4/5$.

În oricare din soluțiile prezentate pentru această problemă este simplu a stabili că minimul se atinge pentru $x = \pm 1$, $a = \pm 4/5$, $b = -2/5$.

Problema *6* (SE3 din 3.1) s-a dovedit într-adevăr cea mai grea, fiind rezolvată de puțini concurenți. Altă soluție în afară de cea prezentată în 3.7 nu a apărut, în afară de varianta de a alege (vezi 3.7) $b_k = \sum_r q^{|k-r|}a_r$ în loc de $b_k = \max_r (q^{|k-r|}a_r)$.

În asemenea situații la coordonare este necesară o mare atenție, deoarece se obișnuiește a se acorda puncte pentru observații izolate, ce reprezintă totuși cîte un mic pas către rezolvare. De exemplu, s-ar fi acordat 1 punct pentru observația că este suficient a se rezolva problema cu $\leqslant$ în condițiile a) și b) în loc de $<$ (vezi 3.1, 3.7).

Din delegația țării noastre un singur concurent a rezolvat această problemă obținînd punctajul maxim. Dar tocmai el nu a reușit să rezolve problema *5* (PL1 vezi 3.9), ratînd astfel premiul 1. Și nu se putea spune că nu făcea parte dintre cei „docți". Am scos în evidență acest fapt, această mare surpriză, pentru a sublinia încă o dată cît de relative sînt aprecierile privind dificultatea sau simplitatea unei probleme.

Problema *4* (YU5 din 3.1) a condus la dificultăți în coordonare. Au existat însă și soluții redactate în stilul următor.

Fie M mulțimea tuturor curbelor continue Γ ce pleacă din A, conținute în triunghiul ABC, astfel încît, oricare ar fi punctul P

din triunghiul ABC, să existe un punct Q pe Γ așa încît $PQ \leqslant h/2$. Fie N mulțimea tuturor curbelor Γ ce pleacă din A, continue, conținute în triunghiul ABC, cu capătul X astfel încît $CX = h/2$ și astfel încît să existe pe Γ un punct Y cu $BY \leqslant h/2$. Avem $M \subset N$. Trebuie să determinăm $\inf\limits_{\Gamma \in M} L(\Gamma)$, unde $L(\Gamma)$ reprezintă lungimea lui Γ. Pentru aceasta vom determina întîi $\inf\limits_{\Gamma \in N} L(\Gamma)$, care în general este $\leqslant \inf\limits_{\Gamma \in M} L(\Gamma)$; vom arăta că acesta este atins pe o curbă $\Gamma \in N$ și apoi vom arăta că $\Gamma \in M$; va rezulta că $\inf\limits_{\Gamma \in M} L(\Gamma) = \inf\limits_{\Gamma \in N} L(\Gamma)$ etc.

Evident că în fața unei lucrări redactate în acest mod coordonarea este simplă.

Problemele *4* și *5* nu au condus nici ele la soluții esențial diferite de cele prezentate în 3.6 și 3.9.

3.11. Stabilirea premiilor

Au existat la a 15-a Olimpiadă Internațională de Matematică multe propuneri pentru acordări de premii speciale pentru rezolvări deosebite ale cîte uneia din cele șase probleme; exista încă uzanța ca astfel de propuneri să fie făcute și de șefii de delegații. În final, la a 15-a Olimpiadă nu s-a acordat nici un astfel de premiu. Pentru acordarea unui premiu special principiile cer: să fie vorba de o soluție a problemei respective dată de un singur concurent (deci unică printre celelalte soluții date de concurenți acelei probleme), să fie o soluție completă (care să fie notată cu punctajul maxim ce se poate acorda pentru rezolvarea acelei probleme) și să fie într-adevăr superioară celorlalte soluții (prin simplitate sau prin informația ce o oferă asupra situației considerate în problemă). S-a apreciat că propunerile făcute nu îndeplineau în special această ultimă condiție.

Stabilirea concurenților ce vor primi premiile 1, 2, 3 se face avînd în față un tabel, pe coloane, aceste coloane fiind numerotate în ordine cu 40, 39, 38, ..., deci începînd cu numărul maxim de puncte ce putea fi realizat de un concurent (vezi 3.9). În fiecare coloană sînt trecute indicativele concurenților ce au realizat punctajul respectiv. De exemplu

38
SU3
HU7

înseamnă că dintre toți concurenții concurentul 3 de pe lista alfabetică a celor din URSS și concurentul 7 de pe lista alfabetică a celor din Ungaria, și numai ei, au realizat cîte 38 de puncte.

Juriul trebuie să stabilească prin vot trei numere N_1, N_2, N_3 care să însemne că un concurent ce a realizat N puncte ia premiul 1 dacă $N \geqslant N_1$, premiul 2 dacă $N_1 > N \geqslant N_2$ și premiul 3 dacă $N_2 > N \geqslant N_3$. Principiile existente pentru această decizie erau: pentru rezolvarea tuturor problemelor, eventual cu mici greșeli, să se ia premiul 1, ratarea numai a unei probleme să conducă la premiul 2, rezolvarea a cel puțin trei din cele șase probleme să asigure premiul 3 iar, pe de altă parte, numărul total de premianți să fie cam în jurul a 1/2 din numărul total de concurenți. Evident că posibilitatea de a împăca aceste două grupuri de tendințe contradictorii reprezintă un deziderat în plus pentru lista de probleme ce se propun.

Practic însă trebuie alese trei „coloane barieră". Ideal este cînd apar coloane goale în locurile potrivite. La Olimpiada din 1973 o astfel de coloană, cea corespunzătoare la 34 puncte, a determinat decizia asupra barierei N_1 între premiile 1 și 2. În schimb, decizia asupra barierei N_3 între premiul 3 și... simpla înmînare a unei diplome de participant, anume 17 puncte, a fost decisă de dorința ca delegația..., dintre cele invitate de un timp încoace, să obțină pentru prima dată un premiu (evident că „17 puncte" nu sînt departe de primul grup de principii).

Bariera N_2 (27 puncte) între premiul 2 și premiul 3 s-a stabilit lăsînd în zona premiului 3 o primă coloană cu șapte concurenți, deci mai „populată" decît celelalte. Printre ei și un român. Încercînd să aflăm în ce măsură șefii de delegație ai celorlalți concurenți dintre cei șapte împărtășeau regretul nostru, am întîlnit și un caz de indiferență totală și un caz în care replica a fost: „Concurenții (!) noștrii dintre cei șapte nu meritau premiul 2, s-ar fi înfumurat pe degeaba..."

Aceste reacții arată atmosfera ce domnea în jurul Olimpiadei Internaționale de Matematică în acea vreme. Clasamentul „pe națiuni" ce se întocmea, așezînd toate delegațiile ce prezentaseră cîte opt concurenți în ordinea descrescătoare a numerelor totale de puncte obținute de echipele respective, era „neoficial" și unele delegații îl ignorau. Scopul principal era de a-și testa cei mai buni elevi în condițiile unei competiții de înalt nivel.

Să adăugăm la aceasta și faptul că nu se considera necesar a se lua măsuri categorice de izolare a concurenților de șefii lor de delegație. Secunzii erau cazați în camere alăturate de cele ale elevilor lor; șefii de delegații la hotel, departe de aceștia. În după amiaza primei zile de concurs secunzii au examinat lucrările respective împreună

cu șefii de delegații, în camerele acestora, deci au avut suficient timp să afle problemele zilei a doua (ei nu participaseră la lucrările juriului), și seara au revenit în camerele lor... Și totuși, nu s-au semnalat cazuri de desconspirări de probleme etc.

La cele spuse în 2.3 și 2.4 în legătură cu misiunea șefului de delegație și a secundului trebuie să adăugăm următoarele. Pentru a obține rezultate la Olimpiadă, care să aibă o semnificație, cu care concurenții și profesorii lor să se poată mîndri, este în primul rînd necesar ca această Olimpiadă să existe, să se desfășoase într-un climat de ordine și echitate, de înaltă ținută matematică. Răspunderea îndeplinirii acestor condiții o poartă în mare măsură membrii juriului și secunzii lor, evident și comitetul de organizare, coordonatorii.

Este bine să se acorde așa de multe premii? Credem că da. Și credem astfel nu numai ținînd seama de rolul lor stimulator pentru concurenți. Dacă, de exemplu, s-ar cădea în extrema cealaltă și s-ar acorda în total un singur premiu 1, un singur premiu 2 și unul singur 3, atunci ar exista delegații care ani în șir nu s-ar întoarce de la Olimpiadă cu nici un premiu. Este mult mai ușor de cîntărit rezultatul obținut de o delegație la Olimpiadă cînd acesta este exprimat, de exemplu, prin „un premiu 2 și trei premii 3", decît cînd el este exprimat prin „cel mai bun concurent al nostru a obținut 32 puncte, următorul 26 etc.", sau prin „190 puncte din 320 posibile, pentru cei opt concurenți, în total". Acel premiu 3 obținut pentru prima dată de acea delegație este un prilej de mult mai mare bucurie decît „pentru prima dată un concurent al nostru a reușit să obțină 17 puncte".

Olimpiada se încheie totdeauna prin împărțirea, în cadrul festiv, a premiilor. Înainte de prima probă de concurs are loc deschiderea festivă, și aceasta în prezența concurenților, șefilor de delegații, secunzilor etc.. Prezidiul este format din șefii delegațiilor, cu steagurile țărilor lor în fața fiecăruia din ei.

3.12. Citeva concluzii

Se crede uneori că șeful de delegație poate avea un rol important în a acționa în favoarea alegerii pentru concurs a unor probleme la care concurenții săi să fie mai puternici.

Evident că a nu anunța juriul că o anumită problemă depășește programa analitică din liceele țării sale este o gravă neglijență.

Dar a exagera în aprecierea problemelor printr-o prismă „utilitaristă“ poate conduce și la situații cum a fost cea legată de problema *5* (vezi 3.10 spre sfîrșit); niciodată nu poate fi cineva sigur că un anumit concurent va rezolva o anumită problemă, cînd este vorba de o problemă pentru Olimpiada Internațională. Problema *5* a fost foarte potrivită pentru acest concurs, dar a susține o problemă necorespunzătoare avînd în minte un motiv cum este cel indicat mai sus poate știrbi din prestigiul delegației respective.

O altă întrebare ce s-a mai pus este în ce măsură este bine ca participanții la Olimpiada Internațională să aibă cunoștințe, de exemplu, de analiză matematică, ținînd seamă că probleme din acest domeniu nu se propun, deoarece sînt țări participante în liceele cărora el nu se învață.

În loc de considerații generale pe această temă, preferăm în acest moment să reamintim a treia soluție a problemei *1* (vezi 3.10), bazată pe cunoștințe avansate de analiză și care în plus a fost acceptată de coordonatori și notată cu punctajul maxim numai după o minuțioasă verificare (a scris concurentul de ce spațiul produs este compact? etc.), soluțiile la problema *3* prezentate în 3.10 ce puteau fi scurtate avînd cunoștințe elementare asupra derivatelor și a studiului variației funcțiilor cu ajutorul lor, și chiar și soluția la problema *6* (SE3), dată în 3.7, unde primul pas este mult mai ușor de realizat de un concurent ce a „practicat“ analiza matematică.

Modul de redactare a problemei *4*, din 3.10, trădează familiaritate cu noțiuni de analiză matematică.

În orice caz, nici una din probleme nu devine banală pentru cineva înarmat cu analiza matematică sau cu alte capitole de matematică ce nu se învață în școală. O astfel de problemă nu s-ar bucura niciodată de adeziune din partea juriului.

O altă concluzie ce se desprinde din discuțiile din juriu în legătură în special cu problema FR2 (vezi 3.1 și 3.5) este faptul că organizatorii unei Olimpiade doresc, pentru ca această Olimpiadă să rămînă cît mai mult în amintirea participanților (concurenți, șefi de delegație, secunzi, etc.), să o marcheze cu probleme deosebit de frumoase. Urmărind problemele propuse juriului, un viitor concurent trebuie să țină seama de această tradiție care conduce de multe ori la includerea pe lista respectivă a unor probleme ceva mai grele decît ar corespunde Olimpiadei (vezi și 1.3).

4

A 16-A OLIMPIADĂ INTERNAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ (Erfurt, Weimar, R.D.G., 1974)

4.1. Cîteva probleme privind organizarea Olimpiadei

La a 16-a Olimpiadă au participat 18 delegații: cele 16 ce participaseră și în 1973 și, pe lîngă ele, cele ale S.U.A. și Vietnam.

Comitetul de organizare a luat o serie de inițiative, majoritatea înscrise într-un regulament al Olimpiadei ce fusese trimis țărilor participante. Le vom prezenta pe fiecare la momentul potrivit.

Concurenții au fost instalați la Erfurt, unde au avut loc și cele două probe ale concursului. Juriul a fost instalat la Weimar, la circa 20 km de Erfurt. În plus, secunzii, chiar din momentul sosirii, s-au alăturat juriului, contactul lor, și al șefilor de delegații, cu concurenții fiind exclus pînă la stabilirea definitivă a premiilor. Concurenții au fost încredințați unor însoțitori din partea țării gazdă. În acest mod, fără a pune în vreun fel la îndoială corectitudinea membrilor juriului, s-au luat măsuri în direcția asigurării securității Olimpiadei față de acțiuni incorecte ale unor alte persoane.

În regulament s-a prevăzut obligativitatea țării gazdă de a anunța numai data și locul unde vor fi „recepționate" delegațiile participante, la începutul Olimpiadei, și de unde vor pleca înapoi în țările lor, la sfîrșitul Olimpiadei. Locului unde va lucra juriul nu i se face deci publicitate în prealabil. Evident că, în fiecare din cele două zile de concurs, membrii juriului au fost aduși la Erfurt — locul de desfășurare a Olimpiadei — și duși apoi înapoi la Weimar.

Prezența tuturor membrilor juriului la începutul probelor de concurs este necesară nu numai în vederea participării lor în prezidiu la festivitatea de deschidere (vezi 3.11). Ea este necesară și pentru ca ei să poată răspunde la eventuale nelămuriri ale concurenților din țările lor. Și aceste contacte cu concurenții au fost limitate la strictul

necesar; de exemplu, în timp, la o jumătate de oră, începînd cu primirea subiectelor.

S-a introdus sistemul practicat la Congresele Internaționale ca fiecare participant (concurent, șef de delegație, secund, membru al comitetului de organizare, coordonator, însoțitor al elevilor unei delegații, translator etc.) să poarte în piept un cartonaș cu numele, țara etc.

Fiecărei delegații participante i s-a cerut să trimită numai cinci, și nu șase probleme, în prealabil, comitetului de organizare (vezi 2.1).

Toate aceste inițiative au fost adoptate și la Olimpiadele următoare.

Festivitatea de împărțire a premiilor a avut loc la Berlin.

4.2. Problemele propuse juriului

Și aici a existat o inițiativă, care însă nu s-a menținut la Olimpiadele următoare. Anume, a fost prezentat un set de șase probleme drept primă propunere a comitetului de organizare în ceea ce privește problemele ce urmează să fie date concurenților. Pe lîngă aceasta, a fost prezentat un set de șase probleme „de rezervă". S-a urmărit astfel a se face un prim pas către asigurarea conținutului matematic variat al problemelor de concurs.

Problemele au fost următoarele (nu au mai fost indicate numerele din seturile trimise comitetului de organizare de țările participante).

S e t u l I

I1-US. *Trei jucători A, B și C joacă un joc cu trei cărți, pe fiecare din cele trei cărți fiind tipărit cîte un număr întreg pozitiv, cele trei numere astfel tipărite fiind distincte două cîte două.*

O partidă constă din amestecarea cărților, împărțirea lor cîte una la fiecare jucător, atribuirea fiecărui jucător a unui număr de puncte egal cu numărul de pe cartea sa și apoi din restituirea cărților.

După un număr $\geqslant 2$ de astfel de partide s-a constatat că A are 20 de puncte, B are 10 puncte iar C are 9 puncte. Se știe că în ultima partidă B a avut cartea cu număr maxim posibil de puncte.

Cine a avut în primul joc cartea cu număr mijlociu de puncte?

I2-PL. *Să se demonstreze că într-un pătrat de latură 3/2 se pot așeza toate pătratele Q_n dintr-un șir, $n = 1, 2, \ldots$, unde latura lui Q_n*

este $1/n$, *aşa încît să nu existe două dintre ele care să aibă puncte interioare comune.*

I3-SE. *Fie* $P(x)$ *un polinom cu coeficienţi întregi, al cărui grad, notat* $\deg P$, *este* $\geqslant 1$. *Fie* $n(P)$ *numărul tuturor întregilor* k *pentru care* $(P(k))^2 = 1$. *Să se demonstreze că* $n(P) - \deg P \leqslant 2$.

I4-SU. *Suma pătratelor a cinci numere reale* a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 *este* 1. *Să se arate că* $\min(a_i - a_j)^2$, *cînd* $1 \leqslant i < j \leqslant 5$, *nu depăşeşte* $1/10$.

I5-GB. *Pentru orice* $r = 1, 2, \ldots$ *se consideră un triunghi* $\Delta_r = A_rB_rC_r$. *Se presupune că:*

1) $A_{r+1} \neq A_r$, $B_{r+1} \neq B_r$, $C_{r+1} \neq C_r$.

2) A_{r+1}, B_{r+1}, C_{r+1} *se află pe cercul circumscris triunghiului* $A_rB_rC_r$.

3) $A_{r+1}A_r \| B_rC_r$, $B_{r+1}B_r \| C_rA_r$, $C_{r+1}C_r \| A_rB_r$.

4) *Măsura oricăruia dintre unghiurile lui* Δ_1 *este un număr întreg de grade care nu este multiplu de* $45°$.

Să se demonstreze că printre primele 15 *triunghiuri* (Δ_r, $r = 1, \ldots, 15$) *există două congruente.*

I6-RO. *Să se demonstreze că, oricare ar fi* n *natural, numărul* $\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} 2^{3k}$ *nu se divide cu* 5.

Setul II

II1-PL. *Fie* a_i, b_i, $i = 1, \ldots, k$, *numere întregi pozitive. Pentru orice* i, a_i *şi* b_i *sînt prime între ele. Fie* m *cel mai mic multiplu comun al lui* $b_1, \ldots, b_k$. *Să se demonstreze egalitatea dintre cel mai mare divizor comun al lui* $(a_i m)/b_i$, $i = 1, \ldots, k$, *şi cel mai mare divizor comun al lui* a_i, $i = 1, \ldots, k$.

II2-NL. a, b, c, d *parcurg, independent unul de altul, mulţimea numerelor reale pozitive. Care este mulţimea tuturor valorilor ce le ia expresia*

$$S = (a/(a + b + d)) + (b/(a + b + c)) +$$

$$+ (c/(b + c + d)) + (d/(a + c + d))?$$

II3-CU. *Dacă* x, y, z *sînt numere reale pozitive cu proprietatea* $x + y + z = xyz$ *şi dacă nici unul dintre ele nu este egal cu* $1/\sqrt{3}$, *să*

se demonstreze că

$$((3x - x^3)/(1 - 3x^2)) + ((3y - y^3)/(1 - 3y^2)) + ((3z - z^3)/(1 - 3z^2)) =$$
$$= ((3x - x^3)/(1 - 3x^2))((3y - y^3)/(1 - 3y^2))((3z - z^3)/(1 - 3z^2)).$$

II4-FI. *Se consideră un triunghi ABC. Să se demonstreze că* $\sin A \sin B \leq \sin^2(C/2)$ *este o condiție necesară și suficientă pentru existența pe segmentul AB a unui punct D astfel încît CD este medie geometrică între AD și BD.*

II5-BG. *Se consideră descompunerile unei table de șah* (8×8) *în p dreptunghiuri disjuncte ce satisfac condițiile:*

a) *Fiecare dreptunghi este format dintr-un număr de pătrățele întregi din cele 64 și numărul de pătrățele albe ce le conține este egal cu cel de pătrățele negre ce le conține.*

b) *Numerele $a_1, \ldots, a_p$ de pătrățele albe din cele p dreptunghiuri satisfac $a_1 < a_2 < \ldots < a_p$.*

Să se determine cea mai mare valoare a lui p pentru care există o asemenea descompunere și apoi, pentru acea valoare a lui p, toate șirurile $a_1, \ldots, a_p$ pentru care se poate realiza o astfel de descompunere.

II6-SU. *Un alfabet are trei litere. Cu el se pot forma diferite cuvinte. Unele șiruri de litere, fiecare format din cel puțin două litere, sînt interzise. Două șiruri interzise diferite au întotdeauna lungimi diferite.*

Să se demonstreze că se pot forma cuvinte oricît de lungi ce nu conțin șiruri interzise de litere.

4.3. Soluțiile problemelor propuse juriului

Soluția problemei I1-US (vezi 4.2). Cum C a a cumulat 9 puncte, nu au putut fi mai mult de 9 partide. Pe fiecare dintre cărți numărul tipărit nu putea depăși 20. Deci există în orice caz un număr finit de variante posibile și s-ar putea concepe o rezolvare „pe calculator" a acestei probleme, analizînd variantă cu variantă etc.

Dar nu așa ceva se aștepta de la concurenți! Se aștepta o soluție care să ajungă la rezultat pe o cale cît mai scurtă, deci cu cît mai multă inteligență. În plus, o soluție completă trebuie să conțină și demonstrația faptului că răspunsul este unic și anume cel indicat în acea soluție; așa cum este formulată problema, s-ar putea în principiu întîmpla să existe mai multe variante compatibile cu datele

problemei, într-una din acestea A avînd în primul joc cartea mijlocie, în alta B etc.

Un prim pas constă în a considera numărul total de puncte $20 + 10 + 9 = 39$, realizat de cei trei jucători. Acest număr este egal cu produsul dintre numărul de partide jucate și suma celor trei numere tipărite pe cărți. Deci numărul de partide este un divizor al lui 39. Am arătat deja că acesta nu poate depăși 9. Rămîn deci posibilitățile „o partidă“ și „trei partide“.

Nu se poate să fi avut loc una singură, deoarece în acea partidă, conform ultimei condiții din problemă, B ar fi obținut mai multe puncte decît ceilalți jucători, contrazicînd prin aceasta condiția precedentă.

Am stabilit deci că au avut loc trei partide și că, dacă notăm cu $0 < p < q < r$ cele trei numere tipărite pe cărți, avem $p + q + r = 39/3 = 13$.

Pasul următor constă în a-l estima pe r. Cele 20 de puncte ale lui A nu depășesc $3r$, deci $r \geqslant 7$. Pe de altă parte, cele 10 puncte ale lui B reprezintă cel puțin $r + 1 + 1$, deci $r \leqslant 8$. În concluzie r este 7 sau 8.

Acum îl putem determina pe p. Într-adevăr, dacă $p \geqslant 2$, atunci numărul total de puncte ale lui B ar fi cel puțin $r + 2p \geqslant 11$, imposibil. Deci $p = 1$ și, ținînd seama de valoarea lui $p + q + r = 13$, deducem că q este 4 sau 5.

Pasul următor stabilește faptul că B a realizat în cele trei partide r, p, p, deoarece altfel ar fi realizat cel puțin $r + p + q = 13$ (acest raționament putea fi făcut și mai devreme). De asemenea, putem deduce că C n-a realizat niciodată r, deoarece el a realizat cel mult o dată $p = 1$, iar dacă ar fi realizat $r \geqslant 7$ într-una din partide, în cea rămasă ar fi trebuit să realizeze $\leqslant 9 - (1 + 7) = 1$, imposibil. Deci în cele trei partide C a realizat p, q, q, de unde obținem $q = 4$ (și apoi $r = 13 - 1 - 4 = 8$). A a realizat r, r, q, ceea ce este compatibil cu datele problemei $(20 = 8 + 8 + 4)$.

Să sintetizăm concluziile de pînă acum în tabel:

$A: r, r, q$

$B: r, p, p$

$C: q, q, p$

Cu aceasta nu s-a încheiat însă rezolvarea problemei. Trebuie să stabilim cît a realizat fiecare jucător în fiecare partidă. În ultima, în care B a realizat r, A nu putea realiza decît q, iar pentru C rămîne p.

În celelalte două partide a rămas ca A să fi realizat r, r, B să fi realizat p, p, iar C — q, q, deci cele două partide au fost „identice". Acum răspunsul la problemă poate fi dat: în prima partidă cartea cu număr mijlociu de puncte (deci q) a fost la C.

Să continuăm cu soluția „rivalei acestei probleme".

Soluția problemei Î11-PL (vezi 4.2). Metoda cea mai ușor de pus în aplicare pentru a demonstra egalitatea celor două numere din enunț apare drept următoarea: pentru orice număr prim p se arată că acesta apare cu același exponent în descompunerile în factori primi ale celor două numere.

Vom deosebi în această demonstrație două cazuri.

C a z u l 1. Numărul p divide cel puțin unul din numerele $b_1, \ldots, b_k$, fie acesta b_j. Atunci p nu va divide pe a_j (acesta fiind prim cu b_j), deci p nu va divide c.m.m.d.c. al numerelor $a_1, \ldots, a_k$. Va trebui deci să arătăm că p nu divide nici cel mai mare divizor comun al numerelor $(a_i m)/b_i$, adică să găsim un i astfel încît p să nu dividă $(a_i m)/b_i$. Obținem un astfel de i alegîndu-l așa ca în descompunerea în factori primi a lui b_i numărul p să intre la putere maximă posibilă; fie $r > 0$, în cazul nostru, acel exponent. Puterea cu care va intra p în descompunerea în factori primi a lui m va fi tot r, iar a_i nu se va divide cu p (fiind prim cu b_i); în concluzie $(a_i m)/b_i$ nu se va divide cu p și afirmația este demonstrată în cazul considerat.

C a z u l 2. Numărul p nu divide nici unul din numerele b_i. Rezultă că acesta nu va divide nici m. Deci în descompunerea în factori primi a lui $(a_i m)/b_i$ numărul p va intra cu aceeași putere, fie aceasta m_i, ca și în descompunerea lui a_i. Deci în descompunerile celor două numere din enunț p va intra cu aceeași putere, anume $\min(r_1, \ldots, r_k)$.

Soluția problemei Î2-PL (vezi 4.2). Evident că nu este suficient să comparăm ariile, adică să stabilim că $(3/2)^2 \geqslant \sum_{n>1} (1/n^2)$. Pe de altă parte, cunoașterea metodei de stabilire a convergenței seriei $\Sigma(1/n^2)$ conduce către o soluție:

$$1^{-2} + \ldots + n^{-2} + \ldots = 1^{-2} + (2^{-2} + 3^{-2}) + \ldots + ((2^k)^{-2} + \cdots$$
$$\ldots + (2^{k+1} - 1)^{-2}) + \ldots <$$
$$< 1^{-2} + 2 \cdot 2^{-2} + \ldots + 2^k (2^k)^{-2} + \ldots = 1 + 2^{-1} + \ldots + 2^{-k} + \ldots = 2.$$

Fiecare din cele 2^k pătrate de latură $1/n$, cînd n parcurge valorile de la 2^k la $2^{k+1} - 1$, se poate plasa în cîte un pătrat mai mare, de latură 2^{-k}. Va fi suficient deci să așezăm în pătratul de latură $3/2$ un pătrat de latură 1, 2 pătrate de latură $1/2, \ldots, 2^k$ pătrate de

latură 2^{-k}, ..., așa încît să nu aibă puncte interioare comune, și problema va fi rezolvată.

Cele 2^k pătrate de latură 2^{-k} vor fi așezate într-un șir, formînd un dreptunghi de dimensiuni 2^{-k} și $2^k \cdot 2^{-k}=1$. Deci va trebui să plasăm în interiorul pătratului de latură 3/2 un șir de dreptunghiuri, toate de lungime 1, de lățimi 1, 1/2, ..., $1/(2^k)$, ... Suma lățimilor lor este $2 > 3/2$, dar dacă pe al doilea îl așezăm separat, suma lățimilor celor rămase este exact 3/2. Aranjarea se face ca în fig. 33.

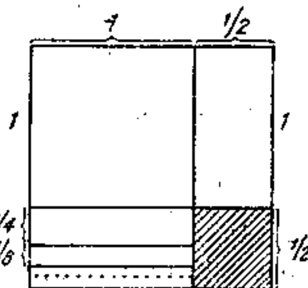


Fig. 33

Soluția problemei II2-NL (vezi 4.2). Vom prezenta o soluție cît mai elementară. În ce constă „simetria" expresiei? De exemplu, în faptul că al treilea termen se obține din primul înlocuind a cu c, iar al patrulea — din al doilea înlocuind b cu d. Deci

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{c}{c+b+d} + \frac{b}{b+a+c} + \frac{d}{d+a+c} =$$

$$= \frac{(a+c)(b+d)+2ac}{ac+(a+c)(b+d)+(b+d)^2} + \frac{(a+c)(b+d)+2bd}{bd+(a+c)(b+d)+(a+c)^2} =$$

$$= 2 - \frac{(a+c)(b+d)+2(b+d)^2}{ac+(a+c)(b+d)+(b+d)^2} + 2 - \frac{(a+c)(b+d)+2(a+c)^2}{bd+(a+c)(b+d)+(a+c)^2}.$$

Să fixăm $x = a + c$, $y = b + d$ (cu acest scop a fost transformată expresia, pentru a elimina pe cît posibil ac și bd) sau, mai bine, $x = (a+c)/2$, $y = (b+d)/2$. Cînd ac crește, numitorul primei fracții crește, fracția scade iar S crește (nu trebuie uitat că $a, b, c, d > 0$). La fel, cînd bd crește, S crește.

Produsul ac variază în $(0, x^2]$, bd variază în $(0, y^2]$ (produsul a două numere pozitive de sumă constantă este maxim cînd cele două numere sînt egale etc.).

Deci pentru $a + c = 2x$, $b + d = 2y$ fixați (x, y, evident, pozitivi) expresia S din enunț variază într-un interval, al cărui capăt stîng corespunde situației $ac = bd = 0$, avînd valoarea

$$\frac{4xy}{4xy+4y^2} + \frac{4xy}{4xy+4x^2} = \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} = 1,$$

iar capătul drept corespunde situației $ac = x^2$, $bd = y^2$ și are valoarea

$$\frac{4xy + 2x^2}{x^2 + 4xy + 4y^2} + \frac{4xy + 2y^2}{y^2 + 4xy + 4x^2} = \frac{2x(x + 2y)}{(x + 2y)^2} + \frac{2y(y + 2x)}{(y + 2x)^2} =$$

$$= \frac{2x}{x + 2y} + \frac{2y}{y + 2x} = \frac{4x^2 + 4xy + 4y^2}{2x^2 + 5xy + 2y^2}.$$

Mai precis, ea variază în $\left(1, \frac{4x^2 + 4xy + 4y^2}{2x^2 + 5xy + 2y^2}\right]$.

Rămîne de determinat mulțimea valorilor ce le ia capătul drept, cînd x, y parcurg fiecare $(0, +\infty)$. Problema se pune a preciza pentru ce valori ale lui k ecuația $4x^2 + 4xy + 4y^2 = k(2x^2 + 5xy + 2y^2)$ are soluții reale (x, y) cu $x, y > 0$. Împărțind cu y^2 și notînd $z = x/y$, acest fapt este echivalent cu existența unei soluții pozitive pentru ecuația $2(k - 2)z^2 + (5k - 4)z + 2(k - 2) = 0$.

Pentru $k = 2$ ecuația are numai soluția $z = 0$ și deci 2 nu aparține mulțimii de valori ce dorim s-o determinăm.

Pentru $k \neq 2$ ecuația în z este de gradul 2 și produsul rădăcinilor sale este 1. Deci condiția ca aceasta să aibă o rădăcină pozitivă este : discriminantul nenegativ și suma rădăcinilor pozitivă, adică $(5k-4)^2 - 16(k - 2)^2 \geq 0$ și $(5k - 4)/2(k - 2) < 0$. Prima se transcrie $(5k - 4 + 4k - 8)(5k - 4 - 4k + 8) \geq 0$, deci $(9k - 12)(k + 4) \geq 0$. Un studiu elementar conduce la rezultatul $k \in [4/3, 2)$.

Răspunsul la problemă este deci : mulțimea valorilor lui S, cînd a, b, c, d parcurg $(0, +\infty)$, este intervalul deschis $(1, 2)$.

O b s e r v a ț i i . a) Există, evident, variante ale acestei soluții. Iată una :

$$\frac{4x^2 + 4xy + 4y^2}{2x^2 + 5xy + 2y^2} = 2 - \frac{6xy}{2x^2 + 5xy + 2y^2} = 2 - \frac{6}{2((x/y) + (y/x)) + 5},$$

$(x/y) + (y/x) = (\sqrt{x/y} - \sqrt{y/x})^2 + 2$ are ca mulțime de valori $[2, +\infty)$, deci prima fracție are ca mulțime de valori $[2 - 6/9, 2) = [4/3, 2)$ etc.

b) Pentru o persoană ce urmează să corecteze lucrări este interesant să știe și modul cum trebuie variate variabilele pentru ca valoarea lui S să se apropie de fiecare din cele două valori extreme (ce nu le atinge). Răspunsul rezultă din studiul de mai sus. Pentru a ne apropia de infimumul 1 va trebuie să facem, de exemplu, a și b să tindă la 0, ținînd c și d constanți. Pentru a ne apropia de supremumul 2, care corespunde la $z = 0$, va trebui să facem $a = c$ și să-i tindem la 0, ținînd $b = d$ constanți (de fapt nici un este nevoie ca $a = c$ sau $b = d$). Este remarcabil că $a = b = c = d$ conduce la valoarea 4/3 care nu este extremă, deci un astfel de mijloc empiric de ghicire nu ne apropie de soluție !

Soluția problemei I3-SE (vezi 4.2). Cele $n(P)$ valori sînt rădăcini a două ecuații de grad deg P, anume $P(x) = 1$ și $P(x) = -1$. Fiecare din cele două ecuații are cel mult deg P rădăcini, deci, dacă $n(P)$

n-ar satisface relaţia din enunţ, adică dacă $n(P) > \deg P + 2$, atunci fiecare din cele două ecuaţii ar trebui să aibă cel puţin trei rădăcini întregi distincte.

Fie deci $k_1 < k_2 < k_3$, $P(k_1) = P(k_2) = P(k_3) = 1$. Rezultă

$$P(x) - 1 = (x - k_1)(x - k_2)(x - k_3)Q(x),$$

unde $Q(x)$ are coeficienţi întregi. Fie acum k o rădăcină a lui $P(x) = -1$, deci $P(k) - 1 = -2$ sau $-2 = (k - k_1)(k - k_2)(k - k_3)Q(k)$, unde $Q(k)$ este întreg. Deducem $|k - k_3| \leqslant 2$, deci, cum $k_3 - k_1 \geqslant 2$, nu se poate să avem $k < k_1$. La fel $|k - k_1| \leqslant 2$, deci $k > k_3$ este imposibil. În plus, nu se poate să avem $|k - k_1| = |k - k_3| = 2$, deci $k_3 - k_1$ este cel mult 3.

În concluzie, numerele k şi k_2 se află printre numerele $k_1 + 1$, $k_1 + 2$ şi deci, în condiţia în care există trei valori întregi distincte k_1, k_2, k_3 cu $P(k_1) = P(k_2) = P(k_3) = 1$, va exista cel mult un întreg k cu $P(k) = -1$. Aceasta constituie însă o contradicţie cu faptul că ambele ecuaţii $P(x) = 1$ şi $P(x) = -1$ ar avea fiecare cel puţin trei rădăcini întregi distincte, rezolvînd astfel problema.

Observaţie. Raţionamentul făcut ne oferă concluzii mai precise. El poate în primul rînd, fi reluat, presupunînd că $P(x) = 1$ are patru rădăcini întregi distincte şi deducînd că $P(x) = -1$ nu va putea avea nici o rădăcină întreagă într-un astfel de caz. Deci concluzia va fi $n(P) \leqslant 2$ pentru $\deg P = 1$, $n(P) \leqslant 4$ pentru $\deg P = 2$, $n(P) \leqslant 4$ pentru $\deg P = 3$ şi $n(P) \leqslant \deg P$ pentru $\deg P \geqslant 4$.

Se pot da şi exemple în care valorile maxime pentru $n(P)$ sînt atinse. Pentru $n = \deg P \geqslant 4$ considerăm $P(x) = 1 + \prod_{i=1}^{n} (x - k_i)$ cu k_i întregi distincţi (sau $P(x) = -1 + \prod_{i=1}^{n} (x - k_i)$). Pentru $n = \deg P = 3$ considerăm, în acord cu situaţia din raţionamentul de mai sus, $P(x) = 1 + x(x - 1)(x - 3)$ şi vom avea $P(2) = -1$. Pentru $n = \deg P = 2$ considerăm $P(x) = 1 + x(x - 3)$ şi vom avea $P(1) = P(2) = -1$. Situaţia în care $P(x) = 1$ are trei rădăcini întregi distincte se poate realiza şi pentru $\deg P > 3$ astfel:

$$P(x) = 1 + x(x - 1)(x - 3)(1 + (x - 2)Q(x)),$$

unde $Q(x)$ are coeficienţi întregi etc.

Soluţia problemei II3-CU (vezi 4.2). Un rezolvitor care a reţinut că într-un triunghi (nedreptunghic) ABC avem $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$ este condus către următoarea soluţie.

Să notăm $x = \operatorname{tg} a$, $y = \operatorname{tg} b$, $z = \operatorname{tg} c$, unde $a, b, c \in (-\pi/2, \pi/2)$. Numărul xy nu poate fi 1 deoarece ar urma, din relaţia $x + y + z = xyz$, $x + y = 0$, deci $x^2 = -1$, imposibil. Cum $a, b \in (-\pi/2, \pi/2)$ şi $\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \neq 1$, rezultă că formula $\operatorname{tg}(a + b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

are sens şi obţinem $\operatorname{tg}(a+b)=\dfrac{x+y}{1-xy}=-z=\operatorname{tg}(-c)$, deci $a+b+c=k\pi$ cu k întreg (k nu poate fi, evident, decît -1, 0 sau 1).

Reciproc, dacă avem trei unghiuri a, b, c, fiecare diferit de orice $(r\pi)/2$ cu r întreg impar, şi pentru care $a+b+c=k\pi$ cu k întreg, atunci $a+b=k\pi-c$ rezultă diferit de orice $(r\pi)/2$ cu r întreg impar, deci putem scrie formula

$$\frac{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b}{1-\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}=\operatorname{tg}(a+b)=\operatorname{tg}(k\pi-c)=-\operatorname{tg} c,$$

de unde

$$\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b+\operatorname{tg} c=\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c.$$

Să observăm acum că, dacă $\operatorname{tg} u \neq \pm 1/\sqrt{3}$ şi $u \neq (r\pi)/2$ pentru orice r întreg impar, atunci are sens $\operatorname{tg} 3u=(3\operatorname{tg} u-\operatorname{tg}^3 u)/(1-3\operatorname{tg}^2 u)$.

Dacă a, b, c sînt unghiurile introduse la începutul soluţiei, atunci valabilitatea condiţiilor $\operatorname{tg} a, \operatorname{tg} b, \operatorname{tg} c \neq \pm 1/\sqrt{3}$ este asigurată prin ipotezele problemei şi avem în plus $a, b, c \in (-\pi/2, \pi/2)$. Deci va trebui să arătăm că $\operatorname{tg} 3a \operatorname{tg} 3b \operatorname{tg} 3c=\operatorname{tg} 3a+\operatorname{tg} 3b+\operatorname{tg} 3c$, ceea ce rezultă pe baza reciprocei, deoarece $3a+3b+3c=3k\pi$.

Observaţie. Nu este lipsit de interes să ne situăm în poziţia unui rezolvitor care nu observă metoda de mai sus, sau a unuia care încearcă o soluţie pur algebrică. S-ar deduce $-z=\dfrac{x+y}{1-xy}$ şi apoi

$$\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}+\frac{3y-y^3}{1-3y^2}\right)\Big/\left(1-\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\,\frac{3y-y^3}{1-3y^2}\right)=$$

$$=\frac{3x+3y-x^3-y^3-9xy^2-9x^2y+3x^2y^3+3x^3y^2}{1-3x^2-3y^2-9xy+9x^2y^2+3x^3y+3xy^3-x^3y^3}.$$

Pentru $x=-y$ numărătorul fracţiei etajate este nul, la fel numitorul ei pentru $x=1/y$. Ultima fracţie se transformă în

$$\frac{(x+y)(3-x^2-y^2-8xy+3x^2y^2)}{(1-xy)(1-3x^2-3y^2-8xy+x^2y^2)}=\frac{x+y}{1-xy}\,\frac{3-(x+y)^2-6xy+3x^2y^2}{1-3(x+y)^2-2xy+x^2y^2}=$$

$$=\frac{x+y}{1-xy}\,\frac{3(1-xy)^2-(x+y)^2}{(1-xy)^2-3(x+y)^2}.$$

Substituind $x+y=-z(1-xy)$ şi ţinînd seama că $xy \neq 1$, conform celor stabilite la începutul soluţiei „trigonometrice", obţinem $-z\dfrac{3-z^2}{1-3z^2}=-\dfrac{3z-z^3}{1-3z^2}$, ceea ce se cerea de fapt.

Deci problema nu este atît de dificilă, privită numai prin prisma „căutătorului unei soluții". Dar nivelurile de înțelegere ale fenomenului matematic corespunzător acestei probleme sînt mult diferite în cazurile în care s-au găsit, respectiv, cele două rezolvări prezentate.

Soluția problemei I4-SU (vezi 4.2). Să arătăm invers, anume că dacă $a_1, \ldots, a_5$ sînt numere reale cu $(a_i - a_j)^2 > 1/10$ oricare ar fi $i \neq j$ (și $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$), atunci $\sum_{i=1}^{5} a_i^2 > 1$.

Observăm întîi că în acest enunț ordinea numerelor $a_1, \ldots, a_5$ nu contează (ipoteza și concluzia sînt simetrice în $a_1, \ldots, a_5$). Putem presupune deci că $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$, iar ipoteza se traduce prin $a_{i+1} - a_i > 1/\sqrt{10}$ pentru $i = 1, 2, 3, 4$.

Să arătăm că putem găsi numerele $b_1, \ldots, b_5$ așa încît $b_{i+1} - b_i = 1/\sqrt{10}$ pentru $i = 1, 2, 3, 4$ și $\sum_{i=1}^{5} b_i^2 < \sum_{i=1}^{5} a_i^2$. Într-adevăr, dacă $0 \leqslant a_1 < \ldots < a_5$, atunci alegem $b_1 = a_1$, $b_i = a_1 + (i-1)/\sqrt{10} < a_i$ pentru $i \geqslant 2$ (ultima inegalitate $<$ rezultă prin inducție după i), dacă $a_1 < \ldots < a_5 \leqslant 0$, alegem $b_5 = a_5$, $b_i = a_5 - (5-i)/\sqrt{10} > a_i$ pentru $i \leqslant 4$, iar dacă $a_1 < \ldots < a_j \leqslant 0 \leqslant a_{j+1} < \ldots < a_5$, atunci alegem întîi b_j, b_{j+1} așa ca $a_j \leqslant b_j \leqslant 0 \leqslant b_{j+1} \leqslant a_{j+1}$ și $b_{j+1} - b_j = 1/\sqrt{10}$ și apoi $b_i = b_j - (j-i)/\sqrt{10} > a_i$ pentru $i < j$ și $b_i = b_{j+1} + (i-j-1)/\sqrt{10} < a_i$ pentru $i > j+1$.

Rămîne de dovedit că $\sum_{i=1}^{5} b_i^2 \geqslant 1$ dacă $b_{i+1} - b_i = 1/\sqrt{10}$ pentru $i = 1, 2, 3, 4$. Pentru aceasta scriem $b_3 = x$, $b_1 = x - 2/\sqrt{10}$, $b_2 = x - 1/\sqrt{10}$, $b_4 = x + 1/\sqrt{10}$, $b_5 = x + 2/\sqrt{10}$ și obținem

$$\sum_{i=1}^{5} b_i^2 = 5x^2 + 2(2/\sqrt{10})^2 + 2(1/\sqrt{10})^2 = 5x^2 + 1 \geqslant 1.$$

Observație. Există și alte soluții; momentul ordonării numerelor a_i este însă esențial. Astfel, dacă încercăm să obținem o contradicție, presupunînd $(a_i - a_j)^2 > 1/10$ pentru orice $i \neq j$, obținem prin sumare după $i < j$ relația $4\sum a_i^2 - 2\sum a_i a_j > 1$, deci $2\sum a_i a_j < 3$ și cum, pe de altă parte, $0 \leqslant (\sum a_i)^2 = \sum a_i^2 + 2\sum a_i a_j$, adică $2\sum a_i a_j \geqslant -1$, nu reușim să ajungem la contradicția dorită.

Dacă însă pornim cu $(a_i - a_j)^2 > (j-i)^2/10$, relație ce rezultă adevărată dacă $a_1 < \ldots < a_5$, atunci în urma sumării obținem $4\sum a_i^2 - 2\sum a_i a_j > (4 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 9 + 16)/10 = 5$, deci $2\sum a_i a_j < -1$ și aceasta contrazice relația obținută în a doua fază a raționamentului, conducînd la o a doua soluție a problemei.

Soluția problemei II4-FI (vezi 4.2). Se poate aborda în diferite moduri problema determinării unui punct D pe AB (fig. 34), așa

încît $CD^2 = AD \cdot DB$, de exemplu notînd cu x lungimea lui AD și transcriind relația sub forma $x(c - x) = x^2 + b^2 - 2bx\cos A$. Dar problema noastră enunță și condiția necesară și suficientă pentru existența lui D, la care trebuie să ajungem și prin aceasta ne indică să părăsim calea aleasă, deși ea apare drept cea mai simplă, cel puțin la prima vedere.

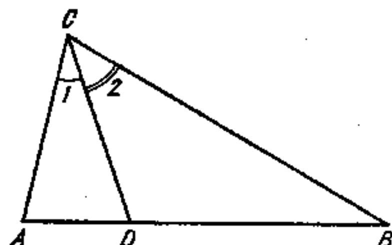


Fig. 34

Anume, sîntem conduși să scriem $\frac{CD}{AD} = \frac{\sin A}{\sin C_1}$, $\frac{CD}{BD} = \frac{\sin B}{\sin C_2}$, deci să scriem relația din enunț ($CD^2 = AD \cdot BD$) sub forma $\sin A \sin B = \sin C_1 \sin C_2$ și apoi sub forma $2\sin A \sin B = \cos(C_1 - C_2) - \cos(C_1 + C_2)$. Cum $C_1 + C_2 = C$, ajungem la $\cos(C_1 - C_2) = 2\sin A \sin B + \cos C$. De aici putem determina $C_1 - C_2$, cu condiția ca membrul drept, în care $\sin A$, $\sin B$ sînt pozitivi, să nu depășească 1. Odată $x = C_1 - C_2$ determinat, vom obține $C_1 = (C + x)/2$, $C_2 = (C - x)/2$; dacă alegem $x > 0$, atunci el va fi mai mic decît C și deci C_1, C_2 vor fi ambii pozitivi, ceea ce corespunde cu poziția lui D pe segmentul AB.

În concluzie, x (deci D) poate fi determinat dacă și numai dacă $2\sin A \sin B + \cos C \leqslant 1$ și aceasta este exact condiția din enunț deoarece $\cos C = 1 - 2\sin^2(C/2)$.

Soluția problemei I5-GB (vezi 4.2). a) Să începem prin a observa că dacă două triunghiuri înscrise în același cerc au unghiurile respectiv congruente, atunci arcele subîntinse de laturile corespunzătoare au aceleași măsuri, deci laturile acelor triunghiuri sînt respectiv congruente și deci triunghiurile sînt congruente.

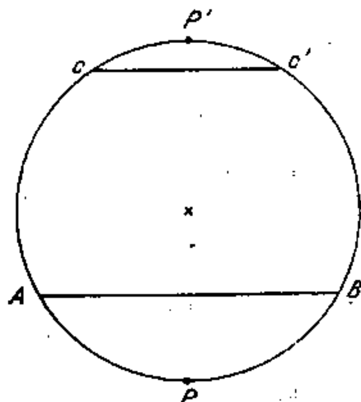


Fig. 35

Pentru a rezolva problema va fi suficient deci să stabilim că două din cele 15 triunghiuri au unghiurile respectiv congruente.

b) Cunoscînd unghiurile a, b, c ale triunghiului de rang k, să determinăm unghiurile a', b', c' ale triunghiului de rang $k + 1$.

Să începem cu fig. 35, în care $CC' \parallel AB$, P este mijlocul arcului AB, P' al lui CC', iar pozițiile punctelor pe cerc sînt

fixate prin măsurile arcelor socotite, într-un sens dat, de la un punct M dat pe cerc pînă la punctele respective. Vom avea $MP = (MA + MB)/2$, $MP' = (MC + MC')/2$, deci $180° = MP' - MP = (MC + MC' - MA - MB)/2$ şi $MC' = MA + MB - MC$, toate relaţiile fiind valabile modulo 360°.

Dacă B' este pe cerc şi $BB' \| AC$, vom obţine la fel $MB' = MA + MC - MB$, deci $MB' - MC' = 2(MC - MB)$, adică $B'C' = 2BC$, însă cum sînt două arce cu capetele în B', C', vom considera şi posibilitatea $B'C' = 360° - 2BC$ (peste tot, în formulele de mai sus, a fost vorba de măsurile arcelor respective). De aici deducem că a' are una din valorile $2a$, $180° - 2a$ dacă $0° < a \leqslant 90°$ şi una din valorile $2a - 180°$, $360° - 2a$ dacă $90° \leqslant a < 180°$.

Cum suma unghiurilor a', b', c' trebuie să fie 180°, rămîn cazurile

$$a' = 180° - 2a,\ b' = 180° - 2b,\ c' = 180° - 2c,\ \text{dacă } a,\ b,\ c \leqslant 90°,$$

$$a' = 2a - 180°,\ b' = 2b,\ c' = 2c,\ \text{dacă } a > 90°,$$

şi altele două analoage cu acesta. Într-adevăr, în aceste cazuri suma unghiurilor a', b', c' este 180° şi se observă că dacă înlocuim unul sau mai multe unghiuri ale unui triunghi, diferite toate de 90°, cu suplementarele lor, atunci unghiurile obţinute nu mai sînt unghiurile unui triunghi; singura „şansă" ca aceasta să se poată întîmpla este cînd înlocuim un unghi obtuz d cu $180° - d$ şi un unghi ascuţit e cu $180° - e$, dar suma devine $360° - d - e + f = 180° + 2f > 180°$, unde f este al treilea unghi.

c) Acum putem observa că dacă unul din triunghiuri este dreptunghic, atunci următorul degenerează (are un unghi nul). Dar ipoteza problemei exclude existenţa în triunghiul iniţial a unui unghi multiplu de 45°, în particular a unui unghi drept. Formulele de la b) arată că dacă unghiurile unuia din triunghiuri sînt toate multipli de 1°, dar nici unul multiplu de 45°, atunci acelaşi lucru este valabil şi pentru triunghiul următor. Deci nici unul din triunghiuri nu degenerează.

Dacă dorim să respectăm exact condiţiile din enunţul problemei, în special condiţia 1, atunci construcţia se va opri imediat ce vom întîlni un triunghi isoscel. Nu este adevărat că dacă unul din triunghiuri este isoscel şi cel precedent este isoscel. De exemplu, dacă $a = 1°$, $b = 91°$, $c = 88°$, atunci $a' = 2°$, $b' = 2°$, $c' = 176°$ sau, dacă unghiurile unuia sînt (1°, 46°, 133°), ale următorului sînt (2°, 92°, 86°), iar ale următorului (4°, 4°, 82°) etc. Nu vom căuta să înlăturăm această dificultate, ci vom presupune pur şi simplu că nu a apărut nici un triunghi isoscel.

d) Să observăm, pe baza formulelor de la b), că al doilea triunghi va avea toate unghiurile multipli de 2°, iar al treilea — multipli

de 4°. Cum 180° nu se divide cu 8°, nu putem continua acest raţionament, deci nu putem afirma că unghiurile celui de-al patrulea triunghi vor fi multipli de 8°. Dar putem afirma că unghiurile tuturor triunghiurilor începînd cu al treilea vor fi multipli de 4°.

Vom considera deci al treilea triunghi drept primul şi vom căuta să dovedim că printre primele 13 există două cu unghiurile respectiv congruente.

e) Raţionamentul de la sfîrşitul lui b) ne arată că, dacă a, b, c sînt unghiurile unui triunghi şi a', b', c' unghiurile altui triunghi, dacă nici unul din aceste unghiuri nu este drept şi dacă $a = a'$ sau $a = 180° - a'$ şi analog pentru b, b' şi c, c', atunci $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$.

Dacă notăm cu a_k, b_k, c_k unghiurile triunghiului k, atunci formulele de la b ne arată că $a_k \pm 2^{k-1}a_1$, $b_k \pm 2^{k-1}b_1$, $c_k \pm 2^{k-1}c_1$ sînt multipli de 180°. Dacă vom găsi un k aşa încît $2^k - 1$ să fie multiplu de 45, cum (vezi d) a_1, b_1, c_1 sînt multipli de 4°, va rezulta că $a_{k+1} \pm a_1$, $b_{k+1} \pm b_1$, $c_{k+1} \pm c_1$ sînt multipli de 180°, deci sînt fiecare 0° sau 180° şi, conform observaţiei precedente, va rezulta $a_{k+1} = a_1$, $b_{k+1} = b_1$, $c_{k+1} = c_1$ şi problema va fi rezolvată.

Pentru a găsi pe k (acesta, evident, trebuie să fie cel mult 12), teorema lui Euler, după care k = numărul de numere prime cu 45, pozitive, ce nu depăşesc 45, satisface $2^k - 1$ = multiplu de 45, nu este de ajuns, deoarece acel număr de numere este 24.

Să observăm însă că pentru ca un număr să se dividă cu 45 este necesar şi suficient ca acesta să se dividă cu 5 şi cu 9. Avem $2^4 = 1 + 5r$, deci şi $2^{4m} = 1 + 5r_m$, iar $2^6 = 1 + 9s$, deci $2^{6m} = 1 + 9s_m$ (de fiecare dată am folosit teorema Euler). Obţinem $2^{12} = 1 + 45q$, ceea ce rezolvă problema.

Observaţie. Finalul soluţiei a fost scurtat. Putem avea o idee mai precisă asupra şirului de triunghiuri. Să notăm cu (a_k, b_k) perechea formată din „primele două unghiuri" ale triunghiului de rang k. Atunci (a_{k+1}, b_{k+1}) este una din perechile $(2a_k, 2b_k)$, $(180° - 2a_k, 180° - 2b_k)$, $(2a_k - 180°, 2b_k)$, $(2a_k, 2b_k - 180°)$. Dacă interpretăm (a_k, b_k) ca un punct în plan, atunci $(a_{k+1}, b_{k+1}) = VT(a_k, b_k)$, unde T este omotetia de centru (0, 0) şi raport 2, iar V este identitatea, simetria S_1 faţă de (90°, 90°), translaţia S_2 cu 180° către stînga axei x sau translaţia S_3 cu 180° către partea de jos a axei y. Deci $(a_k, b_k) = V_k T V_{k-1} T \ldots \ldots V_2 T(a_1, b_1)$, unde V_i sînt, fiecare, una din cele patru transformări descrise.

Să observăm că $TS_1(a, b) = (360° - 2a, 360° - 2b) = S_1 S_2 S_3 T(a, b)$, $TS_2 = S_2^2 T$, $TS_3 = S_3^2 T$, relaţii ce ne permit să transformăm formula de mai sus în $(a_k, b_k) = ST^{k-1}(a_1, b_1)$, unde S este identitatea sau un produs de transformări de forma S_1, S_2, S_3 (se deplasează succesiv T spre dreapta).

La fel vom putea deplasa S_1 spre stînga, utilizînd relaţiile $S_2 S_1 = S_1 S_2^{-1}$, $S_3 S_1 = S_1 S_3^{-1}$. Dacă ţinem seama şi de S_1^2 = identitatea, vom ajunge la $(a_k, b_k) = VUT^{k-1}(a_1, b_1)$, unde V este S_1 sau identitatea, U este un produs de translaţii de mărimi 180° de-a lungul axelor x sau y, deci U este o translaţie, al cărei vector are ambele componente multipli de 180°.

$T^{k-1}(a_1, b_1) = (2^{k-1}a_1, 2^{k-1}b_1)$, U este translația (de vector avînd ambele componente multipli de 180°) care aduce punctul $T^{k-1}(a_1, b_1)$ în pătratul $\{(a, b) \mid 0° \leqslant a < 180°, 0° \leqslant b < 180°\}$, iar V este identitatea dacă s-a ajuns în jumătatea de stînga jos a pătratului și simetria față de centrul pătratului în caz contrar.

Dacă $2^k - 1$ se divide cu 45°, atunci $UT^k(a_1, b_1) = (a_1, b_1)$ etc.

Soluția problemei II5-BG (vezi 4.2). Fiecare dreptunghi va conține un număr par de pătrățele, anume $2a_1, \ldots, 2a_p$. Vom avea $a_1 + \ldots + a_p = 32$. De asemenea $a_1 \geqslant 1, \ldots, a_p \geqslant p$, deci $32 \geqslant 1 + \ldots + p = p(p+1)/2$, $p^2 + p - 64 \leqslant 0$; valoarea maximă a lui p ce satisface această inegalitate este $p = 7$.

Fie $a_i = i + b_i$. Din $a_1 + \ldots + a_7 = 32$ rezultă $b_1 + \ldots + b_7 = 4$. Din $a_i < a_{i+1}$ rezultă $b_i \leqslant b_{i+1}$. Obținem cazurile:

a) $b_7 = 4$, $b_6 = \ldots = b_1 = 0$;
d) $b_7 = 2$, $b_6 = b_5 = 1$, $b_4 = \ldots = b_1 = 0$;

b) $b_7 = 3$, $b_6 = 1$, $b_5 = \ldots = b_1 = 0$;
e) $b_7 = b_6 = b_5 = b_4 = 1$, $b_3 = b_2 = b_1 = 0$.

c) $b_7 = b_6 = 2$, $b_5 = \ldots = b_1 = 0$;

Acestea corespund la

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a	1	2	3	4	5	6	11
b	1	2	3	4	5	7	10
c	1	2	3	4	5	8	9
d	1	2	3	4	6	7	9
e	1	2	3	5	6	7	8

Cazul a) este imposibil, deoarece din tabla de șah nu putem tăia un dreptunghi cu 22 de pătrățele — una din dimensiunile lui ar trebui să depășească tabla... Celelalte cazuri sînt posibile, după cum ne arată fig. 36, unde am scris în afara pătratului dimensiunile

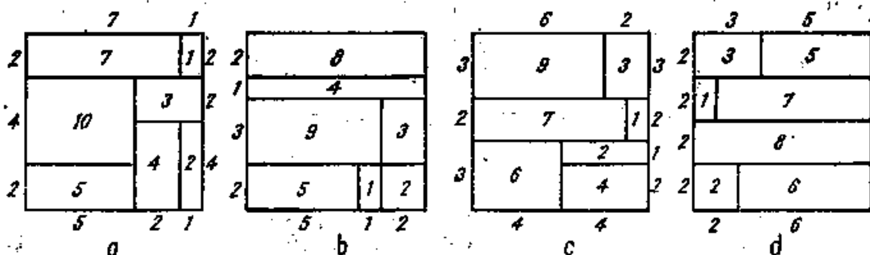


Fig. 36

iar în interiorul fiecărui dreptunghi numărul de pătrățele albe ce-l conține. Abia după construirea primei din cele patru descompuneri putem afirma că p maxim este 7.

Soluția problemei I6-RO (vezi 4.2). Expresia din enunț este „jumătate" dintr-o dezvoltare a unui binom Newton. Să scriem deci

$$(1+2^{3/2})^{2n+1}=\sum_{r=0}^{2n+1}C_{2n+1}^{r}(2^{3/2})^{r}=\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k}2^{3k}+\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}2^{3k}2^{3/2},$$

adică $(1+\sqrt{8})^{2n+1}=u_n+v_n\sqrt{8}$ cu u_n, v_n întregi; se pune problema să dovedim că, oricare ar fi n, v_n nu se divide cu 5.

La fel se obține și relația $(1-\sqrt{8})^{2n+1}=u_n-v_n\sqrt{8}$. Înmulțite, cele două relații dau $(-7)^{2n+1}=u_n^2-8v_n^2$. Membrul stîng este congruent modulo 5 cu $(-2)^{2n+1}=-2\cdot 4^n=-2\cdot(-1)^n=\pm 2$. Dacă v_n ar fi divizibil cu 5, ar urma că u_n^2 este congruent cu ± 2 modulo 5, ceea ce se dovedește a fi imposibil: orice număr, deci și u_n, este congruent modulo 5 cu 0, ± 1 sau ± 2, deci pătratul său este congruent modulo 5 cu 0, 1 sau 4, în nici un caz cu ± 2.

Soluția problemei II6-SU (vezi 4.2). Un cuvînt ce nu conține nici un șir interzis îl vom numi admis.

Să notăm cu a_n numărul cuvintelor admise de lungime n. Să obținem o relație între aceste numere. Din fiecare din cele a_n cuvinte admise de lungime n putem forma trei cuvinte de lungime $n+1$, adăugînd la sfîrșit una din cele trei litere. Un cuvînt astfel obținut poate însă să conțină șiruri interzise, dar numai la sfîrșitul său (nu printre primele n litere).

Pentru fiecare $k=2, 3, \ldots, n+1$ există cel mult un șir interzis de lungime k (ce poate apărea la sfîrșitul unui astfel de cuvînt), iar celelalte $n+1-k$ litere de la început formează un șir admis. Obținem relația $a_{n+1}\geqslant 3a_n-a_{n-1}-\ldots-a_1-1$. În plus, condițiile problemei spun că $a_1=3$.

Nu pare a fi posibil a demonstra prin inducție direct relația $a_n>0$. Trebuie aleasă alta care s-o implice. Cel mai simplu pare de demonstrat relația $a_n\geqslant a_{n-1}+\ldots+a_1+1$: pentru $n=1$ se verifică imediat, iar din valabilitatea ei pentru n rezultă

$$a_{n+1}\geqslant a_n+2a_n-(a_{n-1}+\ldots+a_1+1)\geqslant$$

$$\geqslant a_n+(a_{n-1}+\ldots+a_1+1).$$

Inducția reușește și cu relația $a_n\geqslant 2a_{n-1}$. Să notăm $a_0=1$; se observă că pentru $n=1$ relația este adevărată; dacă ea este adevărată pentru orice $k\leqslant n$, rezultă $a_n\geqslant 2a_{n-1}\geqslant\ldots\geqslant 2^{n-1}a_1\geqslant 2^n a_0$,

deci $a_{n-k} \leqslant 2^{-k}a_n$ și $a_{n+1} \geqslant 3a_n - (2^{-1} + \ldots + 2^{-n})a_n \geqslant 3a_n - a_n = 2a_n$, încheind inducția.

Cum „ghicim" relația, căreia să-i dăm apoi o demonstrație prin inducție? De exemplu, calculînd cîțiva termeni b_n conform cu $b_1 = 3$, $b_{n+1} = 3b_n - b_{n-1} - \ldots - b_1 - 1$, obținem $b_2 = 9 - 1 = 8$, $b_3 = 24 - 4 = 20$, $b_4 = 60 - 12 = 48$, $b_5 = 144 - 32 = 112$, $b_6 = 336 - 80 = 256$ etc.

Să observăm însă că, dacă nu țineam seama de faptul că primele $n + 1 - k$ litere ale fiecăruia din cuvintele formate reprezintă un cuvînt admis și deduceam că $a_{n+1} \geqslant 3a_n - 3^{n-1} - \ldots - 3 - 1$, nu reușeam să rezolvăm problema. Într-adevăr, formînd după același principiu un șir b_n, obțineam $b_{n+1} = 3b_n - (1/2)\cdot 3^n + (1/2)$, ecuație ce are ca soluții $b_n = c\cdot 3^n - (1/6)n\cdot 3^n - (1/4)$, care devin negative cînd n este destul de mare.

4.4. Alegerea problemelor de concurs

Discuțiile și votarea au decurs fără prea multe controverse. Au fost alese problemele I1-US, II2-NL, I3-SE, II4-FI, II5-BG, I6-RO, deci trei din setul de bază, trei din cel de rezervă. A descrie argumentele acestei alegeri, expuse în discuții sau avute în minte, ar însemna să reconsiderăm cele prezentate în 1.2; însă toate problemele, după cum se poate vedea și din soluții, au stîrnit „simpatie". Ne mărginim a observa că problema I5-GB a apărut a reclama prea mult timp de la un concurent pentru a-i preciza toate detaliile. Cu această ocazie remarcăm că în juriu se acordă multă atenție formulării problemelor, așa încît nici o traducere a lor să nu riște să fie echivocă sau să le răpească din timp concurenților pentru a o „descifra". Dacă I5-GB ar fi fost aleasă pentru concurs, cu siguranță că s-ar fi precizat, de exemplu, problema în legătură cu cazul cînd unul din triunghiuri este isoscel (vezi sfîrșitul punctului c din soluția ei dată în 4.3) etc.

Ordinea problemelor și punctajele lor au fost decise astfel: *1* (I1-US) — 5 puncte, *2* (II4-FI) — 6 puncte, *3* (I6-RO) — 8 puncte; *4* (II5-BG) — 6 puncte, *5* (II2-NL) — 7 puncte, *6* (I3-SE) — 8 puncte.

4.5. Soluții deosebite date de concurenți, premii

Să începem prin a observa că la problema *3* (I6-RO) concurenții nu s-au prea orientat către soluția expusă în 4.3. Majoritatea celor ce au rezolvat-o au ajuns la o soluție ceva mai lungă.

Soluție a problemei 3 (I6-RO) (vezi 4.2). Să reamintim că era vorba de relația $(1+\sqrt{8})^{2n+1} = u_n + v_n\sqrt{8}$, cu u_n, v_n întregi; trebuia arătat că v_n nu se divide cu 5.

Concurenții au dedus din $u_{n+1} + v_{n+1}\sqrt{8} = (1+\sqrt{8})^{2n+3} = (u_n + v_n\sqrt{8})(1+\sqrt{8})^2$, $(1+\sqrt{8})^2 = 9 + 2\sqrt{8}$ relațiile de recurență $u_{n+1} = 9u_n + 16v_n$, $v_{n+1} = 2u_n + 9v_n$, le-au scris „modulo 5" $u_{n+1} = -u_n + v_n$, $v_{n+1} = 2u_n - v_n$, le-au iterat, direct sau matriceal, $u_{n+2} = 3u_n - 2v_n$, $v_{n+2} = -4u_n + 3v_n$, și apoi $v_{n+3} = -2v_n$ și acum problema s-a redus la a arăta că v_0, v_1, v_2 nu se divid cu 5, numere ușor de calculat: $v_0 = 1$, $u_0 = 1$ (direct), $v_1 = 2u_0 - v_0 = 1$, $u_1 = -u_0 + v_0 = 0$, $v_2 = 2u_1 - v_1 = -1$ (toate mod 5).

Această soluție deschide mai multe perspective de stabilire a unor fapte noi decît cea prezentată în 4.3.

Dintre cele șase probleme de concurs numai problema *5* (II2-NL) a condus la o mare diversitate de soluții.

Soluție a problemei 5 (II2-NL) (vezi 4.2). Este o soluție bazată pe cunoștințe de analiză matematică, anume pe teorema Darboux. Funcția S din enunț este continuă, definită pe mulțimea conexă $(0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty)$. Imaginea sa va fi deci un interval, care-și poate conține sau nu fiecare din capete, poate fi eventual și infinit (utilizînd „segmente" putem evita funcțiile de patru variabile, lucrînd numai cu cele de una).

Să observăm că

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d} >$$

$$> \frac{a}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d} +$$

$$+ \frac{d}{a+b+c+d} = 1$$

și

$$S < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{c+d} = 2.$$

Pe de altă parte, avem $\lim_{a,d\to 0} S = \frac{b}{b+c} + \frac{c}{b+c} = 1$ pentru b, $c > 0$ fixați și $\lim_{a,c\to 0} S = \frac{b}{b} + \frac{d}{d} = 2$ pentru b, $d > 0$ fixați.

Aceste fapte sînt suficiente pentru a trage concluzia că mulţimea valorilor lui S, cînd a, b, c, d parcurg $(0, \infty)$, este intervalul deschis $(1, 2)$.

Altă soluţie a problemei 5 (II2-NL) (vezi 4.2). Această soluţie este bazată pe o idee a unui concurent, cea de a utiliza proprietăţi de monotonie ale funcţiei S de patru variabile. Trebuie remarcat însă că lucrarea respectivă a conţinut la această problemă numai ideea de rezolvare, obţinînd 2 din cele 7 puncte posibile.

Pentru coordonare este important a şti dacă o cale abordată de un concurent duce sau nu la o soluţie. Evident însă că punctajul se acordă numai pe baza a ceea ce figurează efectiv în lucrare. Noi însă, fără a fi citit încercările sale, nu am fi ajuns să credem căo astfel de metodă poate duce la soluţie.

Să presupunem a, b, c pozitivi fixaţi şi să scriem

$$S(a, b, c, d_1) - S(a, b, c, d_2) =$$

$$= \frac{a}{a+b+d_1} - \frac{a}{a+b+d_2} + \frac{c}{b+c+d_1} -$$

$$- \frac{c}{b+c+d_2} + \frac{d_1}{a+c+d_1} - \frac{d_2}{a+c+d_2} =$$

$$= (d_2 - d_1)\left(\frac{a}{(a+b+d_1)(a+b+d_2)} + \frac{c}{(b+c+d_1)(b+c+d_2)} -\right.$$

$$\left. - \frac{a+c}{(a+c+d_1)(a+c+d_2)}\right) = (d_2 - d_1)\left(\frac{a}{(a+b+d_1)(a+b+d_2)} -\right.$$

$$- \frac{a}{(a+c+d_1)(a+c+d_2)} + \frac{c}{(b+c+d_1)(b+c+d_2)} -$$

$$\left. - \frac{c}{(a+c+d_1)(a+c+d_2)}\right).$$

Dacă $c = b = a$, atunci expresia este nulă. Dacă $a = b = c$ nu este adevărat, iar dacă $d_1 < d_2$ şi $c \geqslant b$, $a \geqslant b$, atunci această expresie este pozitivă, iar dacă $d_1 < d_2$ şi $c \leqslant b$, $a \leqslant b$, atunci ea este negativă.

În concluzie $S(a, b, c, d)$ este constantă în d pentru $a = b = c$, este crescătoare în d pentru $b \geqslant \max(a, c)$ şi descrescătoare în d pentru $b \leqslant \min(a, c)$, strict în ambele cazuri dacă $a = b = c$ este fals. Pentru $\min(a, c) < b < \max(a, c)$ nu reţinem nici un rezultat.

Să observăm acum că valoarea lui S nu se schimbă dacă permutăm a cu c, dacă permutăm b cu d sau dacă permutăm simultan a cu b şi c cu d. Fiind dat un sistem (a, b, c, d) de numere pozitive, prin asemenea permutări putem face ca oricare din cele patru numere să ajungă în poziţia lui b, deci ca sistemul să ajungă în situaţia $b \leqslant \min(a, c)$, sau $b \geqslant \max(a, c)$.

În zona $b \leqslant \min(a, c)$ funcţia S este descrescătoare în d, deci $S(a, b, c, d) > S(a, b, c, +\infty) = 1 + b/(a + b + c)$ care este > 1 şi tinde la 1 cînd $b \to 0$, acţiune compatibilă cu $b \leqslant \min(a, c)$.

În zona $b \geqslant \max(a, c)$ funcţia S este crescătoare în d, deci $S(a, b, c, d) < S(a, b, c, +\infty) = 1 + b/(a + b + c)$, care este < 2 şi tinde la 2 cînd $b \to +\infty$, acţiune compatibilă cu $b \geqslant \max(a, c)$.

Pentru $a = b = c$ avem $S(a, b, c, d) = S(a, a, a, a) = 4/3$.

Dacă folosim şi teorema Darboux, cele stabilite sînt suficiente pentru a conduce cu uşurinţă la concluzia că mulţimea valorilor lui S este $(1, 2)$.

Este momentul să prezentăm alte iniţiative ale comitetului de organizare. Una, prevăzută şi în regulamentul de desfăşurare al Olimpiadei, cere ca numărul total de premii să fie cam 1/2 din numărul total de concurenţi, iar proporţiile între numerele de premii 1, 2 şi 3 să fie cît mai apropiate de 1 : 2 : 3. Altfel spus, premiul 1 să fie atribuit cam la 1/6 din premianţi, premiul 2 cam la 1/3, iar premiul 3 cam la 1/2. Aceste prevederi au rămas în vigoare la toate Olimpiadele ce au urmat.

Evident că la doi concurenţi ce au realizat acelaşi număr de puncte nu li se pot da premii diferite şi se mai pot concepe şi alte situaţii, în care aplicarea mecanică a acestor prevederi ar conduce la absurdităţi. Însă valoarea lor constă în oferirea unui principiu cît mai stabil de la o Olimpiadă la alta, care să facă posibilă compararea cît mai semnificativă a rezultatelor aceleiaşi delegaţii la Olimpiade diferite.

În cazul Olimpiadei din 1974 s-au acordat (evident în urma unui vot al juriului) : premiul 1, cu 38—40 puncte, la 10 concurenţi, premiul 2, cu 30—37 puncte, la 24 concurenţi şi premiul 3, cu 23—29 puncte, la 37 concurenţi. În total 71 premii ; au participat 140 concurenţi.

O altă iniţiativă este ca dreptul de a propune acordarea de premii speciale să-l aibă numai coordonatorii. Ei sînt într-adevăr cei mai în măsură să aplice principiile descrise la 3.11, avînd la dispoziţie informaţii, în legătură cu soluţiile date de concurenţi problemei ce au coordonat-o, ce depăşesc cu mult pe cele ale oricărei alte persoane.

La Olimpiada din 1974 coordonatorii şi-au făcut din plin datoria şi în acest sens, ajungînd ca, la propunerile lor, să se voteze în juriu 3 premii speciale în condiţii în care, după cum am arătat, nu au prea apărut soluţii cu mult deosebite de cele ale majorităţii concurenţilor ce au reuşit să rezolve problemele respective. Au fost scoase însă în evidenţă soluţii ce se distanţau prin acurateţea şi expeditivitatea raţionamentelor şi redactărilor.

În sfîrşit, un concurent împlinise 20 ani chiar în ziua concursului şi obţinuse premiul 3. Juriul a fost solicitat să valideze acest rezultat şi a fost de acord ; regulamentul prevedea ca în timpul concursului un candidat să nu aibă 20 ani împliniţi !

4.6. Probleme deosebite ridicate de coordonare

Astfel de probleme sînt, la fiecare Olimpiadă, foarte diverse, chiar şi ca importanţă. De aceea ne vom referi la două ce au apărut drept mai semnificative decît altele.

În legătură cu problema *1* (I1-US, vezi 4.2). În soluţia prezentată la 4.3 am afirmat că de la concurenţi se aşteptau soluţii cît mai „inteligente". Pe de altă parte, pentru o problemă rezolvată complet şi corect unui concurent i se atribuie, conform regulilor Olimpiadei, numărul maxim respectiv de puncte, indiferent că soluţia sa este etichetată ca „neelegantă", „ocolită", pentru a trece sub tăcere alte adjective mai puţin academice. Cum s-au împăcat, la coordonarea problemei *1*, aceste principii ? Un concurent ce a încercat să rezolve mecanic această problemă (să presupunem că a avut loc o partidă, ..., să presupunem că au avut loc 7 partide etc.) mai devreme sau mai tîrziu a greşit, omiţînd un argument, pierzînd un caz etc. Un astfel de concurent era penalizat mult mai grav decît unul care domina situaţia în sensul exemplificat la soluţia prezentată la 4.3.

Nu am auzit în cazul acestei probleme de nici o soluţie perfectă ce ar fi analizat orbeşte cazurile.

În legătură cu problema *5* (II2-NL, vezi 4.2). Am prezentat pentru această problemă o soluţie elementară (la 4.3), o soluţie a unui maestru în analiza matematică (la 4.5, prima soluţie) şi una mai stîngace, tot într-un stil „funcţional" (a doua de la 4.5). Fiecare din acestea a apărut în mintea unui concurent, ce a luptat cu armele ce le stăpînea. La 3.12 pledam în favoarea utilităţii unor cunoştinţe de

analiză matematică pentru un concurent la Olimpiada Internațională. Cele petrecute la coordonarea problemei 5 de aici ne determină să adăugăm „dar a unor cunoștințe temeinice".

Coordonarea acestei probleme a pus pe coordonatori și pe șefii de delegații în fața unor situații delicate, nu de conflict, ci de acord între ei, de tipul „acest concurent nu se poate spune că nu a făcut nimic la această problemă, dar nici nu se poate spune că a rezolvat-o", „cum să facem să fim corecți, dar nici să nu-l nedreptățim?". Era vorba de concurenți ce făcuseră afirmații „de analiză matematică" în legătură cu enunțul, la un nivel precar de corectitudine matematică în exprimare. Noroc de cele 7 puncte oferite pentru soluția completă ce au reprezentat o gamă largă pentru notare. De exemplu, întrebarea coordonatorilor, în legătură cu prima soluție a acestei probleme prezentată în 4.5, „pe ce bază afirmă concurentul că $(0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty)$ este conexă?" ne arată că Olimpiada Internațională nu încurajează utilizarea în rezolvarea problemelor a unor teoreme neînțelese sau înțelese numai în parte, deși orice soluție „doctă" este bine primită.

5

A 17-A OLIMPIADĂ INTERNAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ (Burgas, Bulgaria, 1975)

5.1. Organizare

La această Olimpiadă au participat 17 delegaţii : cea a Greciei, pentru prima dată, şi toate cele ce participaseră la a 16-a Olimpiadă, cu excepţia Cubei şi a Finlandei.

S-au definitivat măsurile privind excluderea contactului între şefii de delegaţii şi secunzii lor, pe de o parte, şi concurenţi, pe de alta, cu ocazia festivităţii de deschidere şi cu ocazia exercitării dreptului concurenţilor de a adresa, în prima jumătate de oră a fiecărei zi de concurs, întrebări şefilor lor de delegaţii, în legătură cu nelămuriri privind formularea problemelor propuse.

Următoarea procedură s-a încetăţenit de la această Olimpiadă şi de atunci nu s-a mai renunţat la ea. Întrebările se adresează de către concurenţi în scris, pe foi speciale de hîrtie, chiar de culoare specială. Acestea se aduc în juriu de către membri ai comitetului de organizare, şeful delegaţiei respective studiază întrebarea, precizează un răspuns şi apoi întrebarea şi răspunsul propus se citesc în plenul juriului, care îl aprobă sau îl modifică şi apoi votează textul definitiv al răspunsului, care se trimite pe aceeaşi cale concurentului. Juriul nu se sfieşte să decidă „nici un răspuns“ la întrebări ce apar deplasate.

Iată un exemplu de întrebare adresată juriului de un concurent (în legătură cu problema *6*, 10-GB, propusă la această Olimpiadă, vezi 5.2) : „Ce este un polinom cu două variabile?“. Juriul pare stupefiat ! Dar şeful delegaţiei respective explică faptul că, în conformitate cu programa analitică din ţara sa, pentru elevul respectiv un polinom este pur şi simplu un şir $(a_0, \ldots, a_n, \ldots)$ de numere reale, dintre care numai un număr finit sînt nenule. Ce este acum ciudat în

întrebarea elevului? Elevului i s-a explicat, în scris, pe scurt, ce este un polinom cu două variabile. Un astfel de episod ne aduce însă aminte că un elev intră în contact cu matematica nu numai în școala sa și la examene. În lume există oameni care nu sînt matematicieni, dar au înțeles o bună parte din matematică; printre aceștia există și foști participanți la Olimpiada Internațională de Matematică (vezi 2.8). Pregătirea ce o capătă un elev în școală trebuie să-l ferească de a fi handicapat de necunoașterea unor noțiuni, considerate printre cele de bază în cercuri largi de persoane ce au de a face cu matematica.

5.2. Problemele propuse juriului

Acestea au fost numerotate de la 1 la 17, indicîndu-se pentru fiecare și țara ce a propus-o.

1-FR. *Un lac are 6 porturi. Să se stabilească dacă pot fi precizate sau nu un număr de itinerarii cu proprietățile:*

a) *Fiecare itinerar conține exact trei porturi.*

b) *Două itinerarii diferite nu pot să conțină aceleași trei porturi.*

c) *Oricum am alege două porturi diferite, există exact două itinerarii ce le conțin.*

2-CS. *Se consideră două șiruri de numere reale* $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$ *și* $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n$. *Fie* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *o permutare oarecare a numerelor* $y_1, y_2, \ldots, y_n$. *Să se demonstreze că* $\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$.

3-US. *Să se afle partea întreagă a sumei tuturor numerelor* $n^{-2/3}$, *cînd n parcurge valorile* $1, 2, \ldots, 10^9$.

4-SE. *Fie* $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ *numere reale astfel încît* $0 \leqslant a_n \leqslant 1$ *și* $a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} \geqslant 0$ *pentru orice* $n = 1, 2, \ldots$ *Să se demonstreze că* $0 \leqslant (n+1)(a_n - a_{n+1}) \leqslant 2$, *oricare ar fi* $n = 1, 2, \ldots$

5-SE. *Fie M mulțimea tuturor numerelor întregi pozitive ce nu conțin cifra 9 în scrierea lor zecimală. Fie* $x_1, \ldots, x_n$ *elemente din M, distincte două cîte două. Să se demonstreze că* $\sum_{j=1}^{n} x_j^{-1} < 80$.

6-SU. *Fie A suma cifrelor numărului* 16^{16} *și fie B suma cifrelor lui A. Să se afle suma cifrelor lui B, fără a calcula* 16^{16}. *Se lucrează numai cu sistemul zecimal de scriere.*

7-DD. *Fie x, y numere reale, $x + y = 1$. Să se demonstreze că*

$$x^{m+1}\sum_{j=0}^{n} C_{m+j}^{j} y^{j} + y^{n+1}\sum_{i=0}^{m} C_{n+i}^{i} x^{i} = 1,$$

oricare ar fi $m, n = 0, 1, 2, \ldots$

8-NL. *În planul unui triunghi oarecare ABC, în exteriorul acelui triunghi, se construiesc triunghiurile ABR, BCP, CAQ astfel ca*

$$\sphericalangle PBC = \sphericalangle CAQ = 45^\circ,\ \sphericalangle BCP = \sphericalangle QCA = 30^\circ,$$

$$\sphericalangle ABR = \sphericalangle RAB = 15^\circ.$$

Să se demonstreze că a) $\sphericalangle QRP = 90^\circ$ *și* b) $QR = RP$.

9-NL. *Fie f o funcție continuă, definită pe $[0, 1]$. Fie $G(f)$ graficul ei, adică $G(f) = \{(x, y) | \in R^2, 0 \leqslant x \leqslant 1, y = f(x)\}$. Să notăm $f_a(x) = f(x - a)$, deci*

$$G(f_a) = \{(x, y) | \in R^2, a \leqslant x \leqslant a + 1, y = f(x - a)\}.$$

Este adevărat că pentru orice $a \in (0, 1)$ există o funcție continuă f, definită pe $[0, 1]$, astfel ca $f(0) = f(1) = 0$ și așa încît $G(f)$ și $G(f_a)$ să fie disjuncte?

10-GB. *Să se determine polinoamele P de două variabile astfel ca:*
a) *Pentru orice t, x, y reali să avem $P(tx, ty) = t^n P(x, y)$, unde n este un întreg pozitiv, același pentru toți t, x, y.*
b) *Pentru orice a, b, c reali avem $P(a + b, c) + P(b + c, a) + P(c + a, b) = 0$.*
c) $P(1, 0) = 1$.

11-GB. *Fie $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ un șir infinit de numere întregi strict pozitive, astfel ca $a_k < a_{k+1}$ pentru orice k. Să se demonstreze că există o infinitate de termeni a_m, care pot fi scriși sub forma $a_m = xa_p + ya_q$, cu x, y întregi strict pozitivi și $p \neq q$.*

12-GR. *Se consideră $0 < x_1 < \ldots < x_n < \pi/2$. Să se demonstreze că*

$$\sin 2x_1 + \ldots + \sin 2x_{n-1} - \sin(x_1 - x_2) - \ldots - \sin(x_{n-1} - x_n) <$$

$$< \frac{\pi}{2} + \sin(x_1 + x_2) + \ldots + \sin(x_{n-1} + x_n).$$

13-RO. *Fie $A_0, \ldots, A_n$ puncte din plan astfel încît:*

a) $A_0A_1 \leqslant \frac{1}{2} A_1A_2 \leqslant \ldots \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} A_{n-1}A_n$,

b) $0 < \sphericalangle A_0A_1A_2 < \sphericalangle A_1A_2A_3 < \ldots < \sphericalangle A_{n-2}A_{n-1}A_n < 180°$,

unde toate unghiurile considerate au aceeaşi orientare.

Să se demonstreze că segmentele A_kA_{k+1} *şi* A_mA_{m+1} *nu se intersectează, oricare ar fi k şi m astfel încît* $0 \leqslant k \leqslant m-2$, $m \leqslant n-1$.

14-YU. *Fie* $x_0 = 5$ *şi* $x_{n+1} = x_n + x_n^{-1}$, *pentru* $n = 0, 1, \ldots$ *Să se demonstreze că* $45 < x_{1000} < 45{,}1$.

15-SU. *Se pot construi pe un cerc de rază 1 un număr de 1975 puncte distincte, astfel încît distanţa (măsurată pe coardă) între oricare două din aceste puncte să fie un număr raţional?*

16-SU. *Se consideră un poliedru regulat P şi un proiector aşezat în centrul O al lui P şi care luminează exact o faţă a lui P. Să se demonstreze că proiectorul poate fi rotit în jurul lui O pînă cînd ajunge într-o poziţie din care nu luminează nici unul din centrele feţelor lui P.*

17-GB. *Se consideră o sferă de rază 1 şi patru puncte A, B, C, D pe suprafaţa ei aşa încît* $AB \cdot AC \cdot AD \cdot BC \cdot BD \cdot CD = 2^9 \cdot 3^{-3}$. *Să se demonstreze că ABCD este un tetraedru regulat.*

Problemele fiind multe şi nefiind prezentate grupate în vreun fel, vom proceda ca în cap. 3 şi vom prezenta soluţiile lor, grupîndu-le, pe cît posibil, după domeniile de matematică în care se încadrează.

5.3. Problema de analiză

Este vorba de 9-NL, care nu a fost acceptată deoarece în enunţul ei figurează noţiunea de funcţie continuă, care nu face parte din programa multor ţări participante.

Soluţia problemei 9-NL (vezi 5.2). Problema cere să se stabilească dacă o anumită afirmaţie este adevărată sau falsă. Afirmaţia de care este vorba se dovedeşte a fi falsă.

Este într-adevăr vorba de o afirmaţie de tipul „oricare ar fi a, are loc...“. Pentru a-i dovedi falsitatea, este suficient să găsim un $a \in (0, 1)$ astfel încît „să nu aibă loc...“.

Cel mai simplu se arată inexistenţa funcţiei f cu proprietăţile din enunţ pentru $a = 1/2$. Într-adevăr, vom avea $f(0) = f(1) = 0$, deci $f_{1/2}(1/2) = 0$. Din $G(f) \cap G(f_{1/2}) = \emptyset$ rezultă $f(1/2) \neq 0$.

Dacă $f(1/2) > 0$, atunci obținem $f_{1/2}(1) > 0$ și deci $f - f_{1/2}$ este pozitivă în $1/2$ și negativă în 1. Conform proprietății Darboux va exista $x \in (1/2, 1)$ astfel ca $f(x) = f_{1/2}(x)$, contrar cu $G(f) \cap G(f_{1/2}) = \emptyset$.

Dacă $f(1/2) < 0$, se raționează analog (vezi și fig. 37).

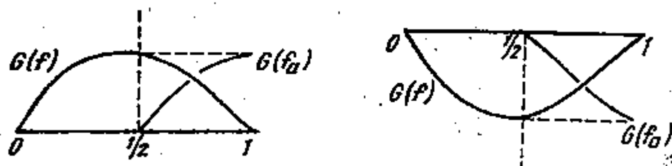


Fig. 37

Cu aceasta problema este rezolvată, dar rămîne întrebarea „pentru care $a \in (0, 1)$ afirmația din enunț este adevărată și pentru care a ea este falsă?".

Să începem prin a arăta că dacă $a = 1/n$, unde $n \in \{2, 3, \ldots\}$, atunci nu există nici o funcție f cu proprietățile din enunț. La fel ca mai sus vom obține $f(1/n) \neq 0$ pentru o astfel de funcție. Să presupunem că $f(1/n) > 0$ (dacă $f(1/n) < 0$, atunci înlocuim f cu $-f$ și obținem, de asemenea, o funcție cu proprietățile din enunț, și, în plus, pozitivă în $1/n$), deci $f - f_{1/n} > 0$ în $1/n$. Pe baza proprietății Darboux, ținînd seama că $G(f) \cap G(f_{1/n}) = \emptyset$, vom obține ca mai sus $f - f_{1/n} > 0$ pe întreg $[1/n, 1]$, deci $f_{1/n}(x) < f(x)$ pentru orice $x \in [1/n, 1]$. Deducem apoi $0 = f_{1/n}(1/n) < f(1/n) = f_{1/n}(2/n) < < f(2/n) = f_{1/n}(3/n) < \ldots$ și ajungem astfel la $f(n/n) = f(1)$, care rezultă pozitiv, contrar cerinței $f(1) = 0$.

Să arătăm acum că dacă $a \neq 1/n$ pentru orice $n = 2, 3, \ldots$, atunci există o funcție f cu proprietățile din enunț. Fie $na < 1 <$

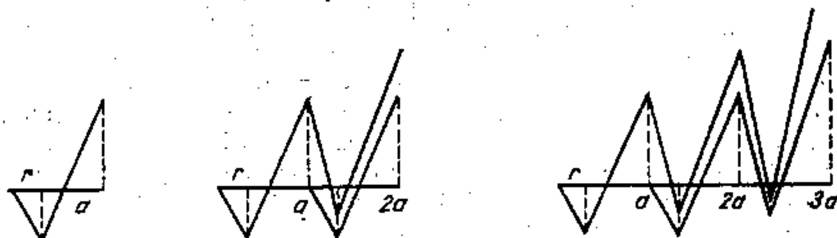


Fig. 38

$< (n + 1)a$ și $r = 1 - na$, deci $0 < r < a$. Să urmărim întîi construcția lui f, prin graficul ei, succesiv pe intervalele $[ka, (k + 1)a]$, în fig. 38. O expresie explicită pentru o funcție f cu proprietățile cerute

este următoarea. Graficul $G(f)$ este poligonul de vîrfuri (ka, kb), $(ka + r, -(n-k)c)$, unde $k = 0, 1, \ldots, n$ iar $b, c > 0$ sînt fixați, adică $f(ka) = kb$, $f(ka + r) = -(n-k)c$ și f este liniară pe fiecare din intervalele $[ka, ka + r]$, $[ka + r, (k+1)a]$.

Pentru a verifica faptul că f are proprietățile din enunțul problemei să observăm că $f(0) = f(0 \cdot a) = 0 \cdot b = 0$, $f(1) = f(na + r) = -(n-n)c = 0$, că $f_a(ka) = f((k-1)a) = (k-1)b < f(ka)$ pentru $k = 1, \ldots, n$ și că $f_a(ka + r) = f((k-1)a + r) = -(n - k + 1)c < -(n-k)c = f(ka + r)$ pentru $k = 1, \ldots, n$ și deci $f(x) \neq f_a(x)$ pentru orice $x \in [a, 1]$, deoarece două funcții liniare g și h pentru care $g(u) < h(u)$ și $g(v) < h(v)$ satisfac relația $g(x) < h(x)$ pentru orice $x \in [u, v]$.

Să observăm însă că problema putea fi enunțată, presupunînd f „liniară pe porțiuni“, fără a apela la noțiunea de continuitate, ci numai la cea de poligon cu anumite proprietăți [graficul $G(f)$], situație în care nu ar fi fost eliminată cu atita ușurință. Dar în listă mai erau probleme de geometrie...

5.4. Alte două probleme ce pot fi legate, dacă dorim, de analiză

Soluția problemei 3-US (vezi 5.2). Problema pare a însemna estimarea valorii unei sume integrale pentru funcția $x^{-2/3}$. Primitiva ei este $3x^{1/3}$. A începe prin a scrie $3((n + 1/2)^{1/3} - (n - 1/2)^{1/3})$ s-ar dovedi un exces de zel în ceea ce privește precizia aproximării și, mai mult, ar da dificultăți în final.

Vom începe deci cu $3((n+1)^{1/3} - n^{1/3}) = 3/((n+1)^{2/3} + (n+1)^{1/3}n^{1/3} + n^{2/3})$, start accesibil însă, ca de fapt și toată soluția ce urmează, unui concurent familiarizat cu „raționalizarea expresiilor conținînd radicali“ ... Deducem $n^{-2/3} > 3((n+1)^{1/3} - n^{1/3}) > (n+1)^{-2/3}$, adică $3((n+1)^{1/3} - n^{1/3}) < n^{-2/3} < 3(n^{1/3} - (n-1)^{1/3})$ și ar urma să sumăm. Dacă sumăm de la 1 la k termenii extremi, vor fi $3((k+1)^{1/3} - 1)$ și $3k^{1/3}$ și diferența dintre ei este „aproape 3“, ceea ce nu permite nici o concluzie privind partea întreagă a expresiei cuprinse între ei. Dacă însă vom suma de la 2 la k, atunci termenii extremi vor fi $3((k+1)^{1/3} - 2^{1/3})$ și $3(k^{1/3} - 1)$ și diferența dintre ei va fi $3 \cdot 2^{1/3} - 3 - 3((k+1)^{1/3} - k^{1/3}) < 3 \cdot 2^{1/3} - 3$, care este <1, fapt care revine la $3 \cdot 2^{1/3} < 4$ și se verifică prin ridicare la puterea a treia : $3^3 \cdot 2 < 4^3$, adică $54 < 64$.

Cu aceasta nu sîntem însă siguri că vom putea preciza partea întreagă a sumei din enunț. Trebuie să observăm și că termenul

de la început, lăsat la o parte în sumare, este 1 şi că sumarea se face pînă la $k = 10^9$, ceea ce conduce la un $k^{1/3} = 10^3$ întreg.

Obţinem $3(10^3 - 1) + 1 > \sum_{n=1}^{k} n^{-2/3} > 3(10^3 - 1) - a + 1$, unde $k = 10^9$, $a < 1$, conform celor stabilite mai sus. Deci partea întreagă a sumei din enunţ este $3(10^3 - 1) = 2997$.

Soluţia problemei 5-SE (vezi 5.2). Problema aminteşte seria armonică. Cum aici este vorba de scrierea zecimală, vom grupa termenii situaţi între puterile consecutive ale lui 10. Anume, numerele întregi x pentru care $10^{k-1} \leqslant x < 10^k$ au k cifre, pentru prima cifră avem 8 posibilităţi (1, 2, ..., 8), iar pentru fiecare din celelalte $k - 1$ cîte 9 posibilităţi (0, 1, ..., 8), aceasta pentru a obţine numere din M. Aceste numere x sînt toate $\geqslant 10^{k-1}$. Deci porţiunea din suma din enunţ ce conţine toţi x_j cu proprietatea $10^{k-1} \leqslant x_j < 10^k$ are cel mult $8 \cdot 9^{k-1}$ termeni, fiecare din ei nedepăşind $10^{-(k-1)}$; în consecinţă valoarea acestei porţiuni din sumă este mai mică decît $8 \cdot (9/10)^{k-1}$.

Toată suma este formată dintr-un număr finit de astfel de porţiuni, ce corespund la valori k din mulţimea $\{1, 2, 3, \ldots\}$, deci valoarea ei este majorată de suma progresiei geometrice respective, care este $8(1 - (9/10))^{-1} = 80$, q.e.d.

5.5. Două probleme în legătură cu numere întregi

Evident că şi problema precedentă (5-SE, rezolvată în 5.4) ar putea fi încadrată în acest paragraf.

Soluţia problemei 6-SU (vezi 5.2). Se ştie că diferenţa dintre un număr şi suma cifrelor sale este un multiplu de 9. Aceasta ne permite să determinăm suma cifrelor lui B, abstracţie făcînd de un multiplu de 9. Într-adevăr, avem $16^{16} \equiv (-2)^{16}$, $(-2)^3 = -8 \equiv 1$, deci $(-2)^{15} \equiv 1$ şi $16^{16} \equiv (-2)^{15}(-2) \equiv -2 \equiv 7$, totul modulo 9.

Dacă vom reuşi să arătăm că suma cifrelor lui B nu depăşeşte 15, atunci va rezulta că această sumă a cifrelor este tocmai 7 şi problema va fi rezolvată. Dacă nu vom reuşi să arătăm acel fapt, problema va apărea drept mult mai dificilă.

Stabilirea inegalităţii de care este vorba este însă posibilă. Anume, 16^{16} are cel mult $2 \cdot 16 = 32$ cifre, deci despre suma cifrelor sale A putem afirma că $A \leqslant 9 \cdot 32 = 288$, despre suma B a cifrelor lui A că $B \leqslant 27$, iar despre suma cifrelor lui B chiar că aceasta este cel mult 10.

Soluția problemei 11-GB (vezi 5.2). Este surprinzător faptul că problema se simplifică dacă înlocuim cerința ei cu una mai puternică, anume dacă se cere în plus ca $y = 1$ și ca p și q să fie fixați, $p \neq q$. Cu alte cuvinte, vom demonstra că există doi indici diferiți p și q și o infinitate de indici m pentru care a_m se poate scrie ca $a_m = xa_p + a_q$ cu x întreg > 0.

Sub această formă problema se rezolvă astfel. Se alege un p arbitrar. Pentru $m > p$ se notează cu $f(m)$ clasa de resturi modulo a_p, căreia îi aparține a_m. Numărul de clase posibile este a_p, iar numărul de indici $m > p$ este infinit, deci există o clasă r, căreia îi va corespunde o infinitate de indici m, deci pentru care $M = \{m | m > p, a_m = r (\text{mod } a_p)\}$ este infinită. Luăm $q = \min M$ și considerăm toți indicii $m \in M$ diferiți de q și obținem astfel infinitatea de termeni cerută de problemă.

5.6. Problema de combinatorică

Soluția problemei 1-FR (vezi 5.2). Vom nota porturile cu 1, ..., 6.

a) Fie 123 unul din itinerarii (putem alege notațiile pentru ca aceasta să fie adevărat); fie 134 celălalt itinerar ce conține 13 (și aceasta se poate realiza prin alegerea notațiilor).

b) Care va fi celălalt itinerar ce va conține 14? Sau 124 sau 145 (al doilea caz realizat de asemenea prin alegerea notațiilor), dar nu poate fi însă 124, deoarece atunci 123, 124, 134 ar conține printre ele și cele două itinerarii ce trec prin 12, și cele două ce trec prin 13 și cele două ce trec prin 14. Ar trebui atunci să fie alte două itinerarii ce trec prin 15, dar pentru un astfel de itinerar nu rămîne decît posibilitatea 156.

Raționamentul de aici va mai fi folosit, în sensul că nu pot exista trei itinerarii de forma $a_1a_2a_3$, $a_1a_2a_4$, $a_1a_3a_4$.

În concluzie, celălalt itinerar ce va conține 14 va fi 145.

c) Vor trebui să fie două itinerarii ce conțin 16. Cum cele două itinerarii ce conțin 13 și cele două ce conțin 14 au fost deja puse în evidență și ele nu conțin 6, rezultă că prin 16 vor trece 126 și 156.

Cu aceasta toate itinerariile ce trec prin 1 au fost precizate, anume 123, 134, 145, 156, 162. Ele pun în evidență, în mulțimea porturilor diferite de 1, o ordine ciclică așa încît $1ab$ este un itinerar

dacă și numai dacă a și b sînt vecini în această ordine. Evident că această concluzie va fi valabilă relativ la orice port, nu numai relativ la 1.

d) Care va fi celălalt itinerar ce va trece prin 23? Din cauza itinerariilor 341, 312 și a celor stabilite la b), acesta nu poate fi 234, iar, din cauza 261, 213 și b), el nu poate fi 236. Rezultă că 235 va fi acel itinerar.

Analog stabilim care va fi celălalt itinerar ce va trece prin 26. Știm deja că acesta nu va fi 263, iar din 651, 612 și b) deducem că el nu va fi 265. El va fi deci 246.

e) Să scriem lista itinerariilor puse în evidență pînă acum, care trec prin 2, sub forma 246, 261, 213, 235. Cu aceasta ordinea ciclică relativă la 2 de care era vorba la c) este bine determinată și prin 2 rezultă că va mai trece itinerarul 245.

f) Continuarea se bazează exclusiv pe metoda de la e). Să scriem itinerariile cunoscute ce trec prin 4 : 415, 452, 426, . . ., 431 și se vede că trebuie adăugat 463.

Analog pentru 5 : 541, 516, . . ., 532, 524, deci se adaugă 563.

g) Se constată că nu mai avem ce adăuga :

314, 346, 365, 352, 321 și 615, 653, 634, 642, 621

sînt complete și satisfac cerințele de la c). Cerințele de la c) ne asigură, dacă le verificăm relativ la toate cele 6 porturi, fapt realizat în considerațiile noastre, că este satisfăcută cerința c) din enunțul problemei ; celelalte două cerințe sînt vizibil îndeplinite.

Deci răspunsul la problemă este „da !".

Ar fi interesant de găsit o descriere a celor 10 itinerarii obținute care să nu necesite enumerarea lor.

5.7. Cele două probleme relative la polinoame

Soluția problemei 7-DD (vezi 5.2). Relația de demonstrat nu apare drept unica posibilă ; asemenea relații se pot obține înmulțind $x + y - 1$ cu orice polinom în x, y.

Să vedem ce s-ar întîmpla dacă am substitui pur și simplu $y = 1 - x$ în relația de demonstrat. Prima sumă, cu factorul din față, ar conține numai termeni în x la puteri mai mari decît m. Deci va trebui în primul rînd să verificăm că $(1 - x)^{n+1} \sum_{i=0}^{m} C_{n+i}^{i} x^{i} - 1$ conține numai termeni în x la puteri mai mari decît m.

Modul cum intervine m în ultima afirmație determină pe un cunoscător al analizei matematice s-o formuleze astfel : $(1 - x)^{-n-1} = \sum_{i=0}^{\infty} C_{n+i}^{i} x^{i}$, care poate fi demonstrată, pentru $|x| < 1$, plecînd de la relația $(1 - x)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} x^{i}$, derivînd-o de n ori și obținînd

$$n!(1 - x)^{-n-1} = \sum_{i=n}^{\infty} A_{i}^{n} x^{i-n} = \sum_{i=0}^{\infty} A_{i+n}^{n} x^{i},$$

deci
$$(1 - x)^{-n-1} = \sum_{i=0}^{\infty} C_{i+n}^{n} x^{i}.$$

Dar demonstrația faptului că $(1 - x)^{n+1} \sum_{i=0}^{m} C_{n+i}^{i} x^{i} - 1$ este un polinom ce se divide cu x^{m+1} poate fi făcută și fără cunoștințe de analiză matematică, anume prin inducție. Pentru $n = 0$ aceasta rezultă din relația $(1 - x)(1 + x + \ldots + x^{m}) = 1 - x^{m+1}$. Dacă relația este adevărată pentru n, adică $(1 - x)^{n+1} \sum_{i=0}^{m} C_{n+i}^{i} x^{i} = 1 + x^{m+1} Q_{1}(x)$, atunci, înmulțind-o cu relația corespunzătoare pentru $n = 0$, obținem

$$(1 - x)^{n+2}\Big(\sum_{i=0}^{m} C_{n+i}^{i} x^{i}\Big)\Big(\sum_{i=0}^{m} x^{i}\Big) = 1 + x^{m+1} Q_{2}(x).$$

Pentru $0 \leqslant k \leqslant m$ coeficientul lui x^{k} în produsul celor două sume este $C_{n}^{0} + C_{n+1}^{1} + \ldots + C_{n+k}^{k}$ și, pentru a realiza pasul de inducție, va trebui să arătăm că acest coeficient este C_{n+1+k}^{k}, fapt ce-l vom stabili tot prin inducție, de data aceasta în raport cu k. Pentru $k = 0$ relația este evidentă, iar trecerea de la k la $k + 1$ se bazează pe $C_{n+1+k}^{k} + C_{n+k+1}^{k+1} = C_{n+2+k}^{k+1}$, relație cunoscută în analiza combinatorie.

Dar cu aceasta rezolvarea problemei nu s-a terminat. Dacă notăm cu $P(x, y)$ polinomul din enunț, noi am demonstrat numai că polinomul, de grad $m + n + 1$, $P(x, 1 - x) - 1$ are coeficienții termenilor de grade $0, 1, \ldots, m$ în x nuli ; despre ceilalți $n + 1$ coeficienți nu am stabilit nimic și metoda utilizată nu pare a deschide perspective în acest sens.

O altă idee ne permite însă să încheiem rezolvarea problemei. Același argument, care ne-a condus la concluzia că $R(x) = P(x, 1 - x) - 1$ se divide cu x^{m+1}, ne va conduce și la concluzia că $P(1 - y, y) - 1$ se divide cu y^{n+1}, adică $P(1 - y, y) - 1 = y^{n+1} T(y)$.

Înlocuind în această relație y cu $1 - x$, obținem $R(x) = P(x, 1-x) - 1 = (1 - x)^{n+1}T(1 - x)$, cu alte cuvinte, că $R(x)$ se divide și cu $(1 - x)^{n+1}$.

Deci $R(x)$, polinom de grad cel mult $m + n + 1$, se divide cu $x^{m+1}(1 - x)^{n+1}$, ceea ce nu este posibil decît dacă $R(x) = 0$, q.e.d.

Soluția problemei 10-GB (vezi 5.2). Condiția a) (care se formulează și „P este un polinom omogen") permite exprimarea polinomului necunoscut P de două variabile cu ajutorul unuia (tot necunoscut) de o singură variabilă. Să nu ne grăbim însă să scriem $P(x, y) = y^n P(x/y, 1)$, evident pentru $y \neq 0$ ..., ci să privim întîi cu atenție condiția b), observînd că în cei trei termeni ai acestei condiții suma argumentelor lui P este aceeași. Vom scrie deci

$$P(x, y) = (x + y)^n P(x/(x + y), y/(x + y)) = (x + y)^n Q(y/(x + y))$$

unde $Q(z) = P(1 - z, z)$; am ales această notație și nu $Q(z) = P(z, 1 - z)$, după ce am examinat încă o dată condiția b), observînd că în termenii ei argumentele de pe locurile doi au expresii mai simple decît cele de pe locurile 1.

Condiția b) se exprimă acum, notînd $u = a/(a + b + c)$, $v = b/(a + b + c)$ și $w = c/(a + b + c) = 1 - u - v$, sub forma

$$Q(1 - u - v) + Q(u) + Q(v) = 0.$$

Primul fapt ce rezultă este că polinomul Q are gradul cel mult 1, deoarece altfel în dezvoltarea primului termen ar apărea monoame de forma $u^r v^s$ cu $r, s > 0$, monoame ce nu pot apărea în ceilalți doi termeni și care deci nu se vor putea reduce.

Scriind $Q(z) = pz + q$, obținem $p + 3q = 0$, deci

$$Q(z) = q(1 - 3z),$$

$$P(x, y) = (x + y)^n q\left(1 - \frac{3y}{x + y}\right) = q(x + y)^{n-1}(x - 2y)$$

și condiția c) din enunț conduce la determinarea lui q, anume $q = 1$.

5.8. Cele trei probleme relative la inegalități algebrice

Soluția problemei 2-CS (vezi 5.2). Să începem cu cazul $n = 2$, adică, în notațiile din enunț, să formăm

$$(x_1 - y_2)^2 + (x_2 - y_1)^2 - ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2) =$$
$$= 2(x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1) = 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \geqslant 0;$$

cu aceasta afirmația din enunț este demonstrată dacă $n = 2$.

Mai mult, se observă că dacă $x_1 > x_2$ și $y_1 > y_2$, atunci inegalitatea este strictă.

Pentru un n oarecare să fixăm $x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_n$ și $y_1 \geqslant \ldots \geqslant y_n$ și să alegem o permutare $z_1, \ldots, z_n$ a lui $y_1, \ldots, y_n$ așa încît $\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$ să fie minim posibilă. Dacă $x_i = x_{i+1} = \ldots = x_j$, atunci putem permuta $z_i, \ldots, z_j$ între ei fără a modifica valoarea sumei, deci putem presupune că dacă $x_i = x_{i+1}$, atunci $z_i \geqslant z_{i+1}$.

Dacă $x_i > x_{i+1}$, atunci va trebui să avem $z_i > z_{i+1}$, deoarece în caz contrar, permutînd z_i cu z_{i+1}, am obține, conform celor stabilite la cazul $n = 2$, o sumă mai mică.

Cu aceasta am demonstrat că $z_1 \geqslant \ldots \geqslant z_n$. De aici putem deduce că $z_i = y_i$ pentru orice i, de exemplu scriind $y_1 = \ldots = y_{k_1} > y_{k_1+1} = \ldots = y_{k_2} > y_{k_2+1}$ etc., stabilind întîi că $z_1 = \ldots = z_{k_1} = y_1$ etc.

Soluția problemei 4-SE (vezi 5.2). Să scriem a doua condiție din enunț sub forma $a_n - a_{n+1} \geqslant a_{n+1} - a_{n+2}$. De aici deducem că $a_k - a_{k+1} \geqslant a_n - a_{n+1}$ pentru $1 \leqslant k \leqslant n$ și apoi, sumînd după k de la 1 la n, că $n(a_n - a_{n+1}) \leqslant a_1 - a_{n+1} \leqslant 1$ conform primei condiții din enunț. Adunînd la această inegalitate $a_n - a_{n+1} \leqslant 1$, dedusă tot din prima condiție, obținem una din cele două inegalități cerute.

Dacă scriem $a_n - a_{n+1} \geqslant a_r - a_{r+1}$ pentru $n \leqslant r$ și sumăm după r de la n la $n + p - 1$, obținem $p(a_n - a_{n+1}) \geqslant a_n - a_{n+p} \geqslant -1$, deci $a_n - a_{n+1} \geqslant -1/p \to 0$ pentru $p \to +\infty$ (sau, prin absurd, dacă $a_n - a_{n+1} < 0$ și alegem $p > 1/(a_{n+1} - a_n) \ldots$), adică cealaltă inegalitate cerută de problemă.

Soluția problemei 14-YU (vezi 5.2). Ridicînd relația din enunț la pătrat, obținem $x_{n+1}^2 = x_n^2 + 2 + x_n^{-2} > x_n^2 + 2$, ceea ce, împreună cu $x_0^2 = 25$, conduce la $x_n^2 > 25 + 2n$, inegalitate suficient de precisă pentru a deduce, pentru $n = 1000$, $x_n^2 > 2025$, deci $x_{1000} > 45$, adică una din inegalitățile cerute.

Odată stabilit faptul că $x_n^2 > 2n + 25$, obținem $x_{n+1}^2 < x_n^2 + 2 + (2n + 25)^{-1}$, deci $x_n^2 < 2n + 25 + \sum_{k=0}^{n-1}(2k + 25)^{-1}$.

Să majorăm suma în genul în care se studiază, de exemplu, seria armonică:

$$25^{-1} + 27^{-1} + \ldots + 73^{-1} < 25 \cdot 25^{-1} = 1$$

$$75^{-1} + 77^{-1} + \ldots + 223^{-1} < 75 \cdot 75^{-1} = 1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(25 \cdot 3^{r-1})^{-1} + (25 \cdot 3^{r-1} + 2)^{-1} + \ldots + (25 \cdot 3^r - 2)^{-1} <$$
$$< 25 \cdot 3^{r-1}(25 \cdot 3^{r-1})^{-1} = 1,$$

deci $\sum_{k=0}^{n-1}(2k+25)^{-1} < r$ dacă $2n - 2 + 25 \leqslant 25 \cdot 3^r - 2$, adică dacă $3^r \geqslant 1 + (2n/25)$.

Pentru $n = 1000$ se obține $3^r \geqslant 81$, deci $r \geqslant 4$ și $x_{1000}^2 < 2025 + 4 = 2029$, iar $45{,}1^2 = 2025 + 90 \cdot 0{,}1 + 0{,}01 = 2034{,}1 > 2029$, q.e.d.

Există și o altă soluție, în care se demonstrează prin inducție o inegalitate de forma $x_n < a + \sqrt{2n+25}$. Un punct ce nu pare a putea fi ocolit în această demonstrație este stabilirea faptului că $x + x^{-1}$ este crescătoare pentru $x \geqslant 1$ ($x + x^{-1} < y + y^{-1}$ revine la $(xy)^{-1}(y - x) < y - x$, ceea ce este adevărat pentru $x < y$, $1 \leqslant x$).

Inducția revine la a arăta că $a + \sqrt{2n+25} + (a + \sqrt{2n+25})^{-1} < a + \sqrt{2n+27}$, deci la $a + \sqrt{2n+25} > (\sqrt{2n+27} - \sqrt{2n+25})^{-1}$, membrul drept la inegalității este $(\sqrt{2n+27} + \sqrt{2n+25})/2$ și inegalitatea se transformă în $a > (\sqrt{2n+27} - \sqrt{2n+25})/2$, al cărei membru drept devine $(\sqrt{2n+27} + \sqrt{2n+25})^{-1}$ și își atinge valoarea maximă pentru $n = 0$, care valoare este $(5 + \sqrt{27})^{-1} < 0{,}1$. Deci se poate lua $a = 0{,}1$, ceea ce conduce exact la cealaltă inegalitate cerută de enunțul problemei.

Raționamentul prin inducție ar fi eșuat, dacă, bazîndu-ne pe $x_n > \sqrt{2n+25}$, am fi scris $x_{n+1} < x_n + (2n+25)^{-1/2}$, deci nu am fi pus pe a și sub $(\ \ + \sqrt{2n+25})^{-1}$ etc.

5.9. Inegalitatea trigonometrică

Soluția problemei 12-GR (vezi 5.2). Inegalitatea apare deosebită prin modul cum apare în ea π : rolul său este cel al unui număr > 3 sau $> 3{,}1$ etc., sau relația nu se reduce la o inegalitate pur algebrică.

S-o transformăm întîi, succesiv, în $\sum_{i=1}^{n-1}(\sin 2x_i - (\sin(x_i - x_{i+1}) - \sin(x_i + x_{i+1}))) < \pi/2$, $2\sum_{i=1}^{n-1}\sin x_i(\cos x_i - \cos x_{i+1}) < \pi/2$.

Cum 2 nu este mai mic decît $\pi/2$, inegalitatea nu se poate stabili majorînd fiecare $\sin x_i$ cu 1, sumînd și obținînd $\cos x_1 - \cos x_n < 1$.

Să apelăm la fig. 39. Aria dreptunghiului hașurat este $\sin x_i(\cos x_i - \cos x_{i+1})$, aceste dreptunghiuri au interioarele disjuncte și sînt

toate incluse în sfertul de cerc din figură, deci suma ariilor lor este $<\pi/4$, ceea ce reprezintă tocmai inegalitatea dorită.

Se vede deci că π din acea inegalitate nu poate fi micșorat fără ca ea să riște să devină falsă, pentru n suficient de mare, x_1 suficient de aproape de 0 și x_n suficient de aproape de $\pi/2$.

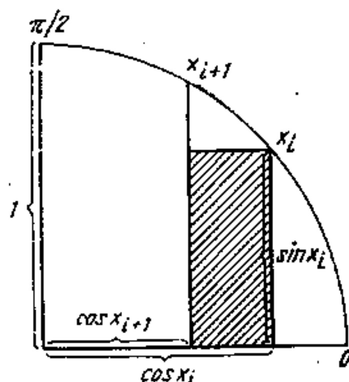


Fig. 39

5.10. Cele două probleme de geometrie în spațiu

Una din acestea se constată a fi de fapt bazată în mare măsură pe inegalități.

Soluția problemei 17-GB (vezi 5.2). În general o relație de forma celei din enunț nu determină unic rapoartele AB/CD, AC/CD etc. și deci în general nu există șanse de a deduce dintr-o astfel de relație că tetraedrul ar fi regulat. Asemenea șanse apar dacă valoarea $2^9 3^{-3}$ din enunț ar fi valoarea maximă a produsului $AB \cdot AC \cdot AD \cdot BC \times \times BD \cdot CD$, cînd A, B, C, D parcurg o sferă de rază 1. Dacă încercăm însă să studiem variația acestui produs, dăm peste o problemă nu tocmai simplă. De aceea „maximul" îl considerăm doar ca idee de rezolvare.

Scriem inegalitatea între media aritmetică și cea geometrică, notînd cu S suma pătratelor muchiilor tetraedrului:

$$S/6 = (AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2)/6 \geqslant$$
$$\geqslant (AB^2 \cdot AC^2 \cdot AD^2 \cdot BC^2 \cdot BD^2 \cdot CD^2)^{1/6} = 2^3 3^{-1},$$

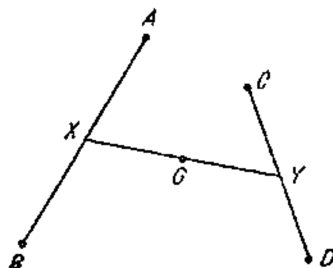


Fig. 40

sau $S \geqslant 16$, egalitatea avînd loc atunci și numai atunci cînd $AB = = AC = AD = BC = BD = CD$, deci cînd tetraedrul este regulat.

Vom relua acum un calcul din soluția problemei BG6 de la Olimpiada din 1973 (vezi 3.1 și 3.5), însă cu mai multe detalii.

În fig. 40 presupunem că A, B, C, D, M sînt puncte arbitrare în

spaţiu, X este mijlocul lui AB, Y — al lui CD şi G — al lui XY. Vom avea, aplicînd de mai multe ori teorema medianei :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2(MX^2 + MY^2) + (AB^2 + CD^2)/2 =$$

$$= 4MG^2 + XY^2 + \frac{1}{2}(AB^2 + CD^2) = 4MG^2 + \frac{1}{2}(XC^2 + XD^2) -$$

$$- \frac{1}{4}CD^2 + \frac{1}{2}(AB^2 + CD^2) = 4MG^2 + \frac{1}{4}\Big(CA^2 + CB^2 -$$

$$- \frac{1}{2}AB^2 + DA^2 + DB^2 - \frac{1}{2}AB^2\Big) + \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{4}CD^2 =$$

$$= 4MG^2 + (AB^2 + AC^2 + BC^2 + AD^2 + BD^2 + CD^2)/4.$$

Alegînd drept A, B, C, D punctele din problema noastră şi drept M centrul sferei, obţinem $4 = 4MG^2 + S/4 \geqslant 4MG^2 + 4$. Dar $MG^2 \geqslant 0$ şi rezultă $S = 16$; am văzut că aceasta implică faptul că tetraedrul este regulat, q.e.d.

Soluţia problemei 16-SU (vezi 5.2). Metoda de rezolvare apare drept interesantă. Vom presupune că în O sînt atîtea proiectoare cîte feţe are poliedrul, fiecare luminînd cîte o faţă. Deci orice punct al spaţiului este luminat şi interioarele oricăror două fascicole luminoase sînt disjuncte. Vom arăta că putem roti întreg sistemul de proiectoare astfel încît unul din acestea să conţină în interiorul fascicolului său luminos centrele a cel puţin două din feţe. Va rezulta că va exista unul dintre proiectoare ce nu va lumina centrul nici unei feţe (în sensul că nici unul din centrele feţelor nu va fi conţinut în interiorul fascicolului luminos al acelui proiector, precizare ce este bine de făcut şi în enunţ, pentru a nu îngreuia rezolvarea problemei ...).

Orice rotire a unuia din proiectoare determină o rotire corespunzătoare a întregului sistem.

Pentru a demonstra posibilitatea unei rotiri cu proprietatea descrisă vom deosebi două cazuri.

a) Feţele poliedrului P au un număr impar de laturi. Să figurăm (fig. 41) două feţe ale poliedrului ce au o muchie comună, mijlocul M al acelei muchii, centrele C_1, C_2 ale celor două fete si vîrfurile N_1, N_2 opuse muchiei comune în cele două feţe. Avem $N_1C_1 = N_2C_2 > MC_2 = MC_1$, $OC_1 \perp N_1M$, $OC_2 \perp N_2M$. Rezultă că unghiurile

congruente O_1 din figură sînt mai mici decît unghiurile congruente O_2, deci $\sphericalangle C_1OC_2 < \sphericalangle N_1OM$ şi, rotind proiectorul feţei ce conţine N_1, C_1, M în jurul lui O, îl putem aduce aşa încît unghiul de lumină N_1OM să conţină în interiorul său $\sphericalangle C_1OC_2$, deci proiectorul acelei feţe va ajunge să conţină centrele C_1, C_2 în interiorul fascicolului său luminos.

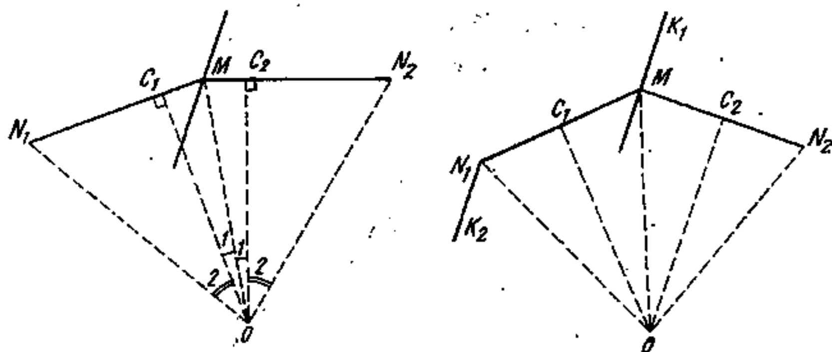


Fig. 41

b) Feţele poliedrului P au un număr par de laturi. Vom apela in acest caz la a doua variantă a figurii 41, în care N_1, N_2 sînt mijloacele laturilor opuse muchiei comune în cele două feţe, $N_1C_1 = N_2C_2 = MC_2 = MC_1$, deci $\sphericalangle C_1OC_2 = \sphericalangle N_1OM$. Dar considerind două vîrfuri opuse K_1, K_2 ale feţei de centru C_1, vom avea $K_1C_1 = K_2C_1 > MC_1$, deci $\sphericalangle K_1OK_2 > \sphericalangle N_1OM = \sphericalangle C_1OC_2$ şi fascicolul luminos al proiectorului feţei de centru C_1 poate fi rotit aşa încît unghiul K_1OK_2 să ajungă să conţină în interiorul său unghiul C_1OC_2 şi astfel centrele C_1, C_2 ale celor două feţe să se afle în interiorul fascicolului luminos rotit, q.e.d.

5.11. Două din problemele de geometrie plană

Soluţia problemei 13-RO (vezi 5.2). Să începem prin a observa că dacă eliminăm din figură punctul A_0 sau punctul A_n, atunci figura îşi păstrează proprietăţile a), b) din enunţ. Deci pentru a demonstra afirmaţia putem să presupunem în plus că dintre segmentele A_kA_{k+1} şi A_mA_{m+1}, descrise în enunţ, cel mult A_0A_1 şi $A_{n-1}A_n$ se pot intersecta. Problema revine deci la a arăta că nici acestea nu se pot intersecta.

C a z u l a. $\sphericalangle A_{n-2}A_{n-1}A_n \geqslant 90°$. Avem, pe de o parte, pentru orice punct M de pe segmentul A_0A_1,

$$MA_{n-2} \leqslant A_0A_1 + \ldots + A_{n-3}A_{n-2} \leqslant$$
$$\leqslant (2^{-(n-2)} + \ldots + 2^{-1})A_{n-2}A_{n-1} < A_{n-2}A_{n-1},$$

iar, pe de altă parte, conform figurii 42, distanța de la A_{n-2} la orice punct de pe segmentul $A_{n-1}A_n$ nu este mai mică decît $A_{n-2}A_{n-1}$.

C a z u l b. $\sphericalangle A_{k-2}A_{k-1}A_k < 90°$ pentru orice $k \geqslant 2$. Pentru orice k, $2 \leqslant k \leqslant n$, să construim trapezul isoscel T_k, ca în fig. 43, figură

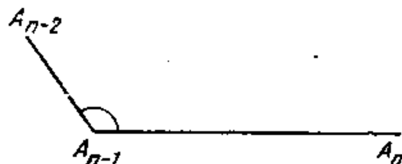


Fig. 42

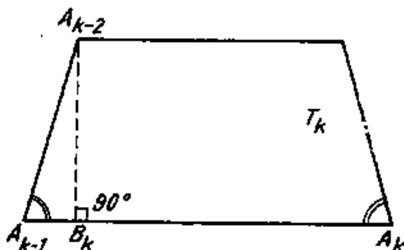


Fig. 43

care arată într-adevăr așa, deoarece B_k este la dreapta lui A_{k-1} ca urmare a faptului că $\sphericalangle A_{k-2}A_{k-1}A_k < 90°$ și nu depășește mijlocul lui $A_{-k1}A_k$ deoarece $A_{k-1}B_k < A_{k-1}A_{k-2} \leqslant A_{k-1}A_k/2$.

Să observăm acum că T_{k-1} este conținut în T_k, avînd comun cu perimetrul lui T_k numai latura $A_{k-1}A_{k-2}$, așa cum rezultă din fig. 44 dacă $\sphericalangle A_{k-2}A_{k-1}A_k \leqslant 60°$, deoarece $\sphericalangle A_{k-3}A_{k-2}A_{k-1} < \sphericalangle A_{k-2}A_{k-1}A_k \leqslant$ $\leqslant 60°$, iar $\sphericalangle A_{k-1}A_{k-2}C = 180° - 2 \sphericalangle A_{k-2}A_{k-1}A_k \geqslant 60°$. Dacă însă

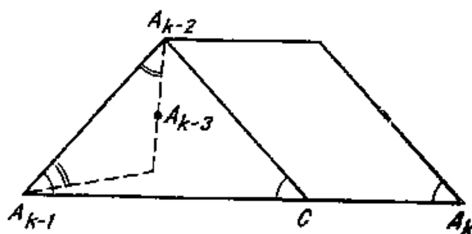


Fig. 44

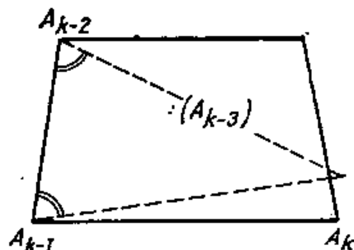


Fig. 45

$60° < \sphericalangle A_{k-2}A_{k-1}A_k < 90°$, atunci $T_{k-1} \subset T_k$ ar putea apărea ca fals ca urmare a unei situații ca în fig. 45. Însă în această situație $A_{k-2}A_{k-3}$ se proiectează pe $A_{k-1}A_k$ după un segment de lungime $\leqslant A_{k-2}A_{k-3} \leqslant$ $\leqslant A_{k-1}A_k/4$, iar $A_{k-1}A_{k-2}$ după unul de lungime $\leqslant A_{k-1}A_{k-2}\cos 60° \leqslant$ $\leqslant A_{k-1}A_k/4$, deci A_{k-3} se proiectează pe $A_{k-1}A_k$ la o distanță de A_{k-1}

de cel mult $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)A_{k-1}A_k = \frac{1}{2}A_{k-1}A_k$, deci nu mai departe de mijlocul lui $A_{k-1}A_k$ şi deci A_{k-3} nu a ieşit din T_k pe linia punctată ce începe din A_{k-2}.

Odată stabilit că T_{k-1} este conţinut în T_k, rezultă că A_0A_1 este conţinut în $T_2 \subset T_{n-2}$, dacă $n \geqslant 4$, iar despre T_{n-2} se observă că nu are puncte comune cu $A_{n-1}A_n$ (fig. 46); pentru $n = 3$ afirmaţia din enunţ rezultă din figurile 44 şi 45 cu care am dovedit $T_{n-1} \subset T_n$.

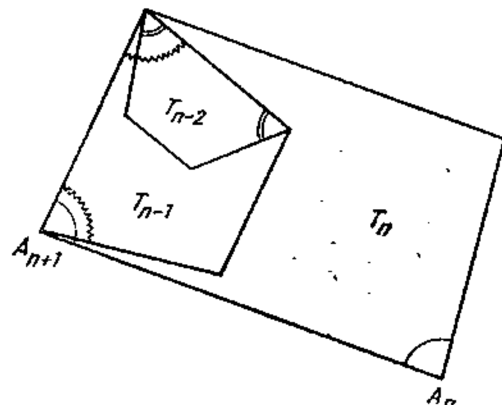


Fig. 46

Soluţia problemei 15-SU. Să precizăm poziţia unui punct de pe cerc prin lungimea arcului de la un punct fixat de pe cerc pînă la acel punct, considerat într-un sens determinat. Lungimea coardei ce uneşte punctele de poziţii x şi y este valoarea absolută a lui.

$$2\sin((y-x)/2) = $$
$$= 2(\sin(y/2)\cos(x/2) -$$
$$- \sin(x/2)\cos(y/2)).$$

Problema va fi deci rezolvată în sens afirmativ dacă vom reuşi să dovedim că există 1975 (sau, mai bine zis, o infinitate) de unghiuri diferite z, cuprinse între 0 şi π, astfel încît $\sin z$ şi $\cos z$ să fie raţionali pentru orice z (urmînd ca punctele din problemă să aibă ca poziţii $2z$).

Scriind $\sin z = m/p$, $\cos z = n/p$ cu m, n, p întregi, va trebui să avem $m^2 + n^2 = p^2$, deci „ecuaţia numerelor lui Pitagora". Nu este nevoie însă a determina toate soluţiile acestei ecuaţii, ci numai o infinitate de soluţii cu m/p distincţi. Astfel $m = u^2 - v^2$, $n = 2uv$, $p = u^2 + v^2$ sînt soluţii pentru orice u, v întregi. Mărginindu-ne la cele pentru care $v = 1$, observăm (pentru $u > 0$) că $m/p = 1 - -2(u^2+1)^{-1}$ sînt distincţi pentru u distincţi.

O variantă a acestei soluţii constă în a observa că $\sin((y-x)/2)$ se exprimă raţional în funcţie de $\operatorname{tg}((y-x)/4)$, deci în funcţie de $\operatorname{tg}(x/4)$ şi $\operatorname{tg}(y/4)$. Răspunsul afirmativ la problemă se obţine alegînd o infinitate de arce z, cuprinse între 0 şi $\pi/2$, avînd toate $\operatorname{tg} z$ raţional şi considerînd punctele de poziţii $4z$.

5.12. Alegerea problemelor de concurs

Am prezentat soluţiile tuturor problemelor propuse juriului (vezi enunţurile lor în 5.2), cu excepţia problemei 8-NL. Această problemă a sfîrşit prin a fi propusă în concurs, dar multitudinea de soluţii ce i s-au descoperit în timpul desfăşurării lucrărilor Olimpiadei din 1975 ne determină să-i dedicăm un paragraf special.

Problemele fiind multe, nu s-a profilat posibilitatea ajungerii la un consens pe calea propunerii individuale de probleme. S-a organizat un „prim tur de scrutin", în care şefii de delegaţii au votat „pentru" la acele probleme ce le considerau acceptabile pentru concurs (deci nu neapărat la 6). S-au exprimat 116 voturi favorabile (17 delegaţii, deci o medie de aproape 7 pe delegaţie). În urma acestui vot au fost eliminate (pe lîngă 9-NL, vezi 5.3) 3-US (3 voturi), 17-GB (3 voturi), 7-DD (4 voturi) şi 13-RO (5 voturi). Nu putem şti ce a gîndit fiecare din cei ce au votat, dar se pare că au fost eliminate problemele ce au părut prea dificile (sau prea „aspre").

La extrema cealaltă s-au situat 8-NL (16 voturi, vezi 5.13), 14-YU (13 voturi), 2-CS şi 6-SU (cîte 10 voturi), 15-SU (9 voturi) şi 10-GB, 11-GB şi 16-SU (cîte 8 voturi). Deci se profila un balotaj.

Aici a intervenit însă sosirea secundului uneia din delegaţii care, văzînd problema 14-YU, a recunoscut-o ca foarte asemănătoare cu una rezolvată la şedinţele de pregătire cu lotul său. Şi astfel cele 13 voturi obţinute de această problemă au trecut pe planul doi.

Dorim să remarcăm că nu este vorba numai de aşa-zisul fair-play în legătură cu astfel de situaţii, ci şi de prestigiul şefului şi secundului delegaţiei în faţa concurenţilor săi, de prestigiul întregii manifestări, care ar avea mult de suferit dacă în mintea elevilor ar încolţi impresia că Olimpiada ar fi, chiar într-o mică măsură, altceva decît o corectă întrecere matematică.

Rămînea deci să se mai renunţe la o problemă, probabil dintre cele cu 8 voturi.

Această problemă a fost 16-SU, cea cu proiectorul. Ea apare foarte frumoasă, caracteristică unui tip de problemistică ce este cultivat în U.R.S.S. Pe de o parte însă, ea utiliza noţiuni cu care elevii lucrează destul de puţin (deplasări în spaţiu, poliedre regulate, unghiuri solide), iar, pe de altă parte, ar fi apărut ca a treia, printre cele de concurs, propusă de aceeaşi ţară.

Dar și alte două probleme, în afară de 14-YU, au trecut pe lîngă situația de a fi eliminate din motive independente de conținutul lor.

S-a afirmat că problema 2-CS ar fi cunoscută, ba chiar sub numele de teorema lui... După cum am indicat în 1.2, aceasta nu reprezintă automat un motiv de a o respinge. La întrebarea „Cîte puncte se acordă unui concurent ce scrie numai : aceasta este teorema lui X?" s-a găsit răspunsul cel mai potrivit : „0 puncte. Nu s-a cerut să se spună cine a descoperit acel fapt matematic, ci să i se dea o demonstrație !". În plus, teorema nu face parte din programa școlară, nici chiar ca problemă, și nu pare a face parte dintre cunoștințele elevilor.

La problema 6-SU s-a obiectat că „fără a calcula 16^{16}" este o condiție ce poate deruta pe concurenți. Înainte de a se decide ceva, unul dintre șefii de delegații a afirmat : „Concurenții din țara ce o reprezint vor calcula într-un sfert de oră 16^{16} și vor ajunge pe această cale la răspuns, ceea ce este contrar spiritului Olimpiadei".

Deci se cerea să se găsească alt număr în afară de 16^{16}. Dar repede, deoarece timpul era foarte prețios ; dacă aceasta nu se putea face și trebuia aleasă altă problemă?

Reamintindu-ne soluția acestei probleme din 5.5, constatăm că posibilitățile de evaluare nu fuseseră epuizate, ele puteau acționa și pentru numere mai mari. Cum trebuie deci să fie numărul N, pentru ca soluția acestei probleme, cu N^N în loc de 16^{16}, să rămînă în vigoare? În primul rînd $N \equiv 7 \pmod 9$, apoi $N \equiv 1 \pmod 3$, ceea ce rezultă din $N \equiv 7 \pmod 9$. Și, în fine, N să nu fie prea mic, dar nici prea mare.

Considerații „estetice" au condus la cerința ca N să aibă cifrele egale. Aceasta a eliminat posibilitatea de a-l alege de trei cifre, deoarece ar fi rezultat $N \equiv 0 \pmod 3$. Avem $1111 \equiv 4 \pmod 9$ și astfel cel mai mic număr ce corespundea apărea a fi $N = 4444$.

Majorările analoage cu cele din soluția de la 5.5 au reușit : 4444^{4444} are cel mult $4 \cdot 4444 = 17776$ cifre, deci A — suma cifrelor sale — este cel mult $9 \cdot 17776 < 180000$, suma cifrelor lui A, notată cu B, nu depășește deci $5 \cdot 9 = 45$, iar suma cifrelor lui B nu depășește pe cea a lui 39, adică $12 < 16$.

Și problema s-a dat, cu 4444^{4444} în loc de 16^{16}.

Ordinea în care s-a decis să fie date problemele alese, și punctajele lor, au fost următoarele : *1* (2-CS) — 6 puncte, *2* (11-GB)—7 puncte, *3* (8-NL)—7 puncte ; *4* (6-SU)—6 puncte, *5* (15-SU)—6 puncte, *6* (10-GB)—8 puncte.

5.13. Problema de geometrie plană 8-NL

Soluția întîi, a autorilor, pentru problema 8-NL (vezi 5.2). Să construim, în afara triunghiului ABC, triunghiurile $AQ'C$, $R'AB$, $BP'C$, isoscele, dreptunghice respectiv în A, R' și B (fig. 47). Avem $\sphericalangle RAR' = \sphericalangle RBR' = 30°$ și, din motive de simetrie, $\sphericalangle AR'R = \sphericalangle BR'R = 45°$.

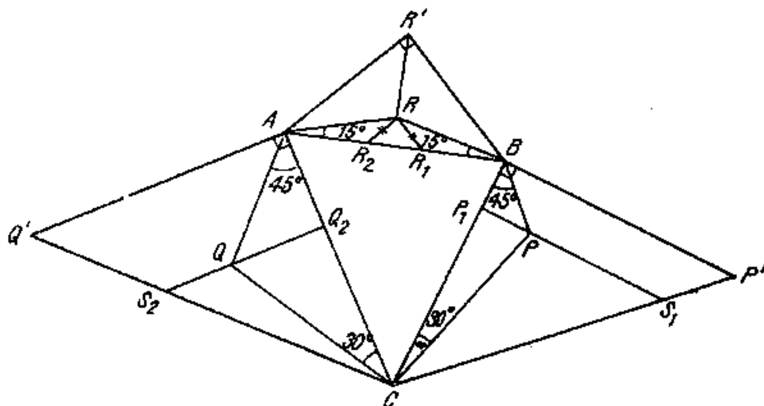


Fig. 47

Triunghiurile dreptunghice isoscele sînt asemenea, dar în cîte două moduri. Fixînd corespondența vîrfurilor conform relațiilor $\triangle AQ'C \sim \triangle R'AB \sim \triangle BCP'$, observăm că în cele trei triunghiuri asemenea punctele Q, R, P ocupă poziții omoloage (avem $\triangle AQC \sim \sim \triangle R'RB$ și $\triangle R'RA \sim \triangle BPC$ etc.).

În vederea unei soluții cu caracter vectorial, să considerăm dreptele $RR_1 || R'B$ și $PP_1 || BP'$, omoloage în două din triunghiurile asemenea considerate (vezi figura, omologul lui R_1 este S_1) și $RR_2 || R'A$ și $QQ_2 || Q'A$, omoloage în alte două dintre triunghiurile asemenea considerate (omologul lui R_2 este S_2). Să observăm că, din motive de simetrie, RR_1 și RR_2 sînt perpendiculare și congruente. Dacă vom reuși să arătăm același lucru despre PP_1 și R_2Q_2, ca și despre QQ_2 și R_1P_1, problema va fi rezolvată, deoarece $\overline{RP}$ și $\overline{RQ}$ vor apărea fiecare drept sumă a trei vectori și termenii acestor sume vor fi, respectiv, perpendiculari și de aceeași lungime.

Va fi suficient să arătăm cum se demonstrează că PP_1 și R_2Q_2 sînt perpendiculare și congruente, din cauza rolului simetric ce-l joacă A și B, Q și P etc. Din faptul că RR_2 și QS_2 sînt omoloage, rezultă $AR_2/AB = Q'S_2/Q'C$, ultimul fiind egal și cu AQ_2/AC.

Din egalitatea primului și celui de-al treilea raport rezultă întîi $R_2Q_2 \| BC \perp PP_1$ și apoi $R_2Q_2/BC = AR_2/AB = BR_1/BA = P'S_1/P'C = BP_1/BC$, deci $R_2Q_2 = BP_1 = PP_1$, q.e.d.

Soluția a doua pentru problema 8-NL (vezi 5.2). Este o soluție care se vrea cît mai expeditivă, ignorînd eleganța. Ne referim tot la fig. 47.

Va trebui să demonstrăm că $PQ^2 = 2PR^2 = 2QR^2$. Să notăm, cum se obișnuiește, laturile triunghiului ABC cu $a = BC, b, c$ și unghiurile sale cu A, B, C. Segmentele PQ, PR, QR le vom calcula cu teorema cosinusului (Pitagora generalizată) din triunghiurile PCQ, PBR, QAR. Unghiurile opuse acestor segmente în triunghiurile respective se calculează ușor: $C + 60°, B + 60°, A + 60°$.

Celelalte laturi ale triunghiurilor în discuție se calculează din teorema sinusurilor, în triunghiurile PBC, QAC, RAB:

$$PC = a \sin 45° \sin^{-1} 75°,\ CQ = b \sin 45° \sin^{-1} 75°,\ PB = a \sin 30° \sin^{-1} 75°,$$
$$RB = RA = c \sin 15° \sin^{-1} 30°,\ QA = b \sin 30° \sin^{-1} 75°.$$

Relațiile ce trebuie demonstrate se scriu acum:

$$\sin^2 45° \sin^{-2} 75° (a^2 + b^2 - 2ab\cos(C + 60°)) = 2(a^2 \sin^2 30° \sin^{-2} 75° +$$
$$+ c^2 \sin^2 15° \sin^{-2} 30° - 2ac \sin 15° \sin^{-1} 75° \cos(B + 60°)) =$$
$$= 2(b^2 \sin^2 30° \sin^{-2} 75° + c^2 \sin^2 15° \sin^{-2} 30° -$$
$$- 2bc \sin 15° \sin^{-1} 75° \cos(C + 60°)).$$

Acestea se transcriu, cum $\sin^2 45° = 1/2$, $\sin 15° \sin 75° = \sin 15° \cos 15° = (\sin 30°)/2 = 1/4$, $\sin^2 30° = 1/4$:

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos(C + 60°) = a^2 + c^2 - 2ac\cos(B + 60°) =$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos(A + 60°).$$

Este evident suficient să demonstrăm una din acestea, de exemplu prima, trigonometric sau, mai simplu, geometric (vezi fig. 48), scriind AD^2 în două moduri, prin teorema cosinusului în $\triangle ACD$, $\triangle ABD$.

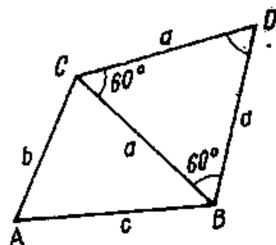


Fig. 48

Aceste soluții nu explică însă cele 16 voturi din 17 posibile ce a ajuns să le obțină această problemă în juriu.

Soluția a treia la problema 8-NL (vezi 5.2). Această soluție a fost descoperită în timpul lucrărilor juriului. Ne referim tot la figura 47. Cum se ajunge de la P la Q? Pe calea P, C, Q. De la P la C se ajunge printr-o rotație de 45° în jurul lui B, urmată de o omotetie de raport BC/BP, de centru B. De la C la Q se ajunge printr-o rotație de 45° în jurul lui A, de același sens cu cea precedentă, urmată de o omotetie de centru A și raport AQ/AC.

Dar $AQ/AC = BP/BC$, ca urmare a asemănării triunghiurilor ACQ, BCP, deci produsul celor două rapoarte de omotetie este 1 şi transformarea ce se obţine compunînd cele două transformări este o rotaţie de unghi $45° + 45° = 90°$.

Punctul P ajunge deci în Q ca urmare a rotaţiei de 90° considerate mai sus. Rămîne de arătat că acea rotaţie are R drept centru. Centrul unei rotaţii este singurul punct ce este lăsat pe loc de acea rotaţie. Vom demonstra deci că R este lăsat pe loc de compunerea celor două transformări (una ce ducea P în C, cealaltă ce ducea C în Q etc.).

Fie T imaginea lui R prin prima transformare, deci $\sphericalangle RBT = 45°$ (în sensul din fig. 49) şi $BT/BR = BC/BP$, raport ce-l vom nota cu x. Deci $\triangle BRT \sim \triangle BPC$, în particular $\sphericalangle BRT = \sphericalangle BPC = 180° - 75°$. Dacă notăm cu M mijlocul lui AB, atunci MR va fi mediatoarea lui AB şi $\sphericalangle MRB = 90° - \sphericalangle MBR = 75°$. Deci RT este în prelungirea lui MR, adică T este şi el pe mediatoarea lui AB.

Pentru a demonstra că T vine în R prin a doua transformare, al cărei raport, s-a văzut, că este $1/x$, trebuie arătat că $\sphericalangle RAT = 45°$ şi că $AR/AT = 1/x = BR/BT$, fapte ce rezultă imediat din simetria figurii 49 faţă de MRT.

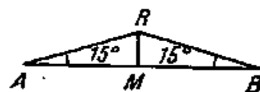


Fig. 49

Observaţie. Era interesant, şi poate chiar mai simplu, să căutăm punctul fix X al compunerii celor două transformări. Să notăm cu Y imaginea lui X prin prima transformare. Vom avea $\sphericalangle XAY = \sphericalangle XBY = 45°$, BY/BX va fi egal cu raportul primei transformări, iar AX/AY cu raportul celei de-a doua, deci, cum produsul celor două rapoarte s-a văzut că este 1, rezultă $AY/AX = BY/BX$. De aici obţinem $\triangle AXY \sim \triangle BXY$ şi, cum $XY = XY$, $\triangle AXY = \triangle BXY$, deci $AY = BY$ şi XY este mediatoarea lui AB. În plus, $\triangle BXY \sim \triangle BPC$, deci $\sphericalangle XYB = 30°$, $\triangle ABY$ este echilateral, $\sphericalangle XBA = 60° - 45° = 15°$ etc., $X = R$.

Soluţia a treia a determinat adeziunea juriului la problema în discuţie. Dar, după cum vom vedea, efervescenţa creatoare stîrnită de această problemă la Olimpiada din 1975 a continuat.

5.14. Cîteva din soluţiile descoperite de concurenţi

La problema *1* (2-CS, vezi 5.2) au existat mai multe variante de soluţii, din care prezentăm una.

Soluție a problemei 1 (2-CS, vezi 5.2). Inducție față de n. Cazul $n = 2$ se tratează la fel ca în soluția prezentată în 5.8 (fără a fi necesară precizarea în legătură cu inegalitatea strictă). Presupunînd afirmația adevărată pentru $n = 2$ și $n = k$, vom deosebi două cazuri în demonstrarea ei pentru $n = k + 1$.

Primul este $z_1 = y_1$, în care afirmația se reduce la cea corespunzătoare lui $x_2, \ldots, x_{k+1}$ și $y_2, \ldots, y_{k+1}$ și permutării $z_2, \ldots, z_{k+1}$ a lui $y_2, \ldots, y_{k+1}$, deci la o situație cu $n = k$.

Al doilea este $z_1 < y_1$. Va exista un indice $i > 1$ cu $z_i = y_1$. Să considerăm permutarea $z'_1, \ldots, z'_{k+1}$ a lui $y_1, \ldots, y_{k+1}$, definită prin $z'_1 = y_1 = z_i$, $z'_i = z_1$, $z'_j = z_j$ pentru $j \neq 1$, $j \neq i$. Conform cazului anterior vom avea $\sum_{j=1}^{k+1} (x_j - y_j)^2 \leqslant \sum_{j=1}^{k+1} (x_j - z'_j)^2$, iar conform cazului $n = 2$, cum $y_1 > z_1$, vom avea $(x_1 - z'_1)^2 + (x_i - z'_i)^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_i - z_1)^2 \leqslant (x_1 - z_1)^2 + (x_i - z_i)^2$, deci $\sum_{j=1}^{k+1} (x_j - z'_j)^2 \leqslant \sum_{j=1}^{k+1} (x_j - z_j)^2$ încheind demonstrația.

Soluție a problemei 2 (11-GB, vezi 5.2). Pentru fiecare $m > 1$ să considerăm cel mai mare divizor comun b_m al lui a_m și a_1. Cum $1 \leqslant b_m \leqslant a_1$, va exista (ca urmare a unui raționament identic cu unul din soluția acestei probleme prezentată în 5.5) o mulțime infinită $M \subset \{2, 3, \ldots\}$, așa încît b_m să fie același oricare ar fi $m \in M$; fie b această valoare comună.

Fie $r = \min M$. Se știe că există întregi u_0, v_0, dar nu pozitivi, astfel ca $b = u_0 a_1 + v_0 a_r$. Oricare ar fi $m \in M$, avem $a_m = wb$ cu w întreg, deci $a_m = ua_1 + va_r$ cu u, v întregi.

Ultima relație este adevărată pentru $u = wu_0$, $v = wv_0$, dar aceste valori nu sînt singurele posibile. Dacă $a_m = ua_1 + va_r$, atunci și $a_m = (u + a_r)a_1 + (v - a_1)a_r$, precum și $a_m = (u - a_r)a_1 + (v + a_1)a_r$.

Această observație ne permite să-l modificăm pe u, aducîndu-l în situația $1 \leqslant u \leqslant a_r$ (printre numerele de forma $u + sa_r$, $s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, va exista unul — și numai unul — cuprins între 1 și a_r). Acum putem trage concluzia că $v = (a_m - ua_1)/a_r \geqslant (a_m/a_r) - a_1$. Deci dacă $a_m > a_1 a_r$, va rezulta $v > 0$ și reprezentarea $a_m = ua_1 + va_r$ va avea proprietățile cerute de problemă.

$M' = \{m | m \in M, a_m > a_1 a_r\}$ este infinită, M fiind infinită. Termenii a_m cu $m \in M'$ au proprietatea din enunțul problemei.

Soluție a problemei 3 (8-NL, vezi 5.2). Este o soluție geometrică, ce utilizează ideea de rotație, dar nu la nivelul soluției a treia din 5.13.

Vom arăta că rotind P cu $90°$ în jurul lui R, în sensul de la B spre A, vom obține Q; cu aceasta problema va fi rezolvată (fig. 50).

Începem prin a nota cu M punctul obținut rotind punctul B cu $90°$, în sensul indicat, în jurul lui R. Rămîne de demonstrat că $MQ = BP$ și că $\sphericalangle RMQ = \sphericalangle RBP$.

Ce se știe despre M? Avem $\sphericalangle ARB = 180° - 2 \cdot 15° = 150°$, deci $\sphericalangle ARM = 150° - 90° = 60°$. Cum $AR = RB = RM$, triunghiul ARM rezultă echilateral.

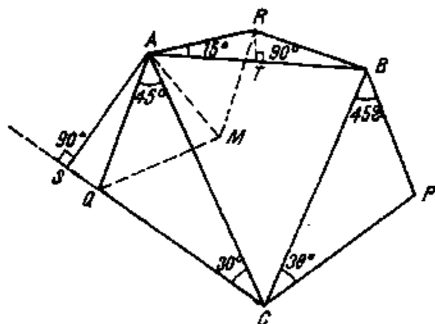


Fig. 50

Cele ce trebuie dovedite pot fi exprimate antrenînd în special $\triangle AMQ$. Anume $QM = BP$ și $\sphericalangle AMQ = \sphericalangle RMQ - \sphericalangle RMA = \sphericalangle RBP - 60° = \sphericalangle ABC$.

În plus, din $\triangle AQC \sim \triangle BPC$ rezultă $AQ/AC = BP/BC$. Deci pentru a arăta că $QM = BP$ este destul a arăta că $AQ/AC = QM/BC$. Această proporție împreună cu $\sphericalangle AMQ = \sphericalangle ABC$, deci relațiile ce trebuie demonstrate, ar rezulta din $\Delta AMQ \sim \Delta ABC$. Ne vom concentra atenția asupra demonstrării acestei relații.

Este imediat că $\sphericalangle QAM = \sphericalangle QAR - 60° = \sphericalangle CAB$. Rămîne de arătat că $AQ/AM = AC/AB$, deci, cum ΔARM este echilateral, că $AQ/AR = AC/AB$.

Evident că $\triangle AQC$ nu este asemenea cu $\triangle ARB$, deci nu se poate stabili relația dorită într-un pas. Să notăm cu S piciorul perpendicularei din A pe CQ și cu T cel al perpendicularei din R pe AB. Avem $AC = 2AS$ ca urmare a unghiului de $30°$ și $AB = 2AT$. Relația devine $AQ/AR = AS/AT$ și rezultă din $\triangle AQS \sim \triangle ART$ (dreptunghice, cu $\sphericalangle SAQ = 15° = \sphericalangle RAT$).

Soluție a problemei 6 (10-GB, vezi 5.2). Să scriem condiția b) din enunț pentru $a + b + c = 0$. Obținem $P(-c, c) + P(-a, a) + P(-b, b) = 0$ și apoi, conform cu a), $(a^n + b^n + c^n)P(-1, 1) = 0$.

Dacă $n = 1$, atunci $a^n + b^n + c^n = 0$ și nu obținem nici o concluzie. Dar dacă $n \geqslant 2$, atunci putem alege, de exemplu, $a = b = 1$, $c = -2$ și obținem $a^n + b^n + c^n = 2 + (-2)^n \neq 0$, deci $P(-1,1) = 0$ și apoi, conform cu *a*), $P(x, -x) = 0$. De aici, aplicînd teorema lui Bezout polinomului $P(x, y)$, în care y este considerat ca variabilă și x drept constantă, obținem $P(x, y) = (y + x)Q(x, y)$, unde Q este un polinom [cel mai bine este a urmări demonstrația teoremei

Bezout : $P(x, y) = (y + x)Q(x, y) + R(x)$ şi, pentru $y = -x$, deducem $R(x) = 0$].

Proprietăţile a), b), c) ale lui P implică pentru Q proprietatea a cu $n - 1$ în loc de n, proprietatea c), iar, în ceea ce priveşte proprietatea b), $(a + b + c)(Q(a + b, c) + Q(b + c, a) + Q(c + a, b)) = 0$, de unde putem deduce că şi Q va avea proprietatea b), fie pe o cale pur algebrică, bazîndu-ne pe faptul că produsul a două polinoame de trei variabile, ambele nenule, nu poate fi nul ca polinom, fie stabilind aceasta întîi pentru $a + b + c \neq 0$ şi apoi făcînd $c \to -(a + b)$ şi ţinînd seamă de continuitatea funcţiei polinomiale.

Deci şi lui Q i se aplică raţionamentul de mai sus, dacă $n \geq 3$. Se obţine, de exemplu prin inducţie, $P(x, y) = (x + y)^{n-1}R(x, y)$, unde R satisface b), c) şi a) pentru $n = 1$. Rezultă că R este de gradul 1, $R(x, y) = ux + vy$ cu u şi v constante, din b) obţinem $u(a+b)+vc+u(b+c) + va + u(c + a) + vb = 0$, $(2u + v)(a + b + c) = 0$, $v = -2u$, $R(x, y) = u(x - 2y)$, din c) deducem $u = 1$, deci $P(x, y) = (x - 2y)(x + y)^{n-1}$.

5.15. Premii

Comitetul de organizare al Olimpiadei din 1975 a luat iniţiativa de a populariza eficient soluţiile ce au primit premii speciale, acestea fiind prezentate în detaliu în juriu ; un redactor al *Gazetei Matematice* din Bulgaria a avut misiunea de a „extrage“ de la şefii de delegaţii respectivi textele precise ale acestor soluţii, misiune nu tocmai uşoară în condiţiile unui program cultural bogat ce a urmat după încheierea lucrărilor juriului.

Coordonatorii au propus patru premii speciale. Una din propuneri nu a fost acceptată de juriu (la voturi 8 pentru , 9 contra). Este vorba de singurul concurent ce a descoperit soluţia a treia a problemei *3* (8-NL, vezi 5.2), prezentată în 5.13, soluţie ce determinase juriul să voteze aproape în unanimitate pentru această problemă. S-a considerat că, pentru cineva ce cunoaşte teoria transformărilor de asemănare în plan, găsirea unei astfel de soluţii nu constituia un merit deosebit.

Dintre cele trei premii speciale acordate de juriu, unul a răsplătit o soluţie a problemei *6* (10-GB, vezi 5.2).

Soluţie a problemei 6 (10-GB, vezi 5.2). Să considerăm polinomul $Q(x) = P(1 - x, x)$. Conform cu c) avem $Q(0) = 1$. Relaţia b), pentru $a + b + c = 1$, se scrie $Q(a) + Q(b) + Q(1 - a - b) = 0$.

Pentru $b = 0$ se obține $Q(1 - a) = -1 - Q(a)$, de unde $Q(1) = -1 - Q(0) = -2$ și apoi, pentru $b = 1$, $Q(-a) = 2 - Q(a)$.

Dacă transcriem $Q(1-a) = -1 - Q(a)$ sub forma $Q(a+1) = -1 - Q(-a)$, atunci această relație, împreună cu $Q(-a) = 2 - Q(a)$, ne permit să calculăm $Q(k)$, succesiv, pentru $k = 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$, plecînd numai de la $Q(0) = 1$.

Mai mult, se observă că aceste două relații pot fi satisfăcute de o funcție liniară $Q_1(a) = ua + v$, ele revenind la $v + u = -1 - v$ și $v = 2 - v$, deci la $v = 1$, $u = -3$, $Q_1(a) = 1 - 3a$.

Cum $Q_1(0) = 1 = Q(0)$, rezultă $Q(k) = Q_1(k) = 1 - 3k$ pentru orice k întreg, deci, Q fiind polinom, $Q(x) = 1 - 3x$, $P(x, y) = (x+y)^n P\left(\frac{x}{x+y}, \frac{y}{x+y}\right) = (x+y)^n Q\left(\frac{y}{x+y}\right) = (x+y)^n \frac{x-2y}{x+y}$, întîi pentru $x + y \neq 0$ etc.

Celelalte două premii speciale au fost acordate de juriu unor concurenți români, pentru următoarele două soluții :

Soluție a problemei 5 (15—SU, vezi 5.2). Să aplicăm figurii o inversiune cu centrul O într-unul din punctele din problemă, de modul rațional r (fig. 51). Cercul devine o dreaptă, la distanță $ON = r/OM = r/2$, deci rațională, de O. Celelalte puncte P, Q, ... despre care este vorba se transformă în niște puncte R, S, ... Avem $OP \cdot OR = r$, deci OP este rațional dacă și numai dacă OR este rațional. Presupunînd această condiție realizată, vom avea din două triunghiuri asemenea, $PQ/RS = OQ/OR$, deci PQ va fi rațional dacă și numai dacă RS va fi rațional.

Problema va avea o soluție afirmativă dacă vom putea construi un punct O la distanță rațională de o dreaptă d și pe acea dreaptă 1974 puncte R, S, ... la distanțe raționale de O și avînd toate distanțele RS între ele raționale. Ultima condiție este implicată de : distanțele de la R, S, ... la piciorul N al perpendicularei din O pe d să fie raționale. Aceasta se poate realiza alegînd $ON = 2$, toți R de aceeași parte a lui N pe d și NR de forma $u - u^{-1}$ cu u rațional> 1, deoarece rezultă $OR = (4 + (u - u^{-1})^2)^{1/2} = u + u^{-1}$ rațional, iar $u - u^{-1} = v - v^{-1}$ implică $(u - v)(1 + u^{-1}v^{-1}) = 0$, deci $u = v$ și punctele R ce corespund la u distincți sînt distincte.

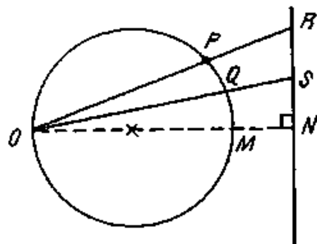


Fig. 51

Soluție a problemei 3 (8-NL, vezi 5.2). Se folosește reprezentarea punctelor din plan prin numere complexe. Se alege originea în R,

se notează cu a, b numerele complexe ce reprezintă A, B (fără a căuta să explicităm relația dintre a și b) și cu z numărul complex ce reprezintă C.

Vor trebui calculate numerele complexe ce reprezintă P și Q.

Dacă $PM \perp BC$ (fig. 52), avem $BM = MP$, $CM = MP\sqrt{3}$, segmentul BC va fi reprezentat de numărul complex $z - b$, BM de

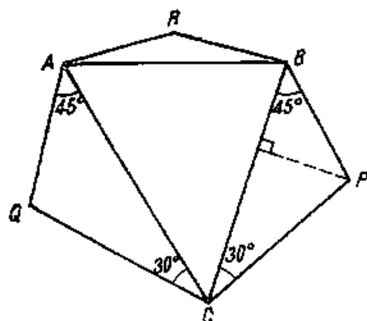


Fig. 52

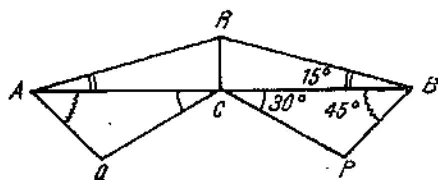


Fig. 53

$(z - b)(1 + \sqrt{3})^{-1}$, deoarece $BC = MP(1 + \sqrt{3}) = BM(1 + \sqrt{3})$, MP de $i(z - b)(1 + \sqrt{3})^{-1}$, deci P de $b + (1 + i)(z - b)(1 + \sqrt{3})^{-1}$. Analog, însă cu $-i$ în loc de i din cauza sensului opus, Q va fi reprezentat de $a + (1 - i)(z - a)(1 + \sqrt{3})^{-1}$.

Se pune problema să se demonstreze că

$$i(a + (1 - i)(z - a)(1 + \sqrt{3})^{-1}) = b + (1 + i)(z - b)(1 + \sqrt{3})^{-1}.$$

Pînă aici, în afară de metodă, nimic nu este deosebit; au existat și alte soluții pe această linie.

Însă acum se observă că z intră în cei doi membri cu același coeficient, deoarece $i(1 - i) = 1 + i$. Deci problema revine la a demonstra egalitatea a două numere complexe ce nu depind de z. Cum aceasta este echivalentă cu afirmația problemei, va fi suficient de arătat valabilitatea acestei afirmații pentru o poziție particulară a lui C (punctul reprezentat de numărul complex z), A și B fiind dați. Arătînd aceasta pe figură, nu va mai fi nevoie de a preciza relația dintre a și b.

Concurentul a ales pe C la mijlocul lui AB (deci o poziție limită compatibilă cu figura, așa cum era descrisă în enunț, vezi fig. 53) și deci, din cauza simetriei față de RC, mai trebuia arătat doar că, $\sphericalangle CRP = 45°$, deci că $RCPB$ este un patrulater inscriptibil, dar

aceasta rezultă din $\sphericalangle \hat{C}R\hat{B} = 90° - 15° = 75°$, $\sphericalangle P = 180° - 30° - 45° = 180° - 75°$.

După cum se vede, soluțiile cărora li s-au acordat premii speciale s-au remarcat în primul rînd prin descoperirea unor legături neașteptate între situațiile din problemele respective și alte capitole de matematică elementară. Soluția premiată a problemei *3* (8-NL, vezi 5.2) este un remarcabil exemplu de gîndire matematică „economică".

Discuțiile în jurul problemei *3* (8-NL, vezi 5.2) au continuat însă și după încheierea lucrărilor juriului, cel puțin între delegația Olandei, ce propusese problema, și delegația României, în care se afla cel ce obținuse premiul special.

S-a observat, relativ la soluția prezentată, că relația între numere complexe, de forma $c_1 + d_1z = c_2 + d_2z$, ce trebuia arătată a fi adevărată pentru orice z, unde c_1, d_1, c_2, d_2 erau fixați, era destul să fie verificată pentru două valori particulare diferite ale lui z (nu era necesar a stabili că $d_1 = d_2$, nici nu era nevoie de a preciza valorile coeficienților), deci pentru două poziții diferite ale lui C. Una fusese indicată de concurent. Nu era necesar a alege cealaltă poziție în semiplanul determinat de AB ce nu-l conține pe R, cu condiția a se acorda atenție semiplanelor în care se construiesc $\triangle BCP$, $\triangle ACQ$. Poziția putea fi aleasă pur și simplu $C = R$ (fig. 54).

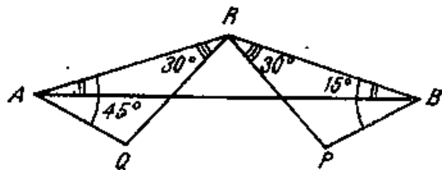


Fig. 54

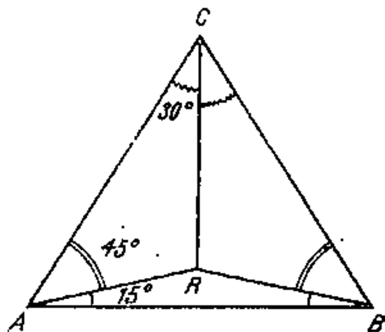


Fig. 55

Verificarea se făcea și mai simplu decît în cazul precedent, pe baza simetriei față de mediatoarea lui AB și $\sphericalangle PRQ = \sphericalangle ARB - 60° = 180° - 2 \cdot 15° - 60° = 90°$.

O altă poziție în care verificarea era foarte simplă este indicată în fig. 55, în care $P = Q = R$, sau, dacă dorim să respectăm figura

inițială, cea din fig. 56, care este simetrică față de mediatoarea comună a segmentelor AQ, BP, deci $\triangle QRP$ este simetricul lui ACB etc.

La Olimpiada din 1975 s-au acordat 8 premii 1, pentru punctaje de 39—40, 25 premii 2 pentru punctaje între 32 și 37, 35 premii 3 pentru punctaje între 22 și 31, în total 68 premianți din 136 concurenți; proporții foarte apropiate de cele „regulamentare" (vezi 4.5). Festivitatea de decernare a premiilor a avut loc la Sofia.

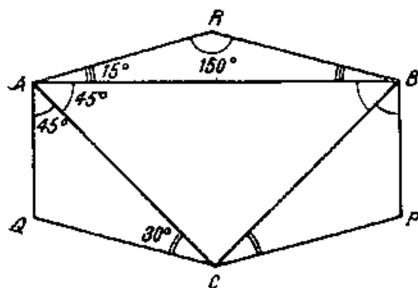


Fig. 56

5.16. Probleme deosebite puse de coordonare

Activitatea de coordonare, la Olimpiada a 17-a, nu a părut mai ușoară ca la alte Olimpiade. Să enumerăm cîteva din problemele de coordonare ce au trebuit rezolvate.

Problema *1* (2-CS, vezi 5.2, 5.8, 5.14) se baza în soluția ei pe argumente ce puteau fi precizate mai mult prin text decît prin formule. Dar textul soluțiilor este redactat în limba maternă a concurenților și astfel de detalii sînt greu accesibile, direct, unui coordonator.

Soluția problemei *2* (11-GB, vezi 5.2), prezentată în 5.14, se baza în fond pe o lemă, al cărei enunț era : dacă a, b sînt doi întregi pozitivi și d este cel mai mare divizor comun al lor, atunci există N așa încît, pentru orice $n > N$ întreg, există întregi $u, v > 0$ satisfăcînd relația $dn = ua + vb$.

Cum va fi notat un concurent care s-a mărginit a scrie „este cunoscută lema..." ? Dar unul care se lansează în a o demonstra și greșește demonstrația? Aceasta se poate petrece relativ la fondul faptului din lemă sau la un detaliu mai puțin semnificativ.

În plus, au apărut soluții la problema *2* (11-GB, vezi 5.2), în care s-au strecurat confuzii privind noțiunile „o mulțime de numere întregi, prime între ele două cîte două" și „o mulțime de numere întregi prime între ele în ansamblu (cu c.m.m.d.c. egal cu 1)", deși, după cum s-a văzut în 5.5 și 5.14, aceste noțiuni nu apar în mod necesar într-o soluție a acestei probleme.

Cum va fi notat un concurent, care la problema *4* (6-SU, vezi 5.5 și 5.12) a schițat perfect metoda de rezolvare, dar a greșit la absolut (au existat asemenea concurenți) toate calculele?

Cum va fi notat un concurent care la problema 5(15-SU, vezi 5.2, 5.11) a greşit formula şi în loc de $2\sin\frac{y-x}{2}$ a scris $2\,\mathrm{tg}\,\frac{y-x}{2}$ şi, datorită acestui fapt, a ajuns în situaţia să piardă premiul 1?

Ultimele situaţii descrise par a îndemna la a trece cu vederea unele greşeli ce nu sînt de fond, dar există printre şefii şi secunzii delegaţiilor profesori fermi în aplicarea principiului după care nu se ignoră greşelile dintr-o lucrare etc.

Deşi se obişnuieşte a convoca, înainte de începerea coordonării, o şedinţă a juriului pentru fixarea de principii, punctaje parţiale etc., experienţa arată că nu pot fi prevăzute toate situaţiile de tipul celor menţionate şi că dificultatea deciziilor respective apasă pe umerii coordonatorilor şi ai preşedintelui juriului; este vorba în special de asigurarea uniformităţii notării.

Şi la această Olimpiadă, ca şi la celelalte, ei şi-au făcut cu succes datoria şi în şedinţa finală a juriului, în care s-au stabilit premiile, nu a apărut nici o problemă deosebită din această cauză.

5.17. Despre unele transformări geometrice în plan

Vom expune aici cunoştinţele necesare, cu demonstraţiile lor, pentru a ajunge la soluţia a treia a problemei 8-NL (vezi 5.2), prezentată în 5.15 şi apreciată deosebit de juriu.

Vom fixa un sistem de axe în plan şi fiecare punct îl vom reprezenta prin numărul complex corespunzător z (fig. 57).

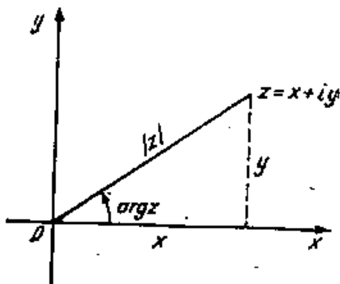


Fig. 57

Fiecare număr complex z are un modul $|z|$, egal cu distanţa de la 0 la punctul ce-l reprezintă, şi un argument $\arg z$, definit în cazul $z \neq 0$, abstracţie făcînd de un multiplu de 2π, drept unghiul în sens trigonometric de la Ox la semidreapta ce pleacă din O şi trece prin punctul reprezentat de z.

Conform definiţiei adunării numerelor complexe, translaţia T ce duce O în b se exprimă prin $Tz = z + b$ (fig. 58).

Să observăm (vezi fig. 57) că $z = |z|\,(\cos \arg z + i\sin \arg z)$. Înmulţind două astfel de formule scrise pentru z_1, z_2, obţinem $|z_1z_2| =$

$= |z_1||z_2|$ şi $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ (am putea cere ca $0 \leq \arg z < 2\pi$ pentru a-l defini unic pe $\arg z$, dar această ultimă relaţie nu putem s-o privim nici atunci decît ca valabilă modulo 2π). Deci (fig. 59) $Tz = az$, pentru $a \neq 0$, defineşte o transformare ce constă dintr-o omotetie de raport $|a|$ şi centru O, urmată de o rotaţie de unghi

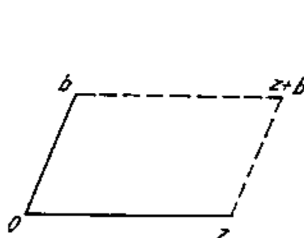


Fig. 58

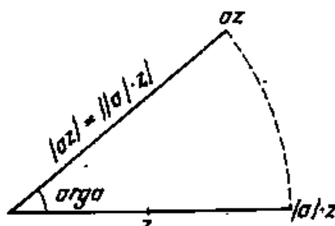


Fig. 59

$\arg a$ în jurul lui O (o omotetie şi o rotaţie de acelaşi centru comută).

O omotetie de raport $k > 0$ şi centru z_0, urmată de o rotaţie de unghi u în jurul lui z_0, se reprezintă prin $z \to z - z_0 \to a(z - z_0) \to z_0 + a(z - z_0)$, unde $|a| = k$, $\arg a = u$, deci prin $Tz = az + (1 - a)z_0$.

Reciproc, o transformare geometrică în plan de forma $Tz = az + b$ cu $a \neq 0$ este o translaţie pentru $a = 1$, iar pentru $a \neq 1$ are un punct fix $z_0 = b/(1 - a)$ şi se scrie $Tz = az + (1 - a)z_0$, deci este o omotetie de centru z_0, urmată de o rotaţie în jurul lui z_0. Deci am demonstrat:

Propoziţie. *Mulţimea transformărilor geometrice ale planului de forma $Tz = az + b$ cu $a \neq 0$ coincide cu mulţimea formată din toate translaţiile, toate rotaţiile, toate omotetiile de raport pozitiv diferit de 1 şi toate aceste omotetii, urmate de rotaţii în jurul centrelor lor. Anume, transformarea $Tz = az + b$ este:*

a) *dacă $a = 1$, translaţia ce duce O în b (identitatea dacă $b = 0$);*

b) *dacă $a \neq 1$, $a > 0$, omotetia de raport a şi centru $b/(1-a)$;*

c) *dacă $a \neq 1$, $|a| = 1$, rotaţia de unghi* $\arg a$ *în jurul lui $b/(1 - a)$;*

d) *dacă $|a| \neq 1$ şi a nu este pozitiv, omotetia de raport $|a|$ şi centru $b/(1 - a)$, urmată de rotaţia de unghi* $\arg a$ *în jurul lui $b/(1 - a)$.*

Vom numi $|a|$ raportul transformării, iar $\arg a$ — unghiul ei.

Fie acum $T_1 z = a_1 z + b_1$, $T_2 z = a_2 z + b_2$ două astfel de transformări. Compunerea lor este $T_1 T_2 z = a_1 a_2 z + a_1 b_2 + b_1$, deci tot o transformare de acest tip. Raportul ei $|a_1 a_2| = |a_1| |a_2|$ este produsul rapoartelor celor două transformări, iar unghiul ei $\arg(a_1 a_2) = \arg a_1 + \arg a_2$ este suma unghiurilor celor două transformări.

6

A 18-A OLIMPIADĂ INTERNAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ (Eisenstadt, Lienz, Heiligenblut, Austria, 1976)

6.1. Organizare

Aceasta a fost prima Olimpiadă Internațională de Matematică organizată de altă țară decît cele opt din lista de la 2.5. Austria anunțase încă din 1974 intenția sa de a organiza această Olimpiadă. De fapt, face parte din tradiție ca, la festivitatea de închidere a fiecărei Olimpiade Internaționale, șeful delegației din țara ce o va organiza anul viitor să invite toate delegațiile prezente să participe.

Prima parte a lucrărilor juriului (alegerea problemelor etc.) a avut loc la Eisenstadt, concursul a avut loc la Lienz, iar a doua parte a lucrărilor juriului (coordonarea etc.) la Heiligenblut. Împărțirea festivă a premiilor a avut loc la Viena.

La această Olimpiadă au participat, pe lîngă țările ce participaseră anul trecut, din nou Cuba și Finlanda, dar a lipsit Mongolia, în total deci 18 delegații, la care s-a adăugat o delegație a R. F. Germania, cu doi elevi în concurs, avînd un statut special: „observator".

Pînă la această Olimpiadă, documentele ce se înmînau delegațiilor și care priveau problemele discutate în această carte erau lista de probleme propuse juriului și, uneori, lista premianților. Existau panouri pe care se afișau punctajele obținute de fiecare concurent, din fiecare delegație, la fiecare problemă, precum și sinteze bazate pe aceste informații.

La Olimpiada a 18-a s-a luat inițiativa multiplicării acestor liste și înmînării lor delegațiilor, ca documente ale concursului. Această inițiativă s-a menținut și la Olimpiadele următoare. Inițiativele au mers și mai departe; menționăm, de exemplu, că au fost distribuite concurenților instrucțiuni scrise asupra modului de a-și găsi

locul în clădirea în care se ținea concursul. Asemenea măsuri au fost necesare ca urmare a faptului că numărul de delegații participante era ridicat.

6.2. Problemele propuse juriului

Acestea au fost în număr de 12, notate după sistemul de la Olimpiada a 15-a (vezi 3.1).

BG1. *În triunghiul ABC se duc bisectoarele AA_1, BB_1, CC_1, care se intersectează în M. Patru din cercurile înscrise în cele șase triunghiuri astfel formate AMB_1, AMC_1, BMA_1, BMC_1, CMA_1, CMB_1 au aceeași rază. Să se demonstreze că triunghiul ABC este echilateral (evident, A_1 este pe BC etc.).*

BG3. *Se consideră un șir $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$ de numere reale, în care $a_0 = a_{n+1} = 0$ și $|a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1}| \leqslant 1$ pentru $k = 1, \ldots, n$. Să se demonstreze că $|a_k| \leqslant k(n+1-k)/2$ pentru $k = 0, \ldots, n+1$.*

CS3. *Într-un patrulater convex plan de arie 32 cm² suma lungimilor a două laturi opuse și a unei diagonale este 16 cm. Să se determine toate lungimile ce le poate avea cealaltă diagonală.*

FI2. *Fie $P_1(x) = x^2 - 2$ și $P_j(x) = P_1(P_{j-1}(x))$ pentru $j = 2, 3, \ldots$ Să se arate că pentru orice n întreg pozitiv rădăcinile ecuației $P_n(x) = x$ sînt toate reale și distincte.*

GB1. *Un șir (u_n) este definit prin $u_0 = 2$, $u_1 = 5/2$, $u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - u_1$ pentru $n = 1, 2, \ldots$ Să se demonstreze că pentru n întreg pozitiv avem $[u_n] = 2^{(2^n - (-1)^n)/3}$, unde $[x]$ înseamnă cel mai mare întreg $\leqslant x$.*

NL3. *Se consideră sistemul de p ecuații cu q necunoscute, unde $q = 2p$:*

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1q}x_q = 0,$$
$$a_{21}x_1 + \ldots + a_{2q}x_q = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pq}x_q = 0,$$

în care fiecare coeficient este un element al mulțimii $\{-1, 0, 1\}$.

Să se demonstreze că există o soluție $(x_1, \ldots, x_q)$ *a sistemului cu proprietățile :*

a) *toți* x_j, $j = 1, \ldots, q$, *sînt întregi ;*

b) *există cel puțin un* j *pentru care* $x_j \neq 0$;

c) $|x_j| \leqslant q$ *pentru orice* $j = 1, \ldots, q$.

NL4. *O cutie paralelipipedică poate fi complet umplută cu cuburi de latură* 1. *Dacă se așază în ea numărul maxim posibil de cuburi, fiecare de volum* 2, *cu laturile paralele cu cele ale cutiei, atunci se ocupă exact* 40% *din volumul cutiei.*

Să se determine dimensiunile tuturor cutiilor cu această proprietate $(\sqrt[3]{2} = 1{,}2599\ldots)$.

PL1. *Fie* $I = (0, 1]$ *și fie* $a \in (0, 1)$. *Definim funcția* $T : I \to I$ *prin*

$$T(x) = \begin{cases} x + (1 - a) & \text{pentru } 0 < x \leqslant a, \\ x - a & \text{pentru } a < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Să se demonstreze că, oricare ar fi intervalul $J \subset I$, *există un număr natural* $n \neq 0$, *astfel ca* $T^n(J) \cap J \neq \emptyset$.

SE3. *Fie* $P(x)$ *un polinom cu coeficienți reali, astfel ca* $P(x) > 0$ *pentru* $x > 0$. *Să se demonstreze că există polinoame* Q *și* R *cu toți coeficienții nenegativi, așa încît* $P(x) = Q(x)/R(x)$ *pentru* $x > 0$.

US6. *Să se determine cel mai mare număr, care este produsul unor numere întregi pozitive, a căror sumă este* 1976.

VN1. *Să se demonstreze că există o infinitate de numere întregi pozitive* n, *astfel încît în scrierea zecimală a lui* 5 *să apară* 1976 *de zerouri consecutive.*

VN2. *Să se determine toate numerele* n *pentru care polinomul* $1976\,(x + x^2 + \ldots + x^n)$ *poate fi scris ca o sumă de polinoame de forma* $a_1x + \ldots + a_nx^n$, *cu* $a_1, \ldots, a_n$ *întregi* > 0, *în fiecare din ele* $a_1, \ldots, a_n$ *fiind distincți doi cîte doi și nedepășind* n.

6.3. Soluțiile problemelor propuse juriului

Este problema NL4 de geometrie sau nu? Dar VN2 privește polinoamele sau nu? În ce domeniu încadrăm problema US6? Nu dorim să încercăm să dăm un răspuns la aceste întrebări, deoarece

acesta ar putea fi numai unul formal. O astfel de situaţie este legată, evident, de calităţi şi nu de defecte ale problemelor menţionate. De aceea vom prezenta soluţiile problemelor propuse juriului „la rînd".

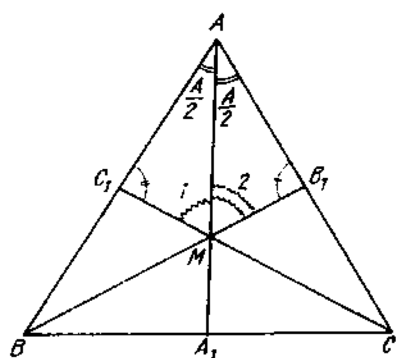


Fig. 60

Soluţia problemei BG1 (vezi 6.2). Egalitatea razelor a patru din cele şase cercuri reprezintă trei relaţii, iar faptul că triunghiul este echilateral reprezintă două relaţii. Se pare deci că ipoteza problemei oferă mai mult decît trebuie.

a) Înţelegînd prin B, C unghiurile respective ale triunghiului ABC, avem (vezi fig. 60) $\sphericalangle B_1 = C + B/2$, $\sphericalangle C_1 = B + C/2$, deci $B = C$ este echivalent cu $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle C_1$ şi deci cu $\sphericalangle M_1 = \sphericalangle M_2$.

Dacă de exemplu $\sphericalangle M_1 > \sphericalangle M_2$, atunci simetricul triunghiului MB_1A faţă de MA va fi conţinut în triunghiul MC_1A. Raza cercului înscris într-un triunghi este mai mare decît cea a oricărui cerc conţinut în acel triunghi (vezi fig. 61). Din raţionamentul de mai sus rezultă că razele cercurilor înscrise în triunghiurile MAC_1, MAB_1 sînt egale dacă şi numai dacă $B = C$, adică dacă şi numai dacă triunghiul ABC este isoscel.

b) Din cele patru cercuri din enunţ ce au razele egale, cel puţin două vor fi în situaţia de a fi înscrise în două triunghiuri în poziţia AMC_1, AMB_1 din fig. 60, deci ce au ambele ca vîrf unul din vîrfurile triunghiului ABC (dacă spre fiecare vîrf ar fi cel mult unul din cercuri, acestea ar fi în total cel mult trei).

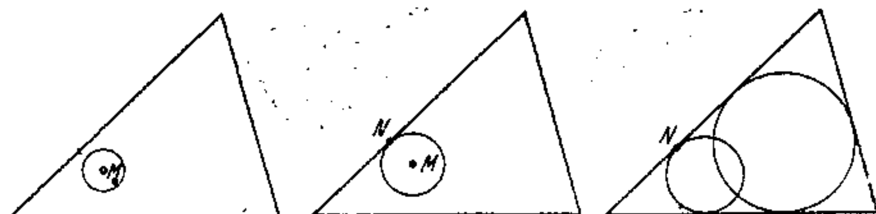


Fig. 61

Din ipoteza problemei rezultă deci că triunghiul ABC este isoscel. Să presupunem, de exemplu, că $AB = AC$. Atunci figura 60 va fi simetrică faţă de AA_1, razele celor şase cercuri din enunţ vor fi două

cîte două egale și ipoteza revine la egalitatea a două din razele celor trei cercuri înscrise respectiv în triunghiurile AMC_1, BMC_1, BMA_1. Deci ipoteza revine la o singură egalitate, iar concluzia tot la una ($AB = BC$ sau $B = 60°$) și din acest moment datele problemei par a fi „atîtea cîte trebuie".

c) Înainte de a trece mai departe, să considerăm o figură cu notații simplificate (fig. 62). Care este condiția necesară și suficientă de egalitate a razelor r, r_1 ale cercurilor înscrise în triunghiurile DEF, DE_1F_1?

Avem $r = 2S_{DEF}/(DE + EF + FD) = EF \cdot h/(DE + EF + FD)$ și o formulă analoagă pentru r_1, cu același h. Deci acea condiție este $(DE + EF + FD)/EF = (DE_1 + E_1F_1 + F_1D)/E_1F_1$, sau $(DE + DF)/EF = (DE_1 + DF_1)/E_1F_1$, sau, conform teoremei sinusurilor, $(\sin F + \sin E)/\sin D = (\sin F_1 + \sin E_1)/\sin D_1$, în notații evidente din fig. 62.

d) Să revenim la problema noastră, presupunînd triunghiul ABC isoscel: $AB = AC$. Să înlocuim triunghiul BMA_1 cu simetricul său BMA_2 față de BM (fig. 63). Unghiul x este mai mic decît 45°.

Egalitatea între razele cercurilor înscrise în triunghiurile AC_1M, BC_1M este echivalentă (vezi c)) cu

$$(\sin 3x + \cos 2x)/\cos x = (\sin 3x + \sin x)/\sin 2x,$$

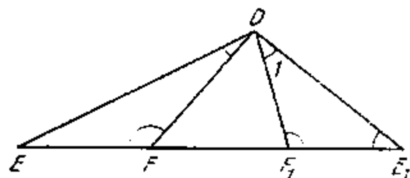


Fig. 62

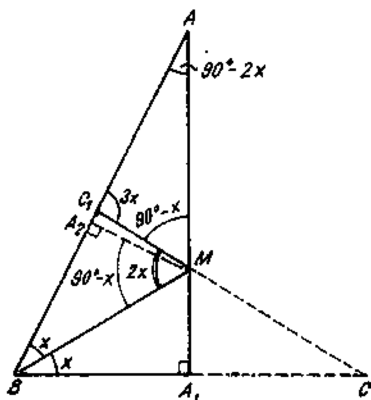


Fig. 63

deci succesiv cu

$$(\sin 3x + \cos 2x)/\cos x = 2 \sin 2x \cos x/\sin 2x,$$

$$\sin 3x + \cos 2x = 2 \cos^2 x, \ \sin 3x = 1, \ x = 30°.$$

Egalitatea între razele cercurilor înscrise în triunghiurile AC_1M, MBA_2 este echivalentă (vezi c) cu

$$(\sin 3x + \cos 2x)/\cos x = (1 + \sin x)/\cos x,$$

deci succesiv cu

$$\sin 3x = \sin x + 2\sin^2 x,\ 2\cos 2x \sin x = 2\sin^2 x,\ \cos 2x = \sin x,$$

$$\sin(90° - 2x) = \sin x,\ x = 30°.$$

Afirmaţia din enunţ este cu aceasta complet demonstrată.

Soluţia problemei BG3 (vezi 6.2). Să notăm cu $b_1, \ldots, b_n$ expresiile care, conform ipotezei, variază independent una de alta în $[-1, 1]$:

$$\begin{aligned}
&a_0 - 2a_1 + a_2 = b_1,\\
&a_1 - 2a_2 + a_3 = b_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{k-2} - 2a_{k-1} + a_k = b_{k-1},\\
&a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1} = b_k,\\
&a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2} = b_{k+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n-1} - 2a_n + a_{n+1} = b_n.
\end{aligned}$$

Cum $a_0 = a_{n+1} = 0$, acesta este un sistem de n ecuaţii liniare cu n necunoscute : $a_1, \ldots, a_n$. În principiu acesta se poate rezolva, conducînd la exprimarea fiecărui a_k sub forma unei expresii liniare în $b_1, \ldots, b_n$, expresie care va arăta cu uşurinţă care sînt limitele între care variază a_k.

Pentru rezolvarea efectivă a acelui sistem, să observăm că pentru a elimina a_1 vom înmulţi prima ecuaţie cu 1, a doua cu 2 şi le vom aduna ; pentru a elimina şi pe a_2 vom aduna la rezultat ecuaţia a treia înmulţită cu 3 etc. În general, deoarece $(j - 1) - 2j + (j + 1) = 0$ şi acesta este coeficientul cu care apare a_j în suma primelor k ecuaţii, înmulţite respectiv cu $1, 2, \ldots, k$, pentru $k > j$, rezultă că eliminarea necunoscutelor $a_1, \ldots, a_{k-1}$ se va realiza prin operaţia indicată.

Nu avem interesul să-l eliminăm şi pe a_k, de aceea vom porni acum cu eliminarea din partea cealaltă, eliminînd $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{k+1}$ prin înmulţirea ecuaţiilor $n, n - 1, \ldots, k$ respectiv cu $1, 2, \ldots, n - k + 1$, urmată de adunarea lor.

Ecuaţia k a apărut înmulţită o dată cu k, o dată cu $n - k + 1$. Pentru a pune în acord în acest punct cele două acţiuni de eliminare,

să înmulţim ecuaţiile 1, 2, ..., k cu $1/k, 2/k, \ldots, k/k = 1$ respectiv, ecuaţiile $n, n-1, \ldots, k$ cu $1/(n-k+1), 2/(n-k+1), \ldots$ $\ldots, (n-k+1)/(n-k+1) = 1$ respectiv (acest acord fiind astfel realizat) şi apoi să le adunăm pe toate (evident ecuaţia k o singură dată şi nu de două ori). Vom obţine

$$a_k\left(\frac{k-1}{k} - 2 + \frac{n-k}{n-k+1}\right) =$$

$$= b_k + \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k-1} jb_j + \frac{1}{n-k+1}\sum_{j=1}^{n-k} jb_{n+1-j}.$$

Coeficientul lui a_k este

$$1 - \frac{1}{k} - 2 + 1 - \frac{1}{n-k+1} = -\frac{n+1}{k(n-k+1)},$$

membrul drept se majorează în modul cu

$$1 + \frac{1}{k}\frac{(k-1)k}{2} + \frac{1}{n-k+1}\frac{(n-k)(n-k+1)}{2} =$$

$$= 1 + \frac{k-1}{2} + \frac{n-k}{2} = \frac{n+1}{2},$$

rezultate care conduc imediat la inegalitatea cerută.

Soluţia problemei CS3 (vezi 6.2). Din fig. 64, unde am presupus că AB, CD sînt laturile opuse, iar BC este diagonala, la care se referă enunţul, se observă că aria patrulaterului $ABCD$ nu scade dacă înlocuim acest patrulater cu altul, în care lungimile lui AB, BC, CD

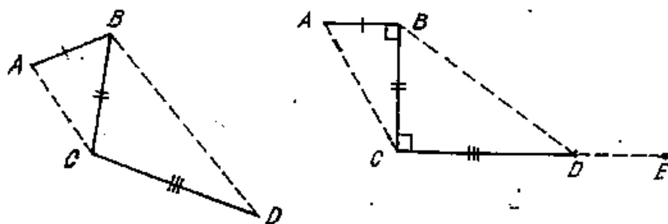


Fig. 64

rămîn aceleaşi, dar AB şi CD devin perpendiculare pe BC. Aria noului patrulater este, ţinînd seama şi de $AB + CD + BC = 16$, $BC(AB + CD)/2 = BC(16 - BC)/2$ şi dintr-un studiu elementar

al variației trinomului de gradul doi obținem $BC(16 - BC)/2 \leqslant 32$. Dar aria patrulaterului inițial era de 32, deci prima înlocuire nu a majorat această arie, adică am avut de la început $AB \perp BC$, $CD \perp BC$, iar în ultima inegalitate avem de fapt egalitate, deci $BC = 8$ (din nou variația trinomului).

Prelungind acum CD cu $DE = AB$, vom avea $AD = BE$ (din paralelogramul $ABED$) și apoi $AD = (BC^2 + CE^2)^{1/2} = 8\sqrt{2}$, care este deci singura lungime posibilă a celeilalte diagonale.

Este evidentă o asemănare, ca idee, cu problema 17-GB propusă juriului la Olimpiada a 17-a (vezi 5.2, 5.10).

Soluția problemei FI2 (vezi 6.2). Să întocmim tabelul de variație a lui $P_1(x)$

x	$-\infty \quad -2 \quad x_{1,1} \quad 0 \quad x_{1,2} \quad 2 \quad +\infty$
$P_1(x)$	$+\infty \searrow \; 2 \searrow 0 \; \searrow -2 \nearrow 0 \; \nearrow 2 \nearrow +\infty$

unde 2 apare în prima linie ca urmare a $P_1(2) = 2$, deci ca rădăcină a ecuației $P_1(x) = x$, iar prezența lui -2 în prima linie se justifică în acest moment, de exemplu, prin $P_1(-2) = 2$.

Putem completa acest tabel cu tabelul de variație a lui $P_2(x) = P_1(P_1(x))$:

x	$-\infty \; -2 \quad x_{1,1} \quad 0 \quad x_{1,2} \quad 2 \quad +\infty$
$P_1(x)$	$+\infty \searrow 2 \searrow \; 0 \searrow -2 \nearrow \; 0 \; \nearrow 2 \nearrow +\infty$
$P_2(x)$	$+\infty \searrow 2 \searrow -2 \nearrow \; 2 \searrow -2 \; \nearrow 2 \nearrow +\infty$

din care rezultă că $P_2(x)$ va avea patru rădăcini reale $x_{2,1}$, $x_{2,2}$, $x_{2,3}$, $x_{2,4}$ distincte, situate astfel:

$$-2 < x_{2,1} < x_{1,1} < x_{2,2} < 0 < x_{2,3} < x_{1,2} < x_{2,4} < 2.$$

Avînd ca model acest pas, să demonstrăm prin inducție că tabelul de variație a lui P_n arată astfel (strictă monotonie pe orice $[x_{n,k}, y_{n,k}]$ și $[y_{n,k}, x_{n,k+1}]$):

x	$-\infty \; -2 \; x_{n,1} \; y_{n,1} \ldots x_{n,k} \; y_{n,k} \; x_{n,k+1} \ldots y_{n,2^n-1} \; x_{n,2^n} \quad 2 \quad +\infty$
$P_n(x)$	$+\infty \searrow 2 \searrow 0 \searrow \; -2 \ldots 0 \quad (-1)^k 2 \quad 0 \quad \ldots \; -2 \nearrow 0 \nearrow 2 \nearrow +\infty$

Presupunînd afirmația adevărată pentru n, putem, conform cu $P_{n+1}(x) = P_1(P_n(x))$ și tabelului de variație a lui $P_1(x)$, completa acest tabel cu o a treia linie conținînd

$$P_{n+1}(x), \; +\infty, \; 2, \; -2, \; 2, \ldots, -2, \; 2, \; -2, \ldots, 2, \; -2, \; 2, \; +\infty,$$

ceea ce arată că, notînd $y_{n,0} = -2$, $y_{n,2^n} = 2$, în fiecare interval $(x_{n,k}, y_{n,k})$ va exista exact cîte o rădăcină $x_{n+1,2k}$ și în fiecare

$(y_{n,k}, x_{n,k+1})$ exact cîte o rădăcină $x_{n+1,2k+1}$ ale lui $P_{n+1}(x)$, iar $P_{n+1}(x)$ va fi strict monoton pe fiecare din intervalele ce apar în tabelul de mai înainte.

Tabelul de variație a lui $P_{n+1}(x)$ capătă forma necesară realizării pasului de inducție, dacă notăm $y_{n+1\,2k-1} = x_{n,k}$, $y_{n+1,2k} = y_{n,k}$.

Odată stabilit faptul că tabelul de variație a lui $P_n(x)$ are forma indicată, din acesta se pot exclude toți $x_{n,k}$ de pe linia întîi și toate zerourile de pe linia a doua și apoi el poate fi completat cu încă o linie, în care vom trece valorile respective ale lui $P_n(x) - x$, anume

$$+\infty,\ 4,\ -2 - y_{n,1},\ \ldots,\ (-1)^k \cdot 2 - y_{n,k},\ \ldots,\ -2 - y_{n,2^n-1},\ 0,\ +\infty.$$

Cum $|y_{n,k}| < 2$, semnele acestor numere alternează (excluzînd pe cei doi $+\infty$ și pe 0), stabilind existența a $2^n - 1$ rădăcini reale distincte pentru $P_n(x) = x$, în afară de rădăcina 2.

Rămîne de demonstrat, printr-o inducție simplă, că gradul lui $P_n(x) - x$ este 2^n. Este instructiv de prezentat, pe aceeași figură, graficele lui $P_n(x)$ și lui x (fig. 65).

Soluția prezentată pare a fi cea mai directă.

Soluția problemei GB1 (vezi 6.2). Iată un mod de a ajunge la o soluție, ignorînd expresia dată în enunț pentru u_n.

Se observă că, în relația de recurență pentru u_n, termenii $-u_2$ și -2 par ar avea o contribuție sensibil mai mică decît $u_n u_{n-1}^2$ [impresie puternic întărită de calculul efectiv al cîtorva termeni de la începutul șirului (u_n)]. De aceea vom determina întîi expresia termenului v_n dintr-un șir ce satisface $v_{n+1} = v_n v_{n-1}^2$.

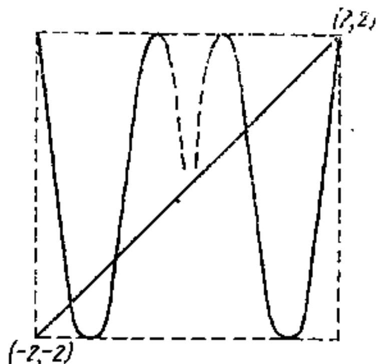


Fig. 65

Pentru a transforma relația de recurență pentru v_n într-o relație liniară, să punem $v_n = a^{x_n}$ cu $a > 1$ (deci impunînd și condiția $v_n > 0$); obținem $x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1}$. Această ecuație se rezolvă prin metoda obișnuită, încercînd cu $x_n = c \cdot z^n$, ajungînd la $z^2 - z - 2 = 0$, deci $z = -1$ sau $z = 2$. Suma a două soluții ale ecuației $x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1}$ fiind tot o soluție a acestei ecuații, rezultă că forma generală a șirurilor (x_n) ce satisfac această relație este $x_n = c(-1)^n + d \cdot 2^n$, cu c, d constante (într-adevăr, putem alege c și d astfel ca x_0 și x_1 să aibă două valori care le dorim, iar două astfel de șiruri pentru care termenii 0 și 1 sînt respectiv aceiași vor coincide — inducție).

Să continuăm rezolvarea problemei prin a pune $u_n = v_n + w_n$. Relația de recurență pentru u_n devine

$$v_{n+1} + w_{n+1} = (v_n + w_n)(v_{n-1}^2 + w_{n-1}^2 + 2v_{n-1}w_{n-1} - 2) - u_1,$$

adică

$$w_{n+1} = w_n w_{n-1}^2 + v_n w_{n-1}^2 + w_n v_{n-1}^2 + 2(v_n + w_n)(v_{n-1}w_{n-1} - 1) - (5/2).$$

Șirurile (v_n) și (w_n) nu apar drept unic determinate; relația de mai sus s-ar simplifica, dacă am impune ca $v_n w_n = 1$ pentru orice n, prin dispariția termenului cu paranteze, precum și prin faptul că $v_{n+1} = v_n v_{n-1}^2$ și $v_n w_n = 1$ (pentru orice n) implică $w_{n+1} = w_n w_{n-1}^2$. Impunînd $v_n w_n = 1$ pentru orice n, valabilitatea relației de recurență va fi echivalentă cu $v_n v_{n-1}^{-2} + v_{n-1}^2 v_n^{-1} = 5/2$, deci cu $v_n v_{n-1}^{-2} = 2$ sau $1/2$. În plus, vom avea $u_n = v_n + v_n^{-1}$, ceea ce ne permite să determinăm v_0 și v_1, anume $v_0 = 1$ și $v_1 = 2$ (alegînd valoarea mai mare, în acord cu începutul soluției). Aceasta sugerează alegerea $a = 2$.

Avem și $v_n v_{n-1}^{-2} = 2^{x_n - 2x_{n-1}}$; condiția $v_n v_{n-1}^{-2} = 2$ sau $1/2$ se exprimă prin $x_n - 2x_{n-1} = \pm 1$. Dar

$$x_n - 2x_{n-1} = c(-1)^n + d \cdot 2^n - 2c(-1)^{n-1} - 2d \cdot 2^{n-1} = 3c(-1)^n$$

și va trebui să avem $c = \pm 1/3$. Dar c se poate calcula, din $v_0 = 1$, $v_1 = 2$, deci din $x_0 = 0$, $x_1 = 1$; rezultă $x_1 - 2x_0 = -3c$, deci c este într-adevăr $-1/3$. În plus $c + d = x_0 = 0$, deci $d = 1/3$.

Am ajuns astfel la o expresie explicită pentru u_n, anume $u_n = v_n + v_n^{-1} = 2^{x_n} + 2^{-x_n}$, $x_n = (2^n - (-1)^n)/3$. Cum $2^n - (-1)^n$ se divide cu $2 - (-1) = 3$, x_n rezultă întreg, pozitiv pentru $n \geqslant 1$. Deci 2^{-x_n} este subunitar, 2^{x_n} este întreg și ajungem imediat la concluzia cerută de problemă.

Observație. Episodul din rezolvarea problemei precedente, în care am determinat toate șirurile (x_n) ce satisfac ecuația $x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1}$, reprezintă un instrument a cărui cunoaștere se dovedește utilă unui concurent, chiar neexistînd siguranța că această metodă se predă în liceele tuturor țărilor participante. Adăugăm faptul că, dacă „ecuația în z" $az^2 + bz + c = 0$ $(a \neq 0)$ ar fi avut o rădăcină dublă z_0, atunci soluția generală a ecuației $ax_{n+1} + bx_n + cx_{n-1} = 0$ ar fi fost $x_n = (cn + d)z_0^n$, ceea ce se poate stabili, de exemplu, prin verificare directă.

La Olimpiadele prezentate pînă acum astfel de cunoștințe au intervenit numai în discuția problemei II6-SU de la Olimpiada a 16-a (vezi 4.2, 4.3), problemă ce nu a ajuns să fie propusă în concurs. Însă la Olimpiada a 14-a a fost dată spre rezolvare concurenților,

printre cele șase, următoarea problemă, propusă de delegația Bulgariei:

Fie f, g funcții definite pe R cu valori în R, satisfăcînd ecuația $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)g(y)$ pentru orice x, y. Dacă $f(x)$ nu este 0 pentru orice x și dacă $|f(x)| \leqslant 1$ pentru orice x, să se demonstreze că $|g(y)| \leqslant 1$ pentru orice y.

Iată cum poate fi „dominată" această problemă. Să fixăm pe y și x și să considerăm $x_n = x + ny$, pentru $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Fie $u_n = f(x_n)$; relația din enunț conduce la $u_{n+1} + u_{n-1} = 2u_n g(y)$, adică la o ecuație de tipul discutat mai sus. Ecuația în z corespunzătoare este $z^2 - 2g(y)z + 1 = 0$. Dacă $|g(y)| > 1$, atunci aceasta va avea discriminantul pozitiv, deci două rădăcini reale distincte, de produs 1, ce le vom nota z, z^{-1}, alegînd $|z| > 1$. Rezultă $u_n = cz^n + dz^{-n}$, aceasta nu numai pentru $n = 0, 1, 2, \ldots$, ci și pentru $n = -1, -2, \ldots$ Dacă $c \neq 0$, atunci $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = \infty$, iar dacă $d \neq 0$, atunci $\lim\limits_{n\to-\infty} |u_n| = \infty$, ambele contrazicînd condiția din enunț: $|u_n| \leqslant 1$, deci $c = d = 0$, $0 = u_0 = f(x)$, aceasta pentru orice x, contrar celeilalte condiții din enunț.

Soluția problemei NL3 (vezi 6.2). Rezolvarea acestei probleme nu folosește nimic din teoria sistemelor de ecuații liniare!

Metoda este următoarea. Se consideră o mulțime finită M de sisteme $(x_1, \ldots, x_q)$ de cîte q numere întregi și o mulțime finită V de sisteme $(y_1, \ldots, y_p)$ de cîte p numere întregi. Se aleg aceste mulțimi astfel ca funcția f, definită prin $f((x_1, \ldots, x_q)) = \left(\sum\limits_{j=1}^{q} a_{1j}x_j, \ldots, \sum\limits_{j=1}^{q} a_{pj}x_j\right)$ să ducă M în V și astfel încît numărul de elemente din V să fie mai mic decît numărul de elemente din M. Va rezulta că există $(x_1', \ldots, x_q')$ și $(x_1'', \ldots, x_q'')$ în M așa ca $f((x_1', \ldots, x_q')) = f((x_1'', \ldots, x_q''))$. Această ultimă relație se scrie $\sum\limits_{j=1}^{q} a_{ij}x_j' = \sum\limits_{j=1}^{q} a_{ij}x_j''$, pentru $i = 1, \ldots, p$, deci $\sum\limits_{j=1}^{q} a_{ij}(x_j' - x_j'') = 0$ pentru $i = 1, \ldots, p$; ea afirmă că $(x_1' - x_1'', \ldots, x_q' - x_q'')$ este o soluție a sistemului. Dacă avem grijă ca, pe lîngă condițiile de mai sus, pentru M să fie valabil faptul că $|x_i' - x_i''| \leqslant q$, oricare ar fi $(x_1', \ldots, x_q') \in M$, $(x_1'', \ldots, x_q'') \in M$ și $i = 1, \ldots, q$, atunci problema va fi rezolvată.

În stabilirea proprietății $f((x_1, \ldots, x_q)) \in V$ pentru $(x_1, \ldots, x_q) \in M$ vom folosi condiția din enunț ca a_{ij} să fie întregi și $|a_{ij}| \leqslant 1$. Va rezulta $\left|\sum\limits_{j=1}^{q} a_{ij}x_j\right| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{q} |x_j|$.

Pentru a putea trage din ea concluzii cît mai puternice, vom alege

$$M = \{(x_1, \ldots, x_q) | x_i \text{ întregi}, |x_i| \leqslant p \text{ pentru orice } i = 1, \ldots, q\}$$

și atunci, dacă $(x'_1, \ldots, x'_q)$, $(x''_1, \ldots, x''_q)$ vor fi în M, va rezulta $|x'_i - x''_i| \leqslant 2p = q$, deci ultima condiție impusă lui M va fi îndeplinită. Mulțimea V se va alege drept $\{(y_1, \ldots, y_p) | y_i$ întregi, $|y_i| \leqslant pq$ pentru orice $i = 1, \ldots, p\}$ și inegalitatea $\left|\sum_{j=1}^{q} a_{ij} x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{q} |x_j|$ ne asigură că $f(M) \subset V$.

Rămîne să comparăm numărul de elemente din M cu cel din V. Avem card $M = (2p+1)^q$, deoarece fiecare x_i are $2p+1$ valori posibile și, analog, card $V = (2pq+1)^p$. Cum $q = 2p$, inegalitatea ce trebuie stabilită este $(4p^2+1)^p < (2p+1)^{2p}$ și ea revine la $4p^2 + 1 < (2p+1)^2$, care rezultă imediat.

Soluția problemei NL4 (vezi 6.2). a) Fie x, y, z dimensiunile cutiei, care sînt numere întregi. Pe dimensiunea x vor încăpea $[x \cdot 2^{-1/3}]$ cuburi de volum 2, deci de latură $2^{1/3}$; la fel pe celelalte două vor încăpea cîte $[y \cdot 2^{-1/3}]$, $[z \cdot 2^{-1/3}]$ cuburi. „Ecuația problemei" va fi deci $2[x \cdot 2^{-1/3}][y \cdot 2^{-1/3}][z \cdot 2^{-1/3}] = (40/100)xyz$ sau $(x/[x \cdot 2^{-1/3}])(y/[y \cdot 2^{-1/3}])(z/[z \cdot 2^{-1/3}]) = 5$.

b) Ce se poate spune despre funcția $f(x) = x/[x \cdot 2^{-1/3}]$ cînd $x = 2, 3, \ldots$? (Pentru $x = 1$ numitorul este nul.) Pe de o parte $f(x) \geqslant x/(x \cdot 2^{-1/3}) = 2^{-1/3}$. Pe de altă parte $f(x) < x/(x \cdot 2^{-1/3} - 1) \to 2^{-1/3}$ pentru $x \to +\infty$, deci $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2^{-1/3}$.

c) Căutînd soluții ale problemei, putem presupune că $f(x) \geqslant f(y) \geqslant f(z)$, ceea ce vom face de acum încolo; deci nu vom considera ca distincte două soluții ce diferă printr-o permutare a componentelor x, y, z.

Să determinăm întîi valorile posibile ale lui $f(x)$. Dacă $(f(x))^3 < 5$, atunci (x, y, z) nu poate fi soluție. Să căutăm un a astfel ca $(f(x))^3 < 5$ pentru $x \geqslant a$. Pentru a evita unele calcule cu $2^{1/3}$ să scriem $f(x) < x/(x \cdot 2^{-1/3} - 1) \leqslant x/([x \cdot 2^{-1/3}] - 1)$. Să întocmim tabelul:

x	$[x \cdot 2^{-1/3}]$	$f(x)$	$u = x/([x \cdot 2^{-1/3}] - 1)$	Compararea lui u^3 cu 5
2	1	2	—	
3	2	3/2	3	$27 > 5$
4	3	4/3	2	$8 > 5$
5	3	5/3	$5/2 > 2$	
6	4	3/2	2	
7	5	7/5	7/4	$343/64 > 5$
8	6	4/3	8/5	$512/125 < 5$

Deci $f(x) < 8/5$ pentru $x \geqslant 8$, valori inadmisibile pentru $f(x)$ din problema noastră. Ca valori admisibile apar deocamdată cele cu $x < 8$ şi $f(x) > 8/5$, deci, conform tabelului, $f(x) = 2$ şi $f(x) = 5/3$. Dar $(5/3)^3 = 125/27 < 5$ şi deci cade şi posibilitatea $f(x) = 5/3$. Am obţinut în consecinţă $f(x) = 2$.

d) Ecuaţia problemei devine $f(y)f(z) = 5/2$. O vom trata după metoda de la c); să observăm însă că $(8/5)^2 = 64/25 > 5/2$ şi deci trebuie completat tabelul. Este suficientă încă o linie: 9, 7, 9/7, 3/2, deci $f(y) < 3/2$ pentru $y \geqslant 9$ şi, cum $(3/2)^2 = 9/4 < 5/2$, rezultă că pentru a obţine soluţii ale problemei noastre trebuie să alegem $y \leqslant 8$, $f(y) > 3/2$.

Conform tabelului, rămîn posibilităţile $f(y) = 2$ şi $f(y) = 5/3$.

e) $f(y) = 2$ conduce la $f(z) = 5/4$ care nu este posibilă; aceasta nu pe baza tabelului, ci ca urmare a faptului că $5/4 < 2^{1/3}$, vezi b)!

f) $f(y) = 5/3$ conduce la $f(z) = 3/2$, ceea ce este posibil. Cum $f(x) = 2$, analizînd tabelul şi ţinînd seama de concluziile de la c) şi d), ajungem la rezultatul că singurele soluţii ale problemei sînt $(x, y, z) = (x, y, z) = (2, 5, 3)$ şi $(x, y, z) = (2, 5, 6)$.

Soluţia problemei PL1 (vezi 6.2). a) Să introducem pe mulţimea R a numerelor reale relaţia de echivalenţă $x \equiv y$ definită prin „$x - y$ este întreg" (se verifică imediat că aceasta este o relaţie de echivalenţă). Pentru orice $x \in R$ există un $y \in I = (0, 1]$ unic aşa încît $x \equiv y$. Definiţia transformării T din enunţ se poate scrie acum $Tx \equiv x - a$, $Tx \in (0, 1]$, pentru $x \in (0, 1]$.

Să definim şi $S : R \to R$ prin $Sx = x - a$ şi să observăm că $x \equiv y$ implică $x - y$ întreg, care implică $Sx - Sy = x - y$ întreg, deci $x \equiv y$ implică $Sx \equiv Sy$.

Acum $Tx \equiv x - a$ se transcrie $Tx \equiv Sx$. Dovedim prin inducţie că $T^n x \equiv S^n x$; într-adevăr, aceasta este valabil pentru $n = 1$ şi dacă este adevărat pentru n, obţinem $T^{n+1}x = TT^n x \equiv ST^n x \equiv$ $\equiv SS^n x$, ultima conform ipotezei de inducţie şi unuia din faptele deja stabilite, deci $T^{n+1}x \equiv S^{n+1}x$. Dar $S^n x = x - na$, ceea ce se demonstrează tot prin inducţie.

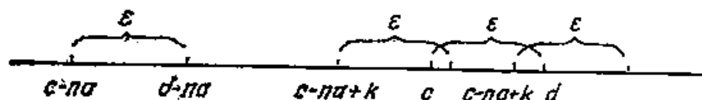


Fig. 66

Dacă J este un interval (c, d), atunci $S^n J$ este intervalul $(c - na, d - na)$ şi condiţia $T^n J \cap J \neq \emptyset$ revine la existenţa unui număr întreg k aşa încît $c - na + k \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, unde $\varepsilon = d - c$ (vezi fig. 66).

Deci pentru a rezolva problema trebuie să dovedim că, oricare ar fi $a \in R$ şi $\varepsilon > 0$, există numerele întregi k şi n, cu $n \geqslant 1$, astfel ca $|na - k| < \varepsilon$.

b) Să demonstrăm afirmaţia de mai înainte, la care s-a redus problema. Există două cazuri.

Primul este cel în care a este raţional, $a = p/q$ cu p, q întregi, $q \geqslant 1$. Este destul să alegem $n = q$, $k = p$ şi aceşti n şi k sînt „buni pentru orice $\varepsilon > 0$", deoarece $na - k = 0$. Mai precis, T^n este identitatea.

Al doilea caz este cel în care a este iraţional. Pentru un astfel de a relaţia $n_1 a - n_2 a = k$ cu n_1, n_2, k întregi, $n_1 \neq n_2$, este imposibilă. Pentru orice $n \geqslant 1$ să definim a_n prin $na - k_n = a_n \in (0, 1]$ cu k_n întreg. Atunci a_n vor fi distincţi doi cîte doi.

Dacă $|a_n - a_m| \geqslant \varepsilon$ pentru orice $1 \leqslant m < n \leqslant N$, atunci obţinem, aranjînd $a_1, \ldots, a_N$ în ordine crescătoare, $(N - 1)\varepsilon \leqslant 1$.

Pentru un $\varepsilon > 0$ dat, putem alege însă pe N destul de mare astfel ca $(N-1)\,\varepsilon \leqslant 1$ să fie falsă. Rezultă atunci existenţa unor întregi $n > m \geqslant 1$ pentru care $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Aceasta se transcrie $|na - k_n - (ma - k_m)| < \varepsilon$, deci $|(n - m)a - (k_n - k_m)| < \varepsilon$, dovedind afirmaţia la care se redusese problema.

Soluţia autorilor pentru problema PL1 (vezi 6.2). Transformarea T duce intervalul $(0, a]$ pe $(1 - a, 1]$, iar $(a, 1]$ pe $(0, 1 - a]$, de aşa manieră încît orice interval $L = (u, v)$ inclus în $(0, a]$ sau în $(a, 1]$ este dus într-un interval, $(u + 1 - a, v + 1 - a)$, respectiv $(u - a, v - a)$, de aceeaşi lungime $v - u$ ca şi L.

La fel se petrec lucrurile cu intervale închise, semiînchise etc. Dacă L nu este inclus în $(0, a]$ sau în $(a, 1]$, TL se exprimă scriind L ca reuniune disjunctă de $L \cap (0, a]$ şi $L \cap (a, 1]$ etc. De aici rezultă că, dacă J este un interval, T^nJ este o reuniune de intervale disjuncte şi că suma lungimilor intervalelor ce formează T^nJ este egală cu lungimea lui J.

Să demonstrăm acum afirmaţia din problemă prin absurd. Dacă $T^nJ \cap J = \emptyset$ pentru orice $n \geqslant 1$, atunci, cum T este bijectivă, obţinem $T^kJ \cap T^rJ = T^r(T^{k-r}J \cap J) = \emptyset$ pentru $k > r$, deci $J, TJ, \ldots, T^nJ, \ldots$ rezultă disjuncte două cîte două. În plus, $J \cup TJ \cup \ldots \cup T^nJ \subset (0, 1]$.

Deci suma s_n a lungimilor intervalelor ce formează $J, TJ, \ldots, T^nJ$ nu depăşeşte 1, dar pe de altă parte, cum suma lungimilor intervalelor ce formează T^nJ s-a văzut că este egală cu lungimea lui J, rezultă că $s_n = (n + 1)(d - c)$ dacă $J = (c, d)$. Obţinem $(n + 1)(d - c) \leqslant 1$ pentru orice n, ceea ce, cum $d - c > 0$, constituie o contradicţie [se ia $n > (d - c)^{-1} - 1 \ldots$].

Soluția problemei SE3 (vezi 6.2). Dacă afirmația din problemă este demonstrată pentru două polinoame P_1 și P_2, ea rezultă cu ușurință adevărată și pentru produsul P_1P_2. Cum orice polinom cu coeficienți reali este produsul dintre o constantă reală și polinoame de forma $x^2 \pm ax + b^2$, $x \pm c$, cu $a, b, c \geq 0$, $a < 2b$ și cum condiția din enunț exclude întîi cazul $x - c$ cu $c > 0$ (polinomul s-ar anula pentru $x = c > 0$) și apoi cazul „constantei" negative (pentru x pozitiv polinomul ar fi negativ), rezultă că este suficient să rezolvăm problema în cazul $P(x) = x^2 - ax + b^2$ cu $a > 0$, $a < 2b$.

Dar nici pentru un astfel de polinom problema nu apare banală; tentativa $(x^2 - ax + b^2)(x + d) = x^3 + (d - a)x^2 + (b^2 - ad)x + b^2d$ reclamă $d \geq a$, $d \leq b^2/a$, relații ce pot fi contradictorii deoarece nu se știe că $a \leq b^2/a$, adică $a \leq b$, ci numai că $a < 2b$! Tentativa de a înmulți cu un polinom general cu coeficienți nenegativi nu se dovedește nici ea încurajatoare.

Vom încerca să nu ne îndepărtăm de lumea trinomului de gradul doi, anume să înmulțim cu $x^2 + ax + b^2$. Obținem $(x^2 - ax + b^2)(x^2 + ax + b^2) = (x^2 + b^2) - a^2x^2$, deci un polinom de forma $P_1(x^2)$, unde P_1 este un polinom de gradul doi. Dacă vom rezolva problema pentru P_1, atunci, punînd în relația obținută $(P_1(x) = Q_1(x)/R_1(x))x^2$ în loc de x, vom ajunge să rezolvăm problema pentru $P_1(x^2)$ și deci și pentru P, anume

$$P(x) = P_1(x^2)/(x^2 + ax + b^2) = Q_1(x^2)/((x^2 + ax + b^2)R_1(x^2)).$$

Ce legătură există între P_1 și P? Avem $P_1(x^2) = P(x)P(-x)$, de unde deducem că rădăcinile lui P_1 (ambele complexe) sînt pătratele rădăcinilor lui P. Deci modulele rădăcinilor lui P_1 (care module sînt egale, acele rădăcini fiind de forma $w \pm zi$) sînt pătratele modulelor rădăcinilor lui P, iar argumentele rădăcinilor lui P_1 (care argumente diferă numai prin semn) sînt de două ori mai mari decît argumentele rădăcinilor lui P.

Acum se deschide calea către rezolvarea problemei. Condițiile $a > 0$, $a < 2b$ impuse lui P se traduc prin „P are rădăcini complexe cu părțile reale pozitive" sau prin „P are rădăcini de argumente nenule, argumente cuprinse strict între $-\pi/2$ și $\pi/2$".

Fie u, $-u$ acele argumente, cu $u > 0$. Observația precedentă spune că dacă afirmația din enunț este adevărată pentru $2u$ (în sensul că un polinom de gradul doi ale cărui rădăcini au $2u$ și $-2u$ ca argumente se poate scrie sub forma din enunț), atunci ea este adevărată și pentru u.

Dar $0 < u < \pi/2$ și va exista un k minim pentru care $2^ku \geq \pi/2$, deci pentru care $2^{k-1}u < \pi/2$. Rezultă $2^ku < \pi$, deci rezolvarea pro-

blemei pentru $2^k u$ revine la cazul unui polinom de gradul doi cu rădăcini complexe de argumente $\pm v$, cu $\pi/2 \leqslant v < \pi$, deci cu părțile reale nepozitive. Un astfel de polinom este de forma $x^2 + rx + s^2$ cu $r \geqslant 0$, adică are coeficienți nenegativi și pentru el afirmația din enunț este evident adevărată ($R = 1$ etc.).

Observație. Soluția autorilor pornea de la relația

$$(x^2 - ax + b^2) \sum_{k=0}^{n-1} (x^2 + b^2)^k (ax)^{n-1-k} = (x^2 + b^2)^n - (ax)^n.$$

Trebuie luat n par, $n = 2m$ pentru ca termenul $(ax)^n$ să nu conducă inevitabil al un termen cu coeficient negativ în polinomul din membrul drept. Pentru ca aceasta să nu se întimple în cazul $n = 2m$ trebuie ca a^{2m} să nu depășească $C_{2m}^{m} b^{2m}$, coeficientul termenului în $x^{2m} = (x^2)^m$ din dezvoltarea binomului. Notînd $b^2/a^2 = c$ și observînd că avem $2b > a$, deci $c > 1/4$, inegalitatea ce trebuie îndeplinită se scrie $C_{2m}^{m} c^m > 1$. Posibilitatea de a alege un m care să conducă la rezolvarea problemei, deci care să satisfacă ultima relație, va rezulta din $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n > 1$, unde am notat $u_n = C_{2n}^{n} c^n = (2n)!\, c^n/(n!)^2$. Avem $u_{n+1}/u_n = (2n + 2)(2n + 1)c/(n + 1)^2 \to 4c > 1$ pentru $n \to +\infty$, deci pentru m_0 și $d > 1$ bine aleși avem, pentru $m \geqslant m_0$, $u_{m+1} \geqslant u_m \cdot d$, $u_m \geqslant u_{m_0} d^{m-m_0} \to +\infty$ pentru $m \to +\infty$ etc.

Soluția problemei US6(vezi 6.2). Problema seamănă cu o cunoscută problemă de maxim, dar în care factorii sînt numere reale oarecare (pozitive etc.). Aici factorii sînt întregi. Deci numai ideea rezolvării acelei probleme cunoscute de maxim poate fi (și chiar este) utilă.

În cazul nostru problema se simplifică, observînd că există o mulțime finită de sisteme de numere întregi pozitive cu suma 1976 (un sistem conține cel mult 1976 de numere, fiecare din ele nu depășește 1976 etc.). Deci maximul din problemă este atins.

Fie $n_1 \ldots n_k$ un produs în care toți n_i sînt întregi pozitive de sumă 1976. Dacă $n_1 \geqslant 4$, atunci, înlocuind n_1 cu numerele 2 și $n_1 - 2$, suma nu se modifică, iar produsul devine $2(n_1 - 2)n_2 \ldots n_k$. Deoarece, ca urmare a faptului că $n_1 \geqslant 4$, avem $2(n_1 - 2) \geqslant n_1$, produsul nu a scăzut. Acest raționament, împreună cu observația că dacă $n_1 = 1$, atunci, eliminînd n_1 și înlocuind n_2 cu $n_1 + 1$, suma nu se modifică, iar produsul crește, arată că maximul lui $n_1 \ldots n_k$ trebuie căutat în clasa acelor sisteme $(n_1, \ldots, n_k)$ de numere pozitive, de sumă 1976 (cu k oarecare !), care în plus satisfac și $n_i \in \{2, 3\}$ pentru orice $i = 1, \ldots, k$.

Relațiile $2 + 2 + 2 = 6 = 3 + 3$, $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 < 9 = 3 \cdot 3$ arată că produsul crește ca urmare a înlocuirii a trei factori egali cu 2 cu doi factori egali cu 3, înlocuire ce nu modifică suma. Deci produsul maxim va avea cel mult doi factori egali cu 2 și restul factorilor egali

cu 3. Dar această condiție determină deja produsul: $1976 \equiv 2 \pmod 3$ deci numărul de factori egali cu 2, dacă toți ceilalți sînt 3, este congruent cu 1 modulo 3. Rezultă că produsul maxim va avea un factor egal cu 2 și $(1976 - 2)/3 = 658$ egali cu 3; valoarea lui este $2 \cdot 3^{658}$, care, evident, nu se pune problema a fi calculată de concurenți.

Soluția problemei VN1 (vezi 6.2). a) Această problemă apare ca un caz particular al unei probleme foarte frumoase ce a figurat, în jurul anului 1950, printre problemele „pregătitoare" pentru Olimpiada de Matematică din U.R.S.S., problemă ce cerea să se demonstreze că, oricare ar fi $k > 0$, cifrele zecimale $r_1, \ldots, r_k$ cu $r_1 > 0$ și numărul întreg pozitiv a ce nu este o putere întreagă a lui 10, există un întreg $n > 0$ astfel încît scrierea zecimală a lui a^n să înceapă cu cifrele $r_1, \ldots, r_k$.

Într-adevăr, alegînd $a = 5$, r_1 oarecare, $r_2 = \ldots = r_k = 0$, k oarecare, se obține afirmația din problema VN1.

b) Pentru a dovedi valabilitatea enunțului problemei indicate la a), să scriem condiția ei sub forma

$$(r_1 + \ldots + r_k \cdot 10^{-k+1})10^m \leqslant a^n <$$

$$< (r_1 + \ldots + r_k \cdot 10^{-k+1} + 10^{-k+1})10^m,$$

cu m întreg, $m \geqslant k - 1$, să notăm $b = r_1 + \ldots + r_k \cdot 10^{-k+1}$, $c = b + 10^{-k+1}$ și să logaritmăm, în baza **10**, relația la care trebuie să ajungem. Obținem $m + \lg b \leqslant n \lg a < m + \lg c$.

c) În legătură cu ultima relație să observăm că $1 \leqslant b < c \leqslant 10$, deci $0 \leqslant \lg b < \lg c \leqslant 1$ și că $\lg a$ este irațional; în caz contrar am avea $10^{p/q} = a$, $a^q = 10^p$, deci $a = 2^u 5^v$, $u = p/q = v$, adică a ar fi o putere a lui 10, contrar ipotezei.

d) Ceea ce trebuie demonstrat se enunță acum astfel. Oricare ar fi $0 \leqslant b < c \leqslant 1$, întregul k și numărul irațional $a > 0$, există întregi m, n cu $m \geqslant k$ și $n \geqslant 1$ astfel ca $b \leqslant na - m < c$.

Această afirmație se demonstrează începînd cu raționamentele din soluția problemei PL1, punctul b, cazul 2, care ne arată existența unor întregi $u \geqslant 1$ și $v \geqslant 0$ așa încît $|ua - v| < c - b$. Deosebim și aici două cazuri.

Primul este $0 < ua - v < c - b$. În această situație se consideră numerele $0 < ua - v < 2(ua - v) < \ldots < z(ua - v) < 1 \leqslant \leqslant (z + 1)(ua - v)$, cu z, evident, întreg. Cum $ua - v < c - b$, va exista unul din aceste numere, $d(ua - v)$, care va aparține intervalului $[b, c)$ și vom putea alege $n = du$, $m = dv$.

Al doilea caz este $-(c-b) < ua - v < 0$. Considerăm numerele

$$(z+1)(ua-v)+1 \leq 0 < z(ua-v)+1 < \ldots$$
$$\ldots < 2(ua-v)+1 < ua-v+1 < 1$$

şi, la fel ca în cazul 1, unul din ele va aparţine lui $[b, c)$ şi vom putea alege, dacă acesta este $d(ua-v)+1$, $n = du$, $m = dv - 1$.

e) Pentru a încheia demonstraţia va trebui să ne asigurăm că $m \geq k$. Aceasta se poate face prin mai multe metode; prezentăm una ce pare mai uşor de redactat. Va fi destul să ne asigurăm că $v \geq k+1$. Relaţia $ua - v < c - b$, transcrisă sub forma $v > ua + b - c$, ne arată că va fi suficient să ne asigurăm că $u \geq u_0$, unde $u_0 = [(k+1+c-b)/a]+1$. Pentru a fi siguri că obţinem un u cu această proprietate vom reconsidera raţionamentul din punctul b) al soluţiei problemei PL1, scriind, în loc de $|a_n - a_m| \geq \varepsilon$ cu $1 \leq m < n \leq N$, în notaţiile de acolo, $|a_{nu_0} - a_{mu_0}| \geq \varepsilon$ cu $1 \leq m < n \leq N$ şi vom obţine drept u un multiplu de u_0, după încheierea raţionamentului respectiv.

Soluţia autorilor la această problemă a fost mult mai elementară, vizînd o zonă diferită a scrierii zecimale a lui 5^n şi legată intim de proprietăţi ale numărului 5.

Se porneşte de la $5 = 1 + 2^2$, relaţie ce reprezintă punctul iniţial al unui raţionament de inducţie simplu ce stabileşte că $5^{2^n} = 1 + t_n \cdot 2^{n+2}$. Înmulţind relaţia obţinută cu 5^{n+2}, se obţine $5^{2^n+n+2} = 5^{n+2} + t_n \cdot 10^{n+2}$ cu t_n, la fel ca mai sus, întreg. Cu alte cuvinte ultimele $n+2$ cifre din scrierea zecimală a lui 5^{2^n+n+2} sînt aceleaşi cu cele ale scrierii lui 5^{n+2}; cum $5^{n+2} < 10^{n+2}$, acestea sînt exact cifrele lui 5^{n+2}, completate eventual la stînga cu zerouri.

Rămîne de arătat că numărul acestor zerouri poate depăşi, printr-o alegere judicioasă a lui n, orice număr dat. Aceasta revine la $\lim_{n\to\infty} 5^{n+2}/10^{n+2} = 0$, relaţie ce este un caz particular al uneia cunoscute în analiza matematică. Dar nu este nevoie a apela la analiza matematică. Putem scrie $5^4 = 625 < 10^3$, deci $5^{4k} < 10^{3k}$ şi, alegînd $n+2 = 4k$, ultimele $n+2 = 4k$ cifre ale lui 5^{2^n+n+2} vor conţine, la marginea din dreapta, cifrele lui $5^{n+2} < 10^{3k}$, deci în număr de cel mult $3k$ şi, pe lîngă acestea, un număr de cel puţin $4k - 3k = k$ zerouri.

Soluţia problemei VN2 (vezi 6.2). a) Se pune problema de a scrie 1976 $(x + \ldots + x^n)$ ca o sumă de polinoame de forma $s(1)x + \ldots + s(n)x^n$, unde s sînt permutări ale lui $\{1, \ldots, n\}$. Fie k numărul acestor polinoame.

Pe de o parte, suma celor nk coeficienţi ai acestor k polinoame se poate calcula determinînd întîi suma coeficienţilor fiecărui polinom, care este $1 + \ldots + n = n(n+1)/2$, deci suma totală este $kn(n+1)/2$. Pe de altă parte, acea sumă se poate calcula adunînd întîi toţi coeficienţii lui x^j pentru fiecare j dat şi obţinînd 1976; suma totală rezultă $1976\,n$.

Se obţine relaţia $1976\,n = kn(n+1)/2$, deci $(n+1)k = 2 \cdot 1976$, adică descompunerea cu proprietăţile din enunţ este posibilă pentru n numai dacă $n+1$ este unul din divizorii lui $2 \cdot 1976$, numărul corespunzător k de polinoame din descompunere fiind dat de relaţia de mai sus.

b) Să considerăm acum două numere întregi pozitive n şi k şi să vedem în ce caz se pot găsi k polinoame, fiecare de forma $s(1)x + \ldots$ $\ldots + s(n)x^n$, unde s este o permutare a lui $\{1, \ldots, n\}$ (depinzînd de polinomul respectiv), aşa încît suma lor să fie un polinom cu toţi coeficienţii egali [deci de forma $m(x + \ldots + x^n)$].

La fel ca mai sus rezultă $2m = (n+1)k$, deci cel puţin unul din numerele $n+1$, k trebuie să fie par.

Dacă $n = 1$, aceasta este totdeauna posibil; se iau toate cele k polinoame egale cu x.

Dacă $n \geqslant 1$, aceasta nu este posibil pentru $k = 1$ deoarece $s(1) \neq$ $\neq s(n)$.

Aceasta este totdeauna posibil pentru $k = 2$, ceea ce se constată considerînd polinoamele $x + 2x^2 + \ldots + (n-1)x^{n-1} + nx^n$ şi $nx +$ $+ (n-1)x^2 + \ldots + 2x^{n-1} + x^n$.

Să observăm acum că dacă situaţia descrisă este realizabilă pentru n, k_1 şi n, k_2, atunci ea va fi realizabilă şi pentru n, $k_1 + k_2$, luînd reuniunea celor două liste de k_1, respectiv k_2 polinoame; această observaţie a necesitat renunţarea de a ne limita la cazul $m = 1976$. În particular, din cele stabilite pînă acum rezultă că situaţia este realizabilă pentru orice n şi k cu k par.

Pasul care va încheia de fapt rezolvarea problemei este construirea unei astfel de situaţii pentru $n+1$ par şi $k = 3$. Primul polinom va fi $x + \ldots + nx^n$, în care menţionăm special termenul de la „mijloc" $\frac{n+1}{2}x^{(n+1)/2}$. În al doilea polinom vom atribui termenilor în $x^{(n+1)/2}$, $x^{(n+3)/2}$, $\ldots$, x^n respectiv coeficienţii $1, 2, \ldots, 1 + \left(n - \frac{n+1}{2}\right) = \frac{n+1}{2}$, iar termenilor în $x, x^2, \ldots, x^{(n-1)/2}$ respectiv coeficienţii $\frac{n+3}{2}, \frac{n+5}{2}, \ldots, \frac{n+3}{2} + \left(\frac{n-1}{2} - 1\right) = n$. Cum

suma celor trei polinoame va avea toţi coeficienţii egali cu $m = 3(n + 1)/2$, conform unei formule stabilite mai sus, al treilea polinom rezultă unic şi trebuie numai să ne convingem că el are forma cerută. Primul său coeficient este $\frac{3n+3}{2} - 1 - \frac{n+3}{2} = n - 1$, coeficienţii următori se obţin scăzînd mereu cîte 2, aceasta pînă la coeficientul lui $x^{(n-1)/2}$ care rezultă egal cu $n - 1 - 2\left(\frac{n-1}{2} - 1\right) = 2$, coeficientul lui $x^{(n+1)/2}$ este $\frac{3n+3}{2} - \frac{n+1}{2} - 1 = n$, coeficienţii următori se obţin scăzînd mereu cite 2, pînă la coeficientul lui x^n care va fi $n - 2\left(n - \frac{n+1}{2}\right) = 1$. În rezumat, coeficienţii celui de-al treilea polinom vor fi $n - 1, n - 3, \ldots, 2, n, n - 2, \ldots, 1$ şi el va avea forma necesară.

Rezultă, odată stabilită posibilitatea respectivă pentru $n + 1$ par şi $k = 3$, că situaţia descrisă este realizabilă, dacă $n + 1$ este par, pentru orice k de forma $2p + 3q$ cu p, q întregi $\geqslant 0$, deci pentru orice $k \geqslant 2$.

c) Acum este uşor de dat răspunsul la problemă: descompunerea este posibilă pentru orice n pentru care $n \geqslant 1$ şi $n + 1$ este un divizor al lui $2 \cdot 1976$, cu excepţia lui $n = 2 \cdot 1976 - 1$. Într-adevăr, sau $k = 2 \cdot 1976 /(n + 1)$ rezultă par, sau, dacă acesta rezultă impar, $n + 1$ este par, produsul $(n + 1)k$ fiind par. Avem $2 \cdot 1976 = 2^4 \cdot 247 = 2^4 \cdot 13 \cdot 19$ şi obţinem astfel $5 \cdot 2 \cdot 2 - 2 = 18$ valori posibile pentru n, a căror listă poate fi întocmită fără dificultate.

6.4. Alegerea problemelor pentru concurs

Juriul s-a orientat destul de repede, în majoritatea sa, spre problemele FI2, GB1, NL3, NL4, US6 şi, într-o majoritate nu tocmai concludentă, către CS3. Un număr de şefi de delegaţii au afirmat că CS3 este prea simplă. Dorind să realizeze pe cît posibil un consens (deziderat prevăzut, relativ la acest moment al lucrărilor, şi în regulamentul difuzat la această Olimpiadă) conducerea juriului a prezentat, împreună cu soluţiile lor, o serie de probleme de geometrie dintre cele primite de comitetul de organizare de la delegaţii şi nealese printre cele 12 prezentate juriului. Pînă la urmă, juriul s-a convins că selecţionerii comitetului de organizare (vezi 2.1) au lucrat

bine și că alte probleme mai potrivite erau greu de găsit (printre cele menționate, singurele care mai puteau intra în discuție, conform regulamentului), mai cu seamă în condiții în care timpul nu mai permitea un studiu aprofundat al lor; juriul s-a împăcat deci cu problema CS3, acceptînd-o ca problemă de concurs.

Contracandidata naturală a lui CS3, problema BG1, a apărut probabil drept grea. În fața lui PL1 un concurent cu experiență matematică în unele domenii dincolo de programa școlară ar fi fost, se pare, avantajat. La fel în fața lui SE3, însă fiind vorba de domenii (numere complexe, limite) ce intră în programele multor țări (vezi soluțiile problemelor PL1 și SE3 în 6.3). Mai greu ar fi să se emită o părere categorică asupra problemei VN1 în acest sens, rămînînd întrebarea „cît de greu este de descoperit soluția autorilor?" (vezi 6.3).

Pe de altă parte, NL4 apare ca o problemă, dintre cele dificile, ce nu creează astfel de avantaje; cel mult un concurent mai stîngaci ar fi în situația de a face un tabel mai lung, iar de ignorarea episodului e) al soluției, ignorare ce ar fi lungit raționamentul ... (vezi 6.3), nici un fel de cunoștințe suplimentare nu-l pot feri.

Gîndită în stilul prezentat în soluția din 6.3, GB1 a apărut și aceasta grea. Vom reveni în 6.5 la aceste „estimări".

Ordinea și punctajele problemelor de concurs s-au stabilit astfel: *1* (CS3) — 5 puncte, *2* (FI2) — 7 puncte, *3* (NL4) — 8 puncte; *4* (US6) — 6 puncte, *5* (NL3) — 7 puncte, *6* (BG1) — 7 puncte.

6.5. Soluții ale concurenților, coordonare, premiu special

La problema *2* (FI2, vezi 6.2), pe lîngă diferite variante ale soluției prezentate în 6.3, concurenții au dat și următoarele două:

Soluție a problemei 2 (FI2, vezi 6.2). Stabilim întîi prin inducție că gradul lui $P_n(x) - x$ este 2^n; va fi suficient deci să determinăm 2^n rădăcini reale distincte ale acestei ecuații.

Pentru $x = 2\cos t$ avem $P_1(x) = x^2-2 = 2(2\cos^2 t - 1) = 2\cos 2t$. De aici se ajunge, prin inducție, la $P_n(x) = 2\cos 2^n t$. Ecuația $P_n(x) = x$, după substituția $x = 2\cos t$, prin care se pierd rădăcinile x cu $|x| > 1$, devine $2\cos 2^n t = 2\cos t$. Aceasta revine la $2^n t + t = 2k\pi$ cu k întreg și are ca soluții $t = 2k\pi/(2^n \pm 1)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Fiecare din acestea conduce la o soluție $x = 2\cos(2k\pi/(2^n \pm 1))$ pentru ecuația $P_n(x) = x$, soluții care nu sînt însă

distincte în general. Funcția $\cos t$ este bijectivă cînd t variază numai pe $[0, \pi]$; vom căuta deci, dintre rădăcinile t obținute, numai pe cele cuprinse în $[0, \pi]$ și, dacă vom găsi 2^n astfel de rădăcini t distincte două cîte două, problema va fi rezolvată.

Inegalitățile $0 \leqslant 2k\pi/(2^n + 1) \leqslant \pi$ revin la $0 \leqslant k \leqslant 2^{n-1} + (1/2)$; sînt $2^{n-1} + 1$ astfel de valori k. Inegalitățile $0 \leqslant 2k\pi/(2^n - 1) \leqslant \pi$ revin la $0 \leqslant k \leqslant 2^{n-1} - (1/2)$; sînt 2^{n-1} astfel de valori k.

Relația $2k_1\pi/(2^n + 1) = 2k_2\pi/(2^n + 1)$ revine la $k_1 = k_2$, la fel ca și relația analoagă cu -1 în loc de $+1$. Relația $2k_1\pi/(2^n + 1) = 2k_2\pi/(2^n - 1)$ revine la $k_1(2^n - 1) = k_2(2^n + 1)$. Să observăm că diferența dintre $2^n + 1$ și $2^n - 1$ este 2, care nu divide nici unul din cele două numere, deci $2^n + 1$ și $2^n - 1$ sînt prime între ele. Ultima relație în care intră k_1 și k_2 este posibilă pentru $k_1 = k_2 = 0$, iar pentru valori pozitive ale lui k_1 și k_2 aceasta implică $k_1 \geqslant 2^n + 1$, situație incompatibilă cu inegalitățile impuse.

Am obținut deci, ca rădăcini distincte în t din $[0, \pi]$, valorile $0, 2k\pi/(2^n + 1)$ cu $1 \leqslant k \leqslant 2^{n-1}$ și $2k\pi/(2^n - 1)$ cu $1 \leqslant k \leqslant 2^{n-1} - 1$, în total $1 + 2^{n-1} + (2^{n-1} - 1) = 2^n$, ceea ce este suficient pentru a dovedi afirmația din problemă.

Altă soluție a problemei 2 (FI2, vezi 6.2). Vom face substituția $x = u + u^{-1}$, cu u complex (de fapt, această soluție este legată de cea anterioară prin $u = e^{it}$, dar „trecerea în complex" etc. ne determină s-o dăm în detaliu). Rezultă $P_1(x) = x^2 - 2 = u^2 + u^{-2}$ și apoi, prin inducție, $P_n(x) = u^{2^n} + u^{-2^n}$. Ecuația $P_n(x) = x$ devine $u^{2^n} - u = u^{-1} - u^{-2^n}$, $u(u^{2^n-1} - 1) = u^{-2^n}(u^{2^n-1} - 1)$ și, în fine, $(u^{2^n-1} - 1)(u^{2^n+1} - 1) = 0$. Aceasta are $2^n - 1$ soluții a ce satisfac $a^{2^n-1} = 1$ și $2^n + 1$ soluții b ce satisfac $b^{2^n+1} = 1$.

Valoarea 1 apare și printre soluțiile a și printre soluțiile b. Dacă un număr c apare și printre soluțiile a și printre soluțiile b, atunci $c^2 = c^{2^n+1}(c^{2^n-1})^{-1} = 1$, deci $c = 1$ (caz cunoscut deja) sau $c = -1$, dar $(-1)^{2^n+1} \neq 1$. Deci nici un alt număr în afară de 1 nu apare simultan printre numerele a și b. În plus, orice $a \neq 1$ și orice $b \neq 1$ sînt complexe; avem $|a| = |b| = 1$ și $a \neq -1$, $b \neq -1$.

Să observăm că $u + u^{-1} = v + v^{-1}$ revine la $(u - v)(1-(uv)^{-1}) = 0$, deci la $u = v$ sau la $uv = 1$. Dacă u și v sînt printre soluțiile complexe a, atunci $uv = 1$ revine la $v = \bar{u}$ (pentru $u = 1$ rezultă $u^{-1} = \bar{u}$); la fel cînd u și v sînt printre rădăcinile b. Dacă u este printre rădăcinile a, iar v printre rădăcinile b, ambele fiind complexe, atunci $uv = 1$ revine tot la $v = \bar{u}$, deci v ar urma să se afle printre rădăcinile a, ceea ce am văzut că nu se poate.

Aceasta arată că se vor obține ca rădăcini distincte $x = u + u^{-1}$ ale ecuației $P_n(x)=x$ pe $2=1+1^{-1}$, atîtea rădăcini cîte perechi $u, \bar{u}$ de rădăcini complexe are $u^{2^n+1} = 1$, deci $(2^n + 1 - 1)/2 = 2^{n-1}$ și încă atîtea rădăcini cîte asemenea perechi are $u^{2^n-1} = 1$, deci $(2^n - 1 - 1)/2 = 2^{n-1} - 1$. În total $1 + 2^{n-1} + (2^{n-1} - 1) = 2^n$ rădăcini distincte pentru $P_n(x) = x$. Acestea sînt toate reale, deoarece u corespunzători au modulele egale cu 1, deci $u^{-1} = \bar{u}$ și $u + u^{-1} = u + \bar{u} = 2\text{Re}u$.

Se observă cu ușurință, urmărind cele două soluții date aici și soluția din 6.3 a problemei *2* (FI2, vezi 6.2) că se putea foarte ușor ca un concurent să aibă în minte ideea uneia din aceste soluții, fără a-i stăpîni însă toate detaliile, cu alte cuvinte să poată începe rezolvarea, dar să nu fie capabil a o încheia. Comisia de coordonare a fost foarte fermă în a puncta numai detaliile importante, efectiv prezente în fiecare lucrare. În special, cînd era vorba de variante ale soluțiilor prezentate în acest capitol, comisia a fost foarte severă față de confuziile ce apăreau în demonstrațiile faptului că toate rădăcinile obținute erau distincte.

Problema *5* (NL3, vezi 6.2) s-a dovedit mai grea decît s-a crezut (aceasta ținînd seama și de poziția ce i s-a dat pe lista problemelor de concurs, vezi și 3.9); aceasta a reprezentat, se pare, chiar un record, printre problemele date la Olimpiadele descrise pînă acum, în ceea ce privește numărul mic de concurenți ce au reușit s-o rezolve. În asemenea cazuri comisia de coordonare înclină să acorde cîte 1 punct sau chiar 2 pentru unele observații ale concurenților, din lucrări.

La această problemă s-a acordat singurul premiu special al Olimpiadei a 18-a, pentru o tratare generală în care p și q (vezi 6.2) au fost considerați întregi arbitrari și s-a scos în evidență condiția ce trebuie ei s-o îndeplinească pentru ca raționamentul din soluția acestei probleme prezentată în 6.3 să rămînă valabilă.

Problema *6* (GB1, vezi 6.2) s-a dovedit însă mai ușoară decît s-a crezut. Mulți concurenți au calculat cîțiva termeni ai șirului (u_n), pe baza formulei de recurență din enunț. Anume $u_0 = 2 = 1 + 1^{-1}$, $u_1 = 5/2 = 2 + 2^{-1}$, $u_2 = 5/2 = 2 + 2^{-1}$, $u_3 = 65/8 = 8 + 8^{-1}$, poate chiar $u_4 = 1025/32 = 32 + 32^{-1}$, ajungînd la ideea de a pune $u_n = x_n + x_n^{-1}$. Din soluția prezentată în 6.3 se vede că aceasta a condus imediat la $x_{n+1} = x_n x_{n-1}^2$ și $x_n x_{n-1}^{-2} = 2$ sau $1/2$ etc. Mai mult, unii concurenți, după ce au ajuns la $u_n = x_n + x_n^{-1}$, au demonstrat prin inducție că aceasta este valabil cu $x_n = 2^y$, $y = (2^n - (-1)^n)/3$, expresie indicată de enunț. Anume, aceasta se verifica imediat

pentru $n = 0$, $n = 1$, iar dacă relaţia este adevărată pentru $n \leqslant k$, se observă că $x_k x_{k-1}^{-2} = 2^m$ cu $m = (2^k - 2 \cdot 2^{k-1} - (-1)^k + 2(-1)^{k-1})/3 = (-1)^{k-1}$, deci $x_k x_{k-1}^{-2} = 2$ sau 1/2 şi, printr-un calcul analog, că $x_k x_{k-1}^2 = x_{k+1}$ etc.

Comisia de coordonare a penalizat, la această problemă, cu 1 punct omisiunea de a dovedi că exponentul $(2^n - (-1)^n)/3$ este întreg pozitiv pentru $n \geqslant 1$.

Vom da un exemplu de discuţie din timpul coordonării la această problemă. Un concurent stabileşte o relaţie de forma $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ pentru orice n, în care v_n, w_n au expresii ceva mai complicate. Este aceasta un pas spre soluţie? Cu alte cuvinte, „merită a i se atribui cîteva din cele 7 puncte ce s-ar fi acordat pentru o rezolvare completă?". Nu, deoarece se observă că $w_n - v_n \to +\infty$ pentru $n \to +\infty$ şi deci nici o concluzie precisă asupra $[u_n]$ nu se poate extrage din inegalităţile demonstrate.

Aşa cum am menţionat în 3.9, ordinea problemelor corespunde la ideea că *1* şi *4* sînt simple, *2* şi *5* — de dificultate medie, iar *3* şi *6* — grele. Pe baza documentelor acestei Olimpiade (vezi 6.1) să prezentăm însă cîteva statistici (fig. 67).

a Problemă	*1* (CS3)	*2* (FI2)	*3* (NL4)	*4* (US6)	*5* (NL3)	*6* (GB1)
b Numărul maxim de puncte	5	7	8	6	7	7
c Numărul total de puncte obţinute de concurenţi	363	269	420	524	152	638
c/b	72	38	52	87	21	91

Fig. 67

Deci problema *6* (GB1, vezi 6.2) apare drept cea mai uşoară! Problema *5* (NL3, vezi 6.2) apare de departe cea mai grea! Problema *2* (FI2, vezi 6.2) apare mai grea decît problema *3* (NL3, vezi 6.2). Iar problema *1* (CS3, vezi 6.2), considerată banală (vezi 6.4), apare, ca dificultate, pe locul 4, deci nu 6 şi nici 5! Iată deci cum „imediat" nu înseamnă neapărat şi „evident"; soluţia prezentată în 6.3 a problemei *5* (NL3, vezi 6.2) nu dădea de bănuit la prima vedere un astfel de rezultat.

Să adăugăm şi tabelul din fig. 68.

Problemă	*1* (CS3)	*2* (FI2)	*3* (NL4)	*4* (US6)	*5* (NL3)	*6* (GB1)
Numărul de concurenţi cu punctaj maxim	60	25	17	50	15	67

Fig. 68

Situaţiile extreme ale problemelor *5* şi *6* s-au păstrat. Dar problema *3* pare a fi trecut, cît de cît, la locul ei în ierarhia respectivă.

Din documentele unei Olimpiade, amatorii de statistici pot extrage multe concluzii, pot propune explicații pentru ele etc. De exemplu, putem număra la fiecare dintre cele șase probleme și concurenții care au obținut 0 puncte. Obținem, pentru problemele *1, 2, . . ., 6*, cifrele 44, 74, 18, 16, 93, 31. Evident că aceste cifre depind și de modul în care se face coordonarea etc.

6.6. Premiile

La această Olimpiadă au participat 139 de concurenți. S-au acordat, însă, la propunerea comitetului de organizare, 82 de premii, cifră departe de cea „regulamentară" de 69—70 (vezi 4.5). Cele 82 de premii ar fi corespuns la 164 concurenți, deci la 20—21 delegații cu echipe complete. Este de presupus că, așa cum se obișnuiește în vederea succesului „numeric" al Olimpiadei, organizatorii au mai invitat și alte țări, pregătind numărul corespunzător de premii; una din ele a fost, evident, R. F. Germania (vezi 6.1). Vom aprofunda cu altă ocazie modul în care o țară poate ajunge să participe la Olimpiada Internațională de Matematică.

Tot pe baza documentelor Olimpiadei, să schițăm tabelul rezultatelor obținute de concurenți (descris la 3.11), pe baza căruia se decide cu ce punctaje se vor lua premiile 1, respectiv 2 și 3 (fig.69).

40/1 (1)	39/1 (2)	38/1 (3)	37/2 (5)	36/–	35/1 (6)	34/3 (9)	33/–	32/–	31/2 (11)	30/3 (14)
29/1 (15)	28/3 (18)	27/4 (22)	26/3 (25)	25/2 (27)	24/5 (32)	23/5 (37)	22/5 (42)	21/8 (50)	20/4 (54)	19/9 (63)
18/5 (68)	17/6 (74)	16/6 (80)	15/2 (82)	14/6 (88)	13/6 (94)	12/5	11/2	10/3	9/7	8/2
7/7	6/3	5/3	4/4	3/2	2/2	1/4	0/1			

Fig. 69

Numerele de deasupra liniilor reprezintă punctaje totale, numerele de dedesubt — numărul de concurenți ce au realizat punctajul respectiv. Pentru facilitarea aplicării regulii de la 4.5 se trece (în paranteze în cazul nostru) la dreapta fiecărei coloane și numărul de con-

curenți ce au obținut punctaje superioare acelei „poziții intermediare". Deci, de exemplu, (9), scris între coloanele 34 și 33, reprezintă $9 = 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 3$, adică suma tuturor numerelor de pe coloanele 40, 39, ..., 34.

Avînd 139 concurenți, regula de la 4.5 indică $139/2 = 69, \ldots$ premii 1, 2 și 3 și, cum numerele acestor premii se indică a fi proporționale cu 1, 2, 3, rezultă $139/4 = 34, \ldots$ premii 1 și 2 și $139/12 = 11, \ldots$ premii 1. Deci barierele ce vor determina zonele cu premiile 1, 2, 3 vor corespunde în fig. 69 la paranteze ce vor conține numere cît mai apropiate de 11, 34, 69 respectiv; acestea sînt indicațiile regulamentului.

Examinînd tabelul, se constată că, totuși, decizia naturală este de a profita de „golul" de la coloanele 32—33 și de a acorda numai nouă premii 1, pentru punctajele 34—40. Aceasta a fost și decizia juriului.

Pentru bariera între premiile 2 și 3 urma a se hotărî, rămînînd în limitele indicațiilor regulamentului, între parantezele ce conțineau 32, respectiv 37. Juriul a decis 37, deci acordarea a 28 premii 2 pentru punctajele 23—31, ținînd seama de mărirea numărului total de premii. S-au acordat deci 45 premii 3, pentru punctajele 15—22. Deci generozitatea, în comparație cu regulamentul, s-a manifestat numai relativ la premiile 3.

În încheiere să remarcăm că la ședința finală a juriului se obișnuiește a face să apară pe tablă tabelul fără extrema sa dreaptă, adică fără zona ce corespunde punctajelor 0, 1, 2, ...

7

A 19-A OLIMPIADĂ INTERNAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ (Belgrad, Arandjelovac, Iugoslavia, 1977)

7.1. Organizare

Comitetul acestei Olimpiade a luat inițiativa organizării, în prima zi, a unui simpozion, intitulat „Matematica și tineretul", la care au fost invitați să ia cuvîntul șefii de delegații și un număr de matematicieni din țara gazdă. Pe lîngă interesul în sine al acestei manifestări, în acest mod s-a asigurat un interval de 24 ore între înmînarea problemelor propuse juriului membrilor acestuia și începerea discuțiilor în vederea alegerii problemelor de concurs, timp deci pentru a fi rezolvate de șefii de delegații, pentru a fi studiate sub toate aspectele, timp care manifestase tendința de scădere la ultimile Olimpiade.

După cum arată și titlul său, simpozionul nu s-a limitat la probleme legate de Olimpiada Internațională. Dintre părerile prezentate relativ la această Olimpiadă menționăm sugestia de a accepta și probleme, de nivel elementar, de analiză, numere complexe și probabilități.

Țările ce au participat la Olimpiada a 19-a au fost în număr de 21, anume (vezi lista indicatoarelor la 3.1) AT, BE, BG, CU, CS, DD, DE, DZ, FI, FR, GB, HU, IT, MN, NL, PL, RO, SE, SU, US, YU. Pentru prima dată au participat R. F. Germania (DE) și Algeria (DZ). După mai mulți ani de absență, au participat Belgia (BE) și Italia (IT). A participat Mongolia (MN) ce lipsise la Olimpiada a 18-a. Dintre țările ce participaseră la Olimpiada din 1976 nu a venit Grecia; nici Vietnam nu a luat parte, dar a trimis probleme comitetului de organizare. A fost prezent un observator din Brazilia.

7.2. Problemele propuse juriului

Notațiile sînt la fel ca la Olimpiada a 17-a (vezi 5.2), de altfel evidente.

1-BG. *Fie N mulțimea numerelor întregi pozitive. Fie f o funcție definită pe N, cu valori în N, ce satisface inegalitatea $f(n+1) > f(f(n))$ pentru toți n din N. Să se demonstreze că pentru orice n avem $f(n) = n$.*

2-CS. *Considerăm rețeaua formată din toate punctele din plan ce au ambele coordonate întregi. Fiecare punct din această rețea are patru vecini: sus, jos, la dreapta și la stînga. Fie K un cerc de rază $\geqslant 2$, care nu trece prin nici unul din punctele rețelei. Prin punct frontieră interior înțelegem un punct al rețelei, situat în interiorul lui K și care are cel puțin un vecin situat în exteriorul lui K. Analog se definesc punctele frontieră exterioare. Să se demonstreze că numărul punctelor frontieră exterioare este cu 4 mai mare decît al celor frontieră interioare.*

3-DE. *Fie a, b două numere naturale. Împărțind $a^2 + b^2$ la $a + b$, se obține cîtul q și restul r. Să se determine toate perechile (a, b) pentru care $q^2 + r = 1977$.*

4-DE. *Să se determine toate mulțimile de puncte din plan, închise și mărginite, care, o dată cu două puncte, conțin un întreg semicerc cu capetele în cele două puncte.*

5-DE. *Să se demonstreze că următorul algoritm generează un șir $w_0, w_1, \ldots, w_{2^n-1}$ format din toate numerele întregi $\geqslant 0$ și $\leqslant 2^n - 1$, scrise în baza 2. Se ia $w_0 = 00\ldots0$ (n cifre) și, dacă $w_{m-1} = a_1 \ldots a_n$ și j este cel mai mare întreg $\geqslant 1$ pentru care m se divide cu 2^{j-1}, atunci se ia drept w_m numărul obținut din w_{m-1} înlocuind a_j cu $1 - a_j$.*

6-DD. *Să se afle numărul de soluții întregi (i, j, k, m) ale sistemului de inegalități*

$$1 \leqslant -j + k + m \leqslant n, \quad 1 \leqslant i - j + m \leqslant n,$$

$$1 \leqslant i - k + m \leqslant n, \quad 1 \leqslant i + j - k \leqslant n,$$

ce satisfac și $1 \leqslant i, j, k, m \leqslant n$, în care n este un întreg dat.

7-GB. *Fie a, b, A, B numere reale date. Se consideră funcția f definită prin $f(x) = 1 - a\cos x - b\sin x - A\cos 2x - B\sin 2x$. Să se demonstreze că, dacă pentru orice număr real x avem $f(x) \geqslant 0$, atunci $a^2 + b^2 \leqslant 2$ și $A^2 + B^2 \leqslant 1$.*

8-GB. *Fie $A_0B_0C_0D_0$ un patrulater convex şi O un punct în interiorul său. Definim $A_nB_nC_nD_n$ prin recurenţă astfel : A_{n+1} este piciorul perpendicularei din O pe A_nB_n, B_{n+1} este cel al perpendicularei din O pe B_nC_n, C_{n+1} şi D_{n+1} cele duse din O pe C_nD_n, D_nA_n. Să se arate că $A_0B_0C_0D_0$ este asemenea cu $A_4B_4C_4D_4$.*

9-HU. *Pentru care numere $n \geqslant 1$ există două polinoame f şi g în n variabile, cu coeficienţi întregi, nenule identic, ce satisfac relaţia*

$$(x_1 + \ldots + x_n) f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1^2, \ldots, x_n^2)?$$

10-NL. *Fie n un întreg dat, mai mare decît 2. Se consderi mulţimea V_n a tuturor întregilor de forma $1 + kn$ cu $k = 1, 2, \ldots$ Un număr m din V_n se numeşte indecompozabil în V_n dacă nu există două numere p şi q din V_n astfel încît $m = pq$.*

Să se demonstreze că există un număr $r \in V_n$ care poate fi scris în mai mult decît un mod sub forma de produs de numere indecompozabile în V_n. Două descompuneri ce diferă numai prin ordinea factorilor sînt considerate drept aceeaşi descompunere.

11-NL. *Fie $n \geqslant 2$ întreg. Să definim $x_1 = n, y_1 = 1$, $x_{i+1} = [(x_i + y_i)/2], y_{i+1} = [n/x_{i+1}]$. Să se arate că* $\min(x_1, \ldots x_n) = [\sqrt{n}]$.

12-NL. *În interiorul unui pătrat ABCD se construiesc triunghiurile echilaterale ABK, BCL, CDM, DAN. Să se demonstreze că mijloacele celor patru segmente KL, LM, MN, NK şi mijloacele celor opt segmente AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN sînt cele* 12 *vîrfuri ale unui dodecagon regulat.*

13-PL. *Să considerăm toate şirurile $(a_1, \ldots, a_n)$ formate din termeni egali cu ± 1 şi să definim produsul a două astfel de şiruri prin $(a_1, \ldots, a_n)(b_1, \ldots, b_n) = (a_1b_1, \ldots, a_nb_n)$. Fie B o mulţime formată din k astfel de şiruri. Să se arate că există un astfel de şir c cu proprietatea că intersecţia lui B cu mulţimea formată din toate produsele dintre c şi şirurile din B (deci cu $\{cb \mid b \in B\}$) să conţină cel mult $k^2 \cdot 2^{-n}$ elemente (elemente ce sînt, evident, şiruri ca mai sus).*

14-FI. *Fie E o mulţime finită de puncte în spaţiu, neconţinute toate în acelaşi plan şi astfel încît aceasta să nu conţină trei puncte colineare. Să presupunem că nu există nici un plan care să conţină exact trei din punctele lui E. Să se demonstreze că există cinci puncte în E, care să constituie vîrfurile unei piramide patrulatere convexe, care piramidă să nu conţină nici un alt punct din E.*

15-VN. *Într-un şir finit de numere reale suma oricăror* 7 *termeni consecutivi este negativă, iar suma oricăror* 11 *termeni consecutivi este*

pozitivă. Să se determine numărul maxim de termeni ai unui astfel de şir.

16-VN. *Să se determine cel mai mare număr întreg n pentru care există n puncte în plan, avînd toate coordonatele numere întregi, astfel încît să nu existe printre cele n puncte trei distincte, al căror centru de greutate să aibă ambele coordonate întregi.*

7.3. Soluţiile problemelor propuse juriului. Comentarii

Par greu de grupat aceste probleme după domeniul din care fac parte. Le vom prezenta soluţiile în ordinea de pe listă; un argument în plus în favoarea acestei decizii este şi modul în care s-au desfăşurat lucrările juriului ce au condus la alegerea problemelor de concurs (vezi 7.4).

Soluţia problemei 1-BG (vezi 7.2). Această problemă este una din cele dificile, după cum s-au putut convinge şefii de delegaţii ţinînd seama de timpul necesar pentru a ajunge la soluţia ei (evident, avînd în lucru şi alte 15 probleme), însă potrivită Olimpiadei. S-au descoperit multe soluţii, apropiate unele de altele, deoarece argumentele ce conduc la stabilirea afirmaţiei din enunţ nu sînt unice şi se pot împleti în diferite moduri. Vom prezenta soluţia autorilor.

Este evident că $f(n) \geqslant 1$ pentru orice $n \geqslant 1$. Se demonstrează prin inducţie după k faptul că $n \geqslant k$ implică $f(n) \geqslant k$. Anume, pasul de la k la $k+1$ se realizează astfel. Dacă $n \geqslant k+1$, avem $f(n) > f(f(n-1))$ şi, cum $n-1 \geqslant k$, conform ipotezei de inducţie, rezultă întîi $f(n-1) \geqslant k$ şi apoi $f(f(n-1)) \geqslant k$, deci $f(n) > k$, adică $f(n) \geqslant k+1$.

Să obţinem acum o contradicţie din $f(k) > k$ şi problema va fi rezolvată (din cele stabilite rezultă $f(k) \geqslant k$). Oricare ar fi $n > k$, rezultă $n-1 \geqslant k$, deci $f(n-1) \geqslant k$, apoi $f(n) > f(f(n-1))$. Dar $f(n-1)$ nu poate fi egal cu k; aceasta, cum $n-1 \geqslant k$, ar putea avea loc cel mult pentru $n-1 = k$, dar s-a presupus $f(k) > k$. Deci, oricare ar fi $n > k$, rezultă că există un $m > k$, anume $m = f(n-1)$, aşa încît $f(n) > f(m)$. Dar aceasta ar însemna că mulţimea tuturor $f(n)$, cînd n parcurge valorile $k+1$, $k+2$, ..., deci o mulţime de numere naturale, nu are element minimal. Aceasta este contradicţia care încheie rezolvarea.

Soluţia problemei 2-CS (vezi 7.2). Mulţimea punctelor din reţea interioare cercului „formează“ un poligon, al cărui contur are toate unghiurile interioare 0°, 90°, 180°, 270°. Să observăm şi că, dacă se

consideră pătratul de latură 1, avînd toate vîrfurile în puncte ale rețelei, ce conține centrul cercului K, atunci, deoarece $r \geq 2$, toate vîrfurile acestui pătrat vor fi interioare lui K, deci poligonul în discuție are cel puțin 4 vîrfuri. În fig. 70 prezentăm un exemplu de astfel de poligon; centrul lui K este marcat cu 0, iar $4 < r < \sqrt{17}$.

Să notăm cu n_0, n_{90}, n_{180}, n_{270} numărul de vîrfuri ale acelui poligon, ale cărui unghiuri interioare au valorile de la indice. În fig. 70 se consideră că în B sînt două vîrfuri, ambele avînd unghiul interior de 270°.

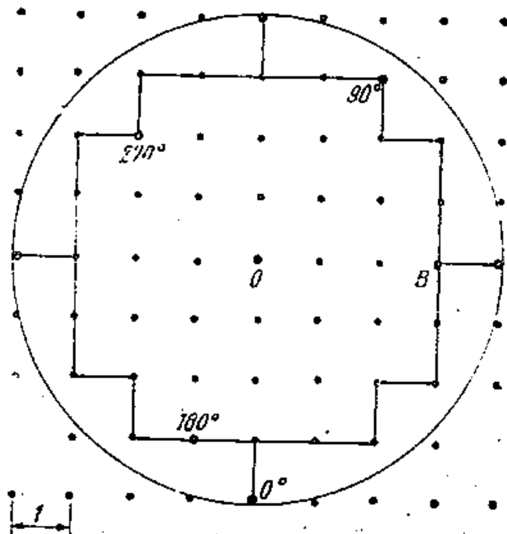


Fig. 70

Punctele frontieră interioare sînt exact punctele de pe contur ce au unghiuri interioare de 0°, 90° sau 180°. Pentru a putea afirma că numărul acestor puncte este $n_0 + n_{90} + n_{180}$ trebuie să arătăm, deoarece vîrfuri duble în care unul din unghiurile interioare să fie 0° sau 90° nu pot apărea, că situația din fig. 71, adică un vîrf dublu cu ambele unghiuri interioare 180°, este imposibilă. Ținînd seama de faptul că poligonul conține în interior un pătrat (vezi mai sus), deci nu este „strangulat", această afirmație revine la „acesta nu are țepi de lungime > 1", unde „țepile" conduc la vîrfuri cu unghiuri interioare de 0° (vezi fig. 70).

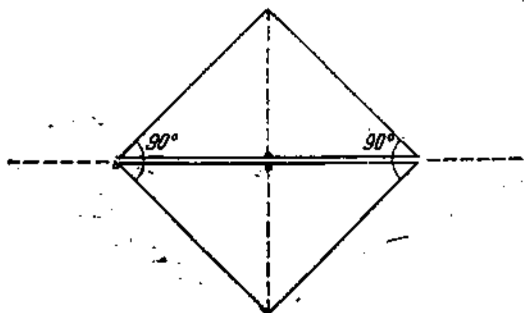


Fig. 71

Dacă situația din fig. 71 ar apărea, cercul K ar trebui să aibă puncte comune atît cu interioarele celor două segmente punctate, cît și cu cele ale celor două semidrepte punctate, din fig. 71. Ar apărea astfel

un patrulater înscris în K, cu ambele unghiuri corespunzătoare vîrfurilor „de pe semidrepte" ascuțite, ceea ce ar contrazice faptul că într-un patrulater inscriptibil suma a două unghiuri opuse este de 180°.

Urmărind figura 72, observăm că orice vîrf cu unghi interior 0° al poligonului conduce la 3 puncte frontieră exterioare, unul cu 90°

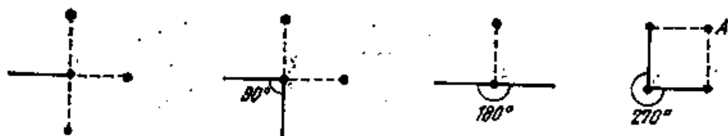


Fig. 72

conduce la 2, unul cu 180° la 1, iar unul cu 270° „suprimă" unul, la A din figură conducînd două vîrfuri și neexistînd vîrfuri alăturate cu unghiuri interioare de 270°. Deci, nefiind alte puncte frontieră exterioare, vor exista $3n_0 + 2n_{90} + n_{180} - n_{270}$ astfel de puncte și problema revine la a dovedi că diferența dintre acest număr și $n_0 + n_{90} + n_{180}$ este 4, adică la $2n_0 + n_{90} - n_{270} = 4$.

Dar teorema asupra sumei unghiurilor exterioare ale unui poligon (sau cea asupra sumei celor interioare, urmată de un mic calcul) conduce exact la relația de mai sus, dacă o aplicăm poligonului în discuție, „retușat" ca în fig. 73.

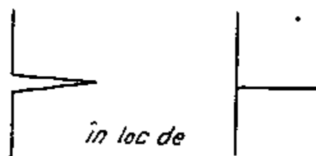


Fig. 73

Această problemă apare drept foarte potrivită pentru Olimpiadă, ea făcînd apel doar la cunoștințe elementare. Pe de altă parte, redactarea soluției ei și coordonarea apar dificile, necesitînd experiență.

Să indicăm și trei situații în care afirmația din problemă este adevărată (centrul cercului este marcat cu O), dar raza cercului este mai mică decît 2 (fig. 74).

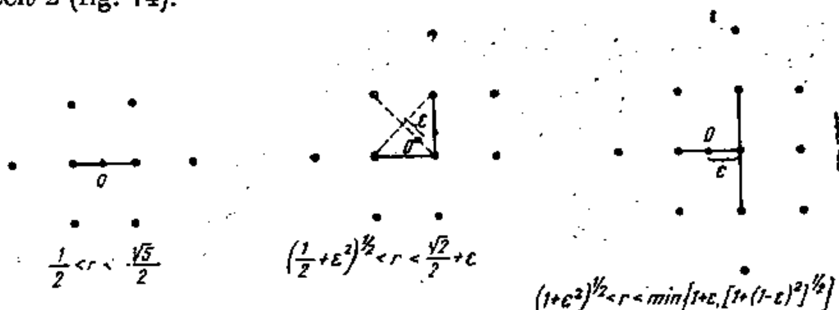


Fig. 74

Soluția problemei 3-DE (vezi 7.2). Există un număr finit de soluții (q, r) pentru $q^2 + r = 1977$, în care $r \geq 0$. Nu este nevoie să le considerăm însă pe toate $[\sqrt{1977}] + 1 = 45$, deoarece relațiile $a^2 + b^2 = q(a + b) + r$ și $0 \leq r < a + b$ permit să se deducă încă o relație (inegalitate) ce leagă q, r. Anume, fie $s = a + b$. Rezultă $a^2 + b^2 = a^2 + (s - a)^2 = 2(a - s/2)^2 + (s^2/2) \geq s^2/2$, deci $s^2/2 \leq \leq a^2 + b^2 = q(a + b) + r = qs + r < (q + 1)s$, apoi $q > (s/2) - - 1 > (r/2) - 1$. Din inegalitatea obținută deducem $r < 2(q + 1)$, deci $r \leq 2q + 1$ și apoi $1977 = q^2 + r \leq q^2 + 2q + 1 = (q + 1)^2$, deci, 1977 nefiind pătrat perfect, $q + 1 \geq [\sqrt{1977}] + 1$, $q \geq [\sqrt{1977}]$. Chiar $q = [\sqrt{1977}]$, inegalitatea contrară ($\leq$) rezultînd din relația din enunț.

Așadar, $q = 44$ și $r = 1977 - 44^2 = 41$ au fost prin aceasta determinați. Scriind $a^2 + b^2 = 44(a + b) + 41$ sub forma $(a - 22)^2 + + (b - 22)^2 = 1009$, va trebui în continuare să determinăm toate perechile (c, d) de întregi, nu neapărat pozitivi, pentru care $c^2 + d^2 = = 1009$. Ar trebui făcute $[\sqrt{1009}] + 1 = 32$ încercări, dar putem micșora numărul lor, cercetînd resturile împărțirilor lui c și d cu diverse numere. Făcînd aceasta relativ la împărțirea cu 5, se obține o reducere sensibilă. Anume, dacă $c = 5m$, $5m \pm 1$, $5m \pm 2$, atunci $c^2 = 5p$, $5p + 1$, $5p - 1$, iar $1009 = 5k - 1$, de unde deducem că unul din numerele c, d va fi multiplu de 5 și rămîn de încercat numai valorile 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30. Se obține o singură descompunere, $1009 = 15^2 + 28^2$, deci $c, d = \pm 15, \pm 28$ și rezultă patru perechi (a, b) ce satisfac condițiile din enunț (determinate prin $a - 22 = c$, $b - 22 = d$ etc.), anume (37, 50), (50, 37), (7, 50), (50, 7); valoarea -28 se exclude, deoarece $22 - 28 < 0$, iar toate perechile obținute verifică $a + b > r$, adică $a + b > 41$.

Soluția problemei 4-DE (vezi 7.2). Din enunț este clar că obiecția principală la această problemă o constituie intervenția noțiunilor de mulțime închisă și chiar de mulțime mărginită.

Să alegem o direcție d în plan. Figura noastră, fiind mărginită, va fi conținută într-o bandă B, determinată de două drepte paralele d_1 și d_2, de direcție d și, fiind închisă, d_1 și d_2 se pot alege astfel încît să conțină, fiecare, cel puțin cîte un punct P_1, P_2 din aceasta. Trebuie (fig. 75) să avem $P_1P_2 \perp d$, altfel ambele semicercuri cu capetele în P_1, P_2 ar avea puncte în afara benzii B și nu ar fi conținute în figura dată, F.

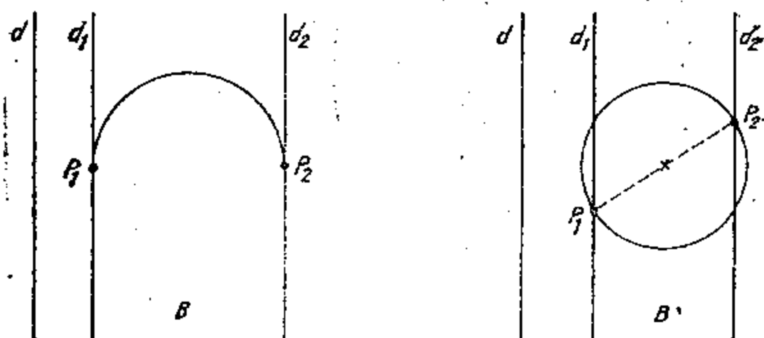


Fig. 75

Fie S semicercul cu capetele în P_1, P_2, conținut în F. Dacă Q este un punct de pe S diferit de P_1 și P_2, atunci dintre cele două semicercuri ce-l unesc cu P_1 numai cel situat (cu interiorul său) în interiorul C al cercului determinat de S nu are puncte în afara benzii B; conform condiției din enunț, acesta va fi conținut în F (fig. 76).

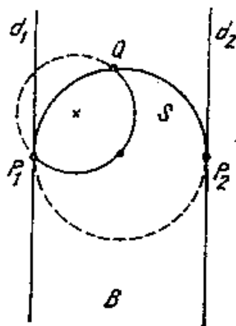


Fig. 76

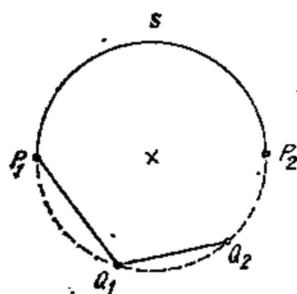


Fig. 77

Cînd Q parcurge S, mai puțin P_1 și P_2, semicercul ce-l unește cu P_1 și este situat în C umple C (pentru rigurozitate, dacă X este un punct în C, atunci perpendiculara în X pe XP va tăia cercul G ce mărginește C în două puncte Q_1, Q_2, ce nu pot fi situate ambele pe $G \setminus S$, deoarece, dacă în această situație Q_1 ar fi mai apropiat de P_1 decît Q_2, ar urma $\sphericalangle P_1Q_1Q_2 > 90°$, deci piciorul X al perpendicula-

rei din P_1 pe Q_1Q_2 ar fi în afara lui C(fig. 77). Rezultă că $F \supset C$ şi, F fiind închisă, $F \supset C \cup G$ (cercul închis). Mai mult, obţinem $F = C \cup G$, deoarece altfel am putea alege altă direcţie în locul lui d care să conducă la o bandă B mai lată (fig. 78) şi ar rezulta că F conţine un cerc de rază egală cu 1/2 din P_1P_2, corespunzător noii direcţii, deci mai mare decît cea a lui C şi un astfel de cerc nu poate încăpea în banda B.

Pe de altă parte, se verifică imediat că orice cerc, împreună cu interiorul său, satisface condiţia din enunţ. Anume, dacă A şi B sînt două puncte în această figură, se consideră semicercul cu capetele în A, B, situat în acel semiplan determinat de AB, în care se află arcul mai mare al cercului dat, tăiat de AB; în fig. 79 avem $\sphericalangle APB <$

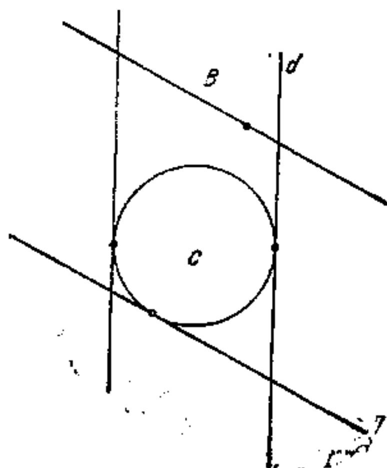


Fig. 78

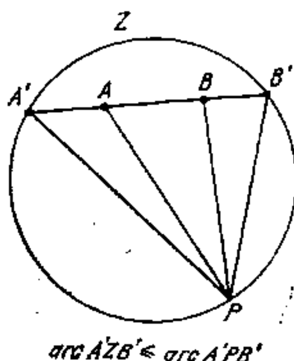


Fig. 79

$< \sphericalangle A'PB' = \text{arc}A'ZB'/2 < 90°$, deci P este în afara sau pe cercul de diametru AB etc.

Soluţia problemei 5-DE (vezi 7.2). Vom demonstra afirmaţia prin inducţie faţă de n, însă o afirmaţie mai generală, în care nu presupunem că $w_0 = 00\ldots0$. Pentru $n = 1$ aceasta se verifică imediat.

Să presupunem afirmaţia adevărată pentru n şi s-o demonstrăm pentru $n + 1$. Numărul j din enunţ este egal cu $n + 1$ numai cînd $m = 2^n$, deci o singură dată în cursul desfăşurării algoritmului. Pentru $m < 2^n$ algoritmul în cazul $n + 1$ constă în aplicarea algo-

ritmului în cazul n numărului format de primele n cifre. Pasul 2^n constă în a înlocui a_{n+1} cu $1 - a_{n+1}$, deci cu cealaltă cifră posibilă, iar pentru $2^n < m \leqslant 2^{n+1} - 1$ se observă că m se divide cu 2^{j-1} dacă şi numai dacă aceasta are loc pentru $m - 2^n$; deci şi pe porţiunea $m = 2^n + 1, \ldots, 2^{n+1} - 1$, care comportă $2^n - 1$ paşi, algoritmul se reduce la acţiunea algoritmului corespunzător lui n asupra numărului format din primele n cifre. Cele stabilite realizează pasul de inducţie.

Această problemă a fost considerată drept prea simplă, dar ca un gest de pionierat în ceea ce priveşte enunţul: este vorba de un algoritm.

Soluţia problemei 6-DD (vezi 7.2). Să fixăm valorile a două din necunoscute şi să căutăm să determinăm numărul de soluţii ale sistemului obţinut. O privire asupra acestuia arată că este mai judicios a se fixa i şi m. Dacă $u_{i,m}$ va fi numărul de soluţii (j, k) ale sistemului în care valorile i, m ale variabilelor respective au fost fixate, numărul total de soluţii va fi $\sum\limits_{i,m=1}^{n} u_{i,m}$.

Sistemul de inecuaţii în j, k ce se obţine se reduce la:

$$\max(1 - i,\ m - n) \leqslant j - k \leqslant \min(n - i,\ m - 1)$$

$$\max(m + i - n,\ 1) \leqslant j,\quad k \leqslant \min(n,\ m + i - 1).$$

O trăsătură ce simplifică problema este că, sub cele două max şi sub cele două min ce apar, situaţia în care una din mărimi este mai mare decît cealaltă este aceeaşi şi anume $i + m > n + 1$. Problema se simplifică şi mai mult, dacă observăm că, înlocuind în sistem i cu $n + 1 - i$, j cu $n + 1 - j$, k cu $n + 1 - k$ şi m cu $n + 1 - m$, se obţine acelaşi sistem cu aceleaşi condiţii, iar $i + m$ se înlocuieşte cu $2n + 2 - (i + m)$, număr care este $< n + 1$ dacă $i + m > n + 1$. Deci $u_{i,m} = u_{n+1-i,n+1-m}$ şi este suficient să tratăm cazul $i + m \leqslant n + 1$. Calculul final se va face după formula

$$\sum_{i,m=1}^{n} u_{i,m} = 2 \sum_{\substack{i+m<n+1 \\ 1\leqslant i,m}} u_{i,m} + \sum_{\substack{i+m=n+1 \\ 1\leqslant i,m}} u_{i,m}.$$

În cazul $i + m \leqslant n + 1$ sistemul de inecuaţii în j, k se scrie

$$1 - i \leqslant j - k \leqslant m - 1,$$

$$1 \leqslant j,\quad k \leqslant i + m - 1.$$

Dacă figurăm in plan punctele de coordonate (j, k) ce corespund soluţiilor acestui sistem, obţinem o parte a reţelei de puncte ce au

ambele coordonate intregi şi anume un pătrat de latură $i + m - 1$ din care se scot două triunghiuri dreptunghice isoscele, de catete $i-1$, respectiv $m-1$ (fig. 80).

Numărul $u_{i,m}$ al acestor soluţii este deci $(i + m-1)^2 - \frac{(m-1)m}{2} - \frac{(i-1)i}{2}$.

Suma $\sum u_{i,m}$ ce trebuie s-o calculăm acum, conform unei formule de mai sus, devine

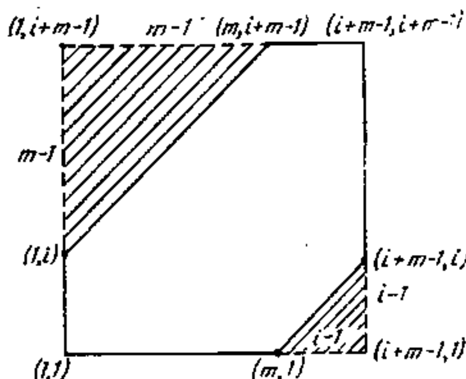


Fig. 80

$$2\sum_{\substack{i+m\leqslant n\\1\leqslant i,m}}\left((i+m-1)^2-\frac{(m-1)m}{2}-\frac{(i-1)i}{2}\right)+$$

$$+\sum_{\substack{i+m=n+1\\1\leqslant i,m}}\left(n^2-\frac{(m-1)m}{2}-\frac{(i-1)i}{2}\right).$$ A doua sumă are n termeni, deci n^2 de sub aceasta dă rezultatul $n\cdot n^2 = n^3$. Rămîn de calculat cinci sume, dar suma a treia se reduce la a doua, iar a cincea—la a patra, prin permutarea lui i cu m. În prima sumă sînt $k-1$ termeni cu $i + m = k$. Se obţine

$$n^3 + 2\sum_{k=1}^{n}(k-1)^3 - 2\sum_{\substack{i+m\leqslant n\\1\leqslant i,m}}(m-1)m - \sum_{\substack{i+m=n+1\\1\leqslant i,m}}(m-1)\,m.$$

În a doua sumă din expresia precedentă fiecare valoare m corespunde la $n - m$ valori posibile ale lui i, în timp ce în a treia numai la una. Se obţine

$$n^3 + 2\sum_{k=1}^{n}(k-1)^3 - 2\sum_{m=1}^{n-1}(m-1)\,m(n-m) - \sum_{m=1}^{n}(m-1)\,m,$$

putem suma a doua sumă pînă la n, deoarece adăugăm un termen nul şi se ajunge la

$$n^3 + 2\sum_{k=1}^{n}(k-1)((k-1)^2 + k^2) - (2n+1)\sum_{m=1}^{n}(m-1)\,m.$$

Metode de calcul ale unor astfel de sume sînt cunoscute, dar formulele nu se obişnuieşte a fi reţinute. Cel mai expeditiv este a ne baza pe

$\sum_{k=1}^{n} k(k-1)\dots(k-r) = (n+1)n \dots (n-r)/(r+2)$, a scrie $(k-1)((k-1)^2 + k^2) = 2k(k-1)(k-2) + 2k(k-1) + k - 1$, obținînd $n^3 + (n+1)n(n-1)(n-2) + (4/3)(n+1)n(n-1) + (n-1)n - (2n+1)(1/3)(n+1)n(n-1)$ și, în fine, $n^2(n^2+2)/3$, care reprezintă răspunsul la problemă.

Soluția autorilor la problema 6-DD (vezi 7.2). Se pornește de la o imagine geometrică. Dacă $P(i, j)$ și $Q(k, m)$ sînt punctele respective din plan (fig. 81), atunci coordonatele punctelor R și S, pentru care $PQRS$ este un pătrat parcurs în sensul acelor de ceasornic (sau, dacă $P = Q$, atunci $R = S = P$), sînt $R(k+m-j, m-k+i)$ și $S(i-j+m, j-k+i)$. Sistemul de inecuații din enunț, plus condițiile nu cer altceva decît ca vîrfurile P, Q, R, S ale acestui pătrat (toate cu coordonate întregi) să fie conținute în pătratul M de vîrfuri $(1, 1)$, $(1, n)$, $(n, 1)$, (n, n). Se pune problema numărării acestor pătrate, în care este fixat, în fiecare, vîrful P, notațiile celorlalte vîrfuri rezultînd din convenția asupra sensului.

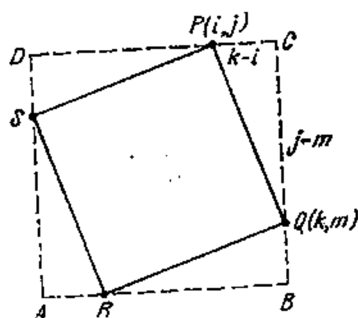


Fig. 81

Numărăm separat cele n^2 pătrate degenerate în puncte.

Dacă $ABCD$ din fig. 81 este dat și are latura $r > 0$, atunci există $4r$ pătrate $PQRS$ ce-i corespund, iar un pătrat $ABCD$ de latură r, cu coordonatele vîrfurilor întregi, inclus în M, se poate alege în $(n-r)^2$ moduri. Deci numărul de soluții este $n^2 + \sum_{r=1}^{n} 4r(n-r)^2$. Înainte de a aplica principiile generale, descrise la soluția anterioară, pentru calculul unei astfel de sume, o putem simplifica prin substituția $r = n - r'$, aducînd-o la forma

$$n^2 + \sum_{r=1}^{n} 2(r(n-r)^2 + (n-r)r^2) = n^2 + 2n \sum_{r=1}^{n} r(n-r).$$

Mai mult, notîn d suma cu $f(n)$, obținem $f(n+1) - f(n) = 1 + \dots + n = n(n+1)/2$ și deci $f(n) = (n+1)n(n-1)/6$. Ajungem, evident, la același rezultat ca în soluția precedentă.

Soluția problemei 7-GB (vezi 7.2). Ținînd seama de $\cos(x+\pi) = -\cos x$, $\sin(x+\pi) = -\sin x$, vom elimina întîi pe a, b din inegali-

date scriind $f(x) + f(x + \pi) \geqslant 0$ şi apoi pe A, B scriind $f(x) + f(x + \pi/2) \geqslant 0$. Prima devine $2 - 2A\cos 2x - 2B\sin 2x \geqslant 0$, iar cealaltă $2 - a(\cos x - \sin x) - b(\cos x + \sin x) \geqslant 0$.

Pentru a continua, vom observa că o expresie de forma $c\cos z + d\sin z$ se scrie sub forma $(c^2 + d^2)^{1/2}\cos(z + r)$, unde r este un număr fixat, ce depinde de c şi d (acest fapt a fost stabilit şi la începutul lui 5.17). Pentru a putea aplica aceasta şi celei de-a doua expresii, să observăm că

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\left(\cos x\cos\frac{\pi}{4} - \sin x\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4} + \cos x\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Acum putem scrie cele două inegalităţi sub forma

$$2 - 2(A^2 + B^2)^{1/2}\cos(2x + r) \geqslant 0 \text{ şi } 2 - (2(a^2 + b^2))^{1/2}\cos(x + (\pi/4) + s) \geqslant 0,$$

unde r şi s sînt fixaţi. De aici, pentru $x = -r/2$, respectiv $x = -(\pi/4) - s$, obţinem inegalităţile cerute de problemă.

Observaţii. 1. Ceea ce este remarcabil în această problemă este că relaţiile din enunţ nu sînt suficiente pentru „$f(x) \geqslant 0$ pentru orice x", ci numai necesare. De aceea nu se poate spune că soluţia de mai sus merge pe o cale ce s-ar impune în vreun fel. Tentativa de a pune de exemplu $t = \mathrm{tg}(x/2)$, a exprima $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$ raţional în funcţie de t (ceea ce este posibil), deci inegalitatea $f(x) \geqslant 0$ printr-una de forma $P(t) \geqslant 0$, unde P este un polinom, şi a vedea în ce condiţii aceasta este adevărată pentru orice t, pare a nu conduce la condiţii uşor de exprimat.

2. În soluţia autorilor era indicată şi o altă cale de a deduce, din $f(x) \geqslant 0$ pentru orice x, o inegalitate între coeficienţi, inegalitate care se dovedeşte a nu fi o consecinţă a celor două, luate împreună, din enunţ. Anume, să scriem $f(x) = 1 - u\cos(x - c) - v\cos(2x - d)$, unde $u = (a^2 + b^2)^{1/2}$, $v = (A^2 + B^2)^{1/2}$. Pentru $-r \leqslant x - c \leqslant r$, modulo 2π, avem $\cos(x - c) \geqslant \cos r$ şi, la fel, dacă, modulo 2π, $-r \leqslant 2x - d \leqslant r$, avem $\cos(2x - d) \geqslant \cos r$. Dacă reuşim să găsim un x care să satisfacă ambele perechi de inegalităţi, vom obţine conform ipotezei, $0 \leqslant 1 - u\cos(x - c) - v\cos(2x - d) \leqslant 1 - (u + v)\cos r$ şi deci $u + v \leqslant (\cos r)^{-1}$, adică $(a^2 + b^2)^{1/2} + (A^2 + B^2)^{1/2} \leqslant (\cos r)^{-1}$.

Cele două perechi de inegalităţi ce trebuie satisfăcute de x exprimă, prima, apartenenţa lui x, modulo 2π, la un interval de lungime $2r$, iar cea de-a doua apartenenţa lui x, modulo 2π, la o reuniune de două intervale $(m, m + r) \cup (m + \pi, m + r + \pi)$, adică apartenenţa lui x la o mulţime cum este cea din fig. 82.

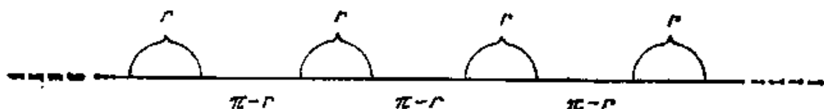


Fig. 82

Posibilitatea de a găsi un x care să satisfacă ambele condiţii este asigurată de $2r \geqslant \pi - r$, adică de $r = \pi/3$, $\cos r = 1/2$.

Din ipoteza problemei rezultă deci $(a^2 + b^2)^{1/2} + (A^2 + B^2)^{1/2} \leqslant 2$, ceea ce nu este implicat de cele două inegalități ce se cereau demonstrate în enunțul problemei (luate împreună chiar).

3. O altă cale, cea de a serie $f(x) \geqslant 0$ pentru valori particulare ale lui x alese a priori, de exemplu în ordinea 2π, π, multipli de $\pi/2$, de $\pi/4$, nu pare a conduce la nici una din inegalitățile cerute.

Soluția problemei S-GB (vezi 7.2). Vom remarca de la început că această problemă a fost scoasă din discuție, deoarece figura într-o carte de geometrie adresată și elevilor, al cărei autor era chiar unul din șefii de delegație prezenți.

Enunțul ei trebuie puțin precizat; conform teoremei asupra dreptei lui Simson, în condițiile figurii 83, patrulaterul $A_1B_1C_1D_1$ ar

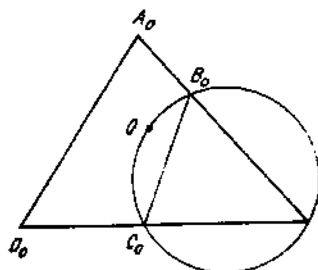


Fig. 83

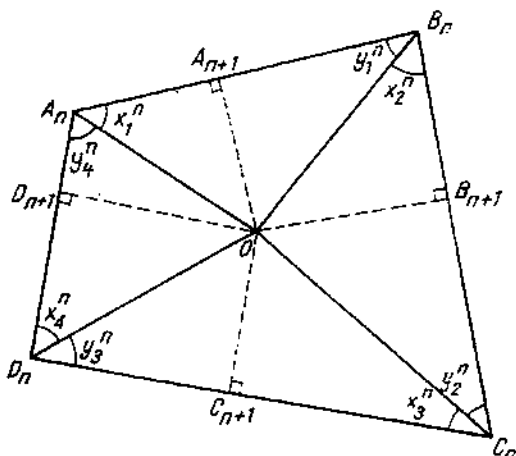


Fig. 84

avea vîrfurile A_1, B_1, C_1 coliniare, ceea ce ar crea dificultăți. Vom presupune deci în plus că punctele A_1, B_1, C_1, D_1 se află, respectiv, în interiorul segmentelor A_0B_0, B_0C_0, C_0D_0, D_0A_0.

Să introducem notațiile din fig. 84, presupunînd că A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1} se află în interiorul lui A_nB_n, B_nC_n, C_nD_n, D_nA_n respectiv. Dar figura 84 poate fi completată prin marcarea altor unghiuri ce corespund notației introduse, fără a ști, deocamdată, că A_{n+2} se află în interiorul lui $A_{n+1}B_{n+1}$ etc. (fig. 85).

Din patrulaterul inscriptibil $OA_{n+1}B_nB_{n+1}$ rezultă $x_1^{n+1} = x_2^n$ și $y_1^{n+1} = y_1^n$. Din patrulatere analoage rezultă $x_2^{n+1} = x_3^n$, $x_3^{n+1} = x_4^n$, $x_4^{n+1} = x_1^n$ și $y_i^{n+1} = y_i^n$ pentru $i = 1, 2, 3, 4$.

Ipoteza că A_{n+1} este în interiorul lui A_nB_n etc. se traduce prin faptul că toate unghiurile x_i^n, y_i^n sînt mai mici decît 90°. Relațiile obținute arată că dacă aceasta este adevărat pentru n, atunci este

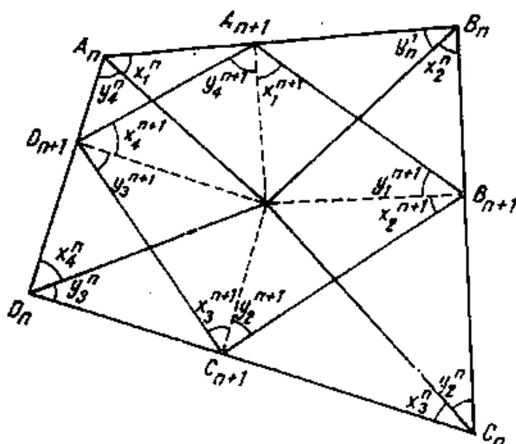


Fig. 85

adevărat și pentru $n + 1$. Cum am adăugat la ipoteza problemei faptul că aceasta este adevărat pentru $n = 0$, rezultă că unghiurile x_i^n, y_i^n sînt ascuțite pentru orice n și i, deci figurile 84 și 85 arată într-adevăr așa cum au fost ele desenate, iar raționamentul ce a condus la relațiile $x_1^{n+1} = x_2^n$ etc. și $y_i^{n+1} = y_i^n$ este valabil pentru orice n.

Pe baza acestor relații deducem $x_1^4 = x_2^3 = x_1^2 = x_4^1 = x_1^0$ și, la fel, $x_i^4 = x_i^0$ pentru orice i; de asemenea, $y_i^4 = y_i^0$ pentru orice i. De aici deducem că $\Delta OA_0B_0 \sim \Delta OA_4B_4$, $\Delta OB_0C_0 \sim \Delta OB_4C_4$, $\Delta OC_0D_0 \sim \sim \Delta OC_4D_4$ și $\Delta OD_0A_0 \sim \Delta OD_4A_4$, deci patrulaterele $A_0B_0C_0D_0$ și $A_4B_4C_4D_4$ sînt formate din cîte patru triunghiuri respectiv asemenea și în aceleași poziții și sînt, în consecință, asemenea.

Putem raționa și altfel. Considerăm o rotație de centru O, urmată de o omotetie de același centru, care să ducă A_0 în A_4. Conform proprietăților stabilite (asemănarea acelor perechi de triunghiuri), B_0 va veni în B_4, C_0 în C_4 și D_0 în D_4, de unde rezultă asemănarea patrulaterelor din enunț.

Soluția problemei 9-HU (vezi [7.2). Polinomul $g(x_1^2, \ldots, x_n^2)$ nu se modifică dacă înlocuim x_i cu a_ix_i pentru orice $i = 1, \ldots, n$, unde $a_i = \pm 1$. Rezultă $(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n)f(a_1x_1, \ldots, a_nx_n) = g(x_1^2, \ldots, x_n^2)$,

deci $g(x_1^2, \ldots, x_n^2)$ va trebui să se dividă cu orice $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$, în care $a_i \in \{-1, +1\}$ pentru orice $i = 1, \ldots, n$.

Produsul $h(x_1, \ldots, x_n)$ al celor 2^n polinoame diferite $a_1x_1 + \ldots$ $\ldots + a_nx_n$, în care $a_1 = \pm 1, \ldots, a_n = \pm 1$, apare drept candidat pentru $g(x_1^2, \ldots, x_n)$, Acest produs se divide cu $x_1 + \ldots + x_n$, polinom ce este unul din factorii produsului. Rămîne de dovedit că acel produs se scrie sub forma $g(x_1^2, \ldots, x_n^2)$, în care g este un polinom.

Dacă vom demonstra că h nu se schimbă prin înlocuirea unui x_i, cu $-x_i$, oricare ar fi acel i ales vom deduce apoi, succesiv, de exemplu pentru $i = 1, \ldots, n$, că în h nu apar monoame nenule, în care x_i să intre la puteri impare, şi va rezulta că orice monom din h va fi de forma $bx_1^{2k_1} \ldots x_n^{2k_n}$, deci că h se va exprima drept $g(x_1^2, \ldots, x_n^2)$, în care $g(y_1, \ldots, y_n)$ va fi suma monoamelor corespunzătoare $bx_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$. Cu alte cuvinte, va rezulta că pentru orice n există polinoame f, g cu proprietăţile din enunţ.

Pentru a demonstra că h nu se schimbă prin înlocuirea unui x_i cu $-x_i$, să observăm că această înlocuire revine la permutarea oricărei perechi de factori de forma $a_1x_1 + \ldots + a_{i-1}x_{i-1} + x_i + a_{i+1}x_{i+1} + \ldots$ $\ldots + a_nx_n$ şi $a_1x_1 + \ldots + a_{i-1}x_{i-1} - x_i + a_{i+1}x_{i+1} + \ldots + a_nx_n$ din produsul ce defineşte h, deci nu modifică acest produs.

Observaţie. Deşi nu intervine în rezolvarea acestei probleme, este interesant că a se divide cu $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ este tot una cu a se divide cu $-(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n)$. Deci era suficient de definit h drept produsul celor 2^{n-1} factori de forma $a_1x_1 + \ldots$ $\ldots + a_{n-1}x_{n-1} + x_n$. Demonstraţia ar fi fost aceeaşi, cu excepţia faptului că înlocuirea lui x_n cu $-x_n$ revine la înmulţirea cu $(-1)^{2^{n-1}} = 1$ pentru $n \geqslant 1$ (pentru $n=1$ problema este imediată ...) şi apoi la permutarea perechilor $a_1x_1 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1} + x_n$ şi $-a_1x_1 - \ldots$ $\ldots - a_{n-1}x_{n-1} + x_n$.

Soluţia problemei 10-NL (vezi 7.2). Începem prin a prezenta soluţia autorilor problemei. Să încercăm să ajungem la rezultat scriind $u^2v^2 = (uv)(uv)$, în care u^2, v^2, uv să aparţină lui V_n, să fie diferiţi (deci $u \neq v$, dacă, evident, îi presupunem pozitivi) şi să fie indecompozabili în V_n. Numerele u şi v vom încerca să le alegem de forma $kn - 1$ [avem $(kn-1)^2 = k_1n + 1 \in V_n$ şi $kn - 1 \notin V_n$; altfel $(kn-1)^2$ ar fi evident decompozabil în V_n]. Cele mai mici par să aibă cele mai mari şanse de a fi indecompozabile în V_n.

În ce condiţii $(n-1)^2$ este indecompozabil în V_n? Din $(n-1)^2 <$ $< (n+1)^2$ rezultă că $(n-1)^2 = pq, p \leqslant q$ implică $p < n + 1$, deci $p \notin V_n$, adică $(n-1)^2$ este indecompozabil în V_n pentru orice n.

În ce condiţii $(2n-1)^2$ este indecompozabil în V_n? Raţionamentul analog, ce începe cu $(2n-1)^2 < (2n+1)^2$, conduce la $p < 2n + 1$. Dacă $p \in V_n = \{n+1, 2n+1, 3n+1, \ldots\}$, atunci rezultă $p =$ $= n + 1$. Deci, dacă $(2n-1)^2$ ar fi decompozabil în V_n, el s-ar divide cu $n+1$. Scriind $(2n-1)^2 = 4(n+1)(n-2) + 9$, obţinem că

$(2n-1)^2$ se divide cu $n+1$ dacă şi numai dacă 9 se divide cu $n+1$. Cazul $n<3$ fiind exclus de enunţ, aceasta revine la $n=8$. Rezultatul este deci: $(2n-1)^2$ este indecompozabil în V_n pentru orice $n \geqslant 3$, $n \neq 8$.

Pentru $n=8$ acesta va fi decompozabil în V_n, deoarece rezultă $(2n-1)^2=(n+1)q$ şi apoi $q \equiv 1 (\text{mod} n)$, deci $q \in V_n$.

Să cercetăm acum numărul $(n-1)(2n-1)$. Şi acesta este mai mic decît $(2n+1)^2$ şi, la fel ca mai sus, rezultă că singurul număr din V_n ce-l poate divide este $n+1$. Scriind $(n-1)(2n-1)=$ $=(n+1)(2n-5)+6$, se vede că acesta se divide cu $n+1$ dacă şi numai dacă 6 se divide cu $n+1$, ceea ce, pentru $n \geqslant 3$, revine la $n=5$.

Deci afirmaţia din problemă este dovedită pentru orice $n \geqslant 3$, cu excepţia valorilor $n=5$ şi $n=8$, de descompunerile

$$(n-1)^2(2n-1)^2=((n-1)(2n-1))((n-1)(2n-1)).$$

În cazurile $n=5$ şi $n=8$ afirmaţia se dovedeşte analog, însă înlocuind în descompuneri $2n-1$ cu $3n-1$. Trebuie verificat că, în ambele cazuri, $(3n-1)^2$ şi $(n-1)(3n-1)$ sînt indecompozabile în V_n. Aceste numere sînt 14^2 şi $14 \cdot 4$ pentru $n=5$ şi 23^2 şi $23 \cdot 7$ pentru $n=8$. Dacă descompunem în factori unul din aceste numere, factorul minim nu va depăşi 23 în cazul $n=8$ şi 14 în cazul $n=5$. Scriind $V_5=\{6, 11, 16, \ldots\}$ şi $V_8=\{9, 17, 25, \ldots\}$, se verifică imediat indecompozabilităţile necesare.

Această problemă, după cum se va vedea, a ajuns să fie propusă în concurs. În timpul discuţiilor relative la principiile de coordonare, la întrebarea „Cîte puncte se scad unui concurent care nu a mai tratat cazurile 5 şi 8?" sau „Cîte puncte se acordă unuia care le-a tratat pe acestea?" a apărut din partea unui membru al juriului replica următoare. Nu este nevoie să se trateze special cazurile 5 şi 8. Dacă în relaţia $(n-1)^2(2n-1)^2=((n-1)(2n-1))((n-1)(2n-1))$ ambii factori din membrul stîng sînt indecompozabili în V_n, ceea ce este cazul pentru $n \geqslant 3$, $n \neq 8$, atunci înlocuind $(n-1)(2n-1)$ în cele două intrări ale sale în membrul drept cu aceeaşi descompunere a sa în factori indecompozabili în V_n, se obţine o egalitate între două descompuneri diferite, deoarece în membrul drept fiecare factor va apărea de un număr par de ori, ceea ce nu se întîmplă în membrul stîng. Dacă în acea relaţie $(n-1)^2$ şi $(n-1)(2n-1)$ sînt indecompozabili în V_n, ceea ce este cazul pentru $n \geqslant 3$, $n \neq 5$, atunci, înlocuind $(2n-1)^2$ cu o descompunere a sa în factori indecompozabili în V_n, obţinem egalitatea a două descompuneri ce sînt diferite, deoarece $(n-1)^2$ apare în membrul stîng, dar nu în cel drept. Această replică justifică cele observate la 5.16 că sînt foarte greu de prevăzut toate problemele ce le va pune coordonarea.

Relativ la această problemă, în juriu s-a exprimat dorința de a avea, dacă este posibil, încă o soluție, existența căreia ar înclina balanța în favoarea includerii ei între problemele de concurs. O astfel de soluție a fost propusă.

Altă soluție a problemei 10-NL (vezi 7.2). Vom obține cele două descompuneri cerute astfel: p va fi un număr prim, k va fi cel mai mic număr natural pentru care $p^k \in V_n$, m va fi cel mai mic număr natural pentru care $p \cdot m \in V_n$. Vom scrie $p^k \cdot m^k = (pm)^k$ și vom înlocui m^k cu descompunerea sa în factori indecompozabili în V_n. Vom arăta că p^k și pm sînt indecompozabili în V_n și diferiți între ei și cele două descompuneri obținute în cei doi membri ai egalității vor fi diferite, deoarece factorul p^k, indecompozabil în V_n, apare în membrul stîng și nu apare în cel drept, care este $(pm) \ldots (pm)$.

Să punem în aplicare acest plan de rezolvare a problemei.

Existența lui $k \geqslant 1$ cu $p^k \in V_n$, deci cu $p^k \equiv 1 (\mathrm{mod}\, n)$ reclamă p prim cu n, deci ca p să nu fie unul din divizorii lui n. Dacă această ipoteză este adevărată, atunci existența lui k rezultă fie din teorema lui Euler, fie alegînd doi exponenți întregi pozitivi a și b, $a < b$, pentru care $p^b \equiv p^a (\mathrm{mod}\, n)$ și scriind $p^b(p^{b-a} - 1) = n \cdot r$, deci, cum p nu apare în descompunerea în factori primi a lui n, $p^{b-a} - 1 = n \cdot r_1$ etc.

Pînă acum, singura condiție impusă lui p este de a nu divide pe n.

Existența lui $m \geqslant 1$ întreg cu $p \cdot m \in V_n$ rezultă fără a impune condiții în plus lui p. Mai mult, m este unul din numerele $1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1$, deoarece, pentru $0 \leqslant a < b \leqslant n-1$, $pa \equiv pb (\mathrm{mod}\, n)$ conduce la $p(b-a) = ns$, deci, ca mai sus, la $b - a = ns_1$, imposibil. Adică resturile împărțirilor lui $p \cdot 0$, $p \cdot 1, \ldots, p(n-1)$ la n sînt toate distincte, reprezentînd deci o permutare a lui $0, 1, \ldots, n-1$, primul este evident 0 etc.

Faptul că p^k, pm vor fi indecompozabili în V_n este evident; orice descompunere a lor în V_n va avea printre factorii săi respectiv unul de forma $p^a, p \cdot b$, care, conform definiției lui k și m, va trebui să coincidă respectiv cu $p^k, p \cdot m$.

Rămîne să ne asigurăm că $p^k \neq pm$. Dacă $k = 1$, atunci $p \in V_n$ și $m = 1$, $p^k = pm$. Deci trebuie în primul rînd ca $p \notin V_n$, pentru a exclude situația $k = 1$. Dar prin aceasta posibilitatea ca $p^k = pm$ nu a fost eliminată, de exemplu $p = 3$, $n = 13$, $m = 9$, $k = 3$, $p^k = pm = 27$. Să observăm că $p^k = pm$, împreună cu $k \geqslant 2$, implică $m = p^{k-1} \geqslant p$. Deci ne vom putea asigura de faptul că $p^k \neq pm$ dacă vom alege $p > n$, deoarece știm că $m \leqslant n - 1$.

În concluzie, p va trebui ales mai mare decît n (și automat el nu-l va divide pe n), $p \neq rn + 1$ pentru orice r întreg.

Însă posibilitatea alegerii unui număr prim p cu aceste proprietăți necesită și ea o demonstrație; prezentăm una analoagă cu cea a infinității șirului de numere prime. Pentru $n = 3$ se poate alege $p = 5$. Pentru $n > 3$ să considerăm toate numerele prime $p_1, \ldots, p_s$, distincte două cîte două, diferite de 2, care nu divid pe n și sînt mai mici decît n. Pentru fiecare să găsim întregul $q_i \geqslant 1$ așa ca $p_i^{q_i} \equiv$ $\equiv 1 \pmod n$ (vezi mai sus). Fie $q = q_1 \ldots q_s$ și $r = (p_1 \ldots p_s)^q - 2$. Avem $r \equiv -1 (\mathrm{mod} n)$, deci, cum $n \neq 2$, printre factorii primi ai lui r va exista unul, fie acesta p, pentru care $p \not\equiv 1 (\mathrm{mod} n)$ și p nu divide n, deoarece r este prim cu n. Avem $p > n$; altfel sau $p = 2$, însă r nu se divide cu 2 deoarece 3 nu apare printre $p_1, \ldots, p_s$, sau $p = p_i$ pentru un i, dar aceasta ar implica faptul că p ar divide pe 2.

Posibilitatea alegerii lui p a fost dovedită.

Cazul $n = 3$ l-am tratat separat, fiindcă nici un p_i nu există în această situație. Pentru $n = 4$ avem $s = 1$, $p_1 = 3$, $q = 2$, $r = 7$, $p = 7$, ca exemplu.

Soluția problemei 11-NL (vezi 7.2). Această problemă este aproape de o problemă cunoscută, chiar mai aproape decît pare la prima vedere, deoarece $nx_i^{-1} - 1 < y_i \leqslant nx_i^{-1}$ și deci $(x_i + y_i)/2 \leqslant$ $\leqslant (x_i + nx_i^{-1})/2 < (x_i + y_i + 1)/2$, iar $x_i + y_i$ este întreg, sau par $2k$, sau impar $2k + 1$, termenii extremi ai inegalităților sînt în cele două cazuri k și $k + (1/2)$, respectiv $k + (1/2)$ și $k + 1$ și rezultă că $x_{i+1} = [(x_i + y_i)/2] = k = [(x_i + nx_i^{-1})/2]$ pentru orice i.

Acea problemă cunoscută cerea să se arate că un șir (z_i) în care $z_1 > 0$ și $z_{i+1} = (z_i + az_i^{-1})/2$, unde $a > 0$ este fixat, converge către $\sqrt{a}$ ($\sqrt{a}$ este singura rădăcină pozitivă a ecuației $z = (z + az^{-1})/2$, deci un astfel de șir, dacă este convergent, poate converge numai la $\sqrt{a}$).

Soluția acestei probleme constă în a scrie

$$z_{i+1} - \sqrt{a} = (2z_i)^{-1}(z_i^2 - 2z_i\sqrt{a} + a) = (z_i - \sqrt{a})^2/(2z_i),$$

a deduce $z_i \geqslant \sqrt{a}$ pentru $i \geqslant 2$, apoi în a deduce din egalitatea precedentă, pentru $i \geqslant 2$, inegalitatea $z_{i+1} - \sqrt{a} \leqslant (z_i - \sqrt{a})/2$, deci $0 \leqslant z_i - \sqrt{a} \leqslant 2^{-(i-2)}(z_2 - \sqrt{a})$, de unde rezultă afirmația dorită.

Revenind la problema 11-NL, avem $x_1 = n > \sqrt{n}$ și, utilizînd prima egalitate stabilită pentru șirul (z_i), $(x_i + nx_i^{-1})/2 \geqslant \sqrt{n}$, deci $x_{i+1} \geqslant [\sqrt{n}]$ pentru orice i; obținem $\min(x_1, \ldots, x_n) \geqslant [\sqrt{n}]$.

Să considerăm acum un șir, construit la fel ca șirul (z_i), pentru $a = n$ și $z_1 = n = x_1$, șir ce-l notăm tot (z_i). Avem $x_2 \leqslant z_2$.

Comparația ulterioară între x_i și z_i se bazează pe monotonia funcției $(x + ax^{-1})/2$. Diferența dintre valoarea sa în u și în v este $(u - v)(1 - au^{-1}v^{-1})/2$ și este pozitivă pentru $u > v \geqslant \sqrt{a}$, deci funcția este crescătoare pentru $x \geqslant \sqrt{a}$; în cazul nostru am considerat $a = n$.

Ceea ce a rămas de demonstrat, pentru rezolvarea completă a problemei, este existența unui indice $i \leqslant n$ pentru care $x_i = [\sqrt{n}]$. Vom face aceasta prin reducere la absurd; dacă afirmația ar fi falsă, cum x_i sînt întregi, ar urma $x_i \geqslant [\sqrt{n}] + 1$ pentru orice i, deci x_i, la fel ca z_i (inclusiv $z_1 = n > \sqrt{n}$) ar aparține intervalului în care funcția $(x + nx^{-1})/2$ este crescătoare. Aceasta ne permite să demonstrăm, prin inducție față de i, că, în această ipoteză, $x_i \leqslant z_i$. Într-adevăr, pentru $i = 1$ aceasta s-a văzut a fi adevărat, iar din $x_i \leqslant z_i$, împreună cu $x_i \geqslant \sqrt{n}$, deducem

$$x_{i+1} = [(x_i + nx_i^{-1})/2] \leqslant (x_i + nx_i^{-1})/2 \leqslant (z_i + nz_i^{-1})/2 = z_{i+1}.$$

Informația $z_i \downarrow \sqrt{n}$ nu este suficient de precisă; ne bazăm pe $z_i - \sqrt{n} \leqslant 2^{-(i-1)}(n - \sqrt{n})$, stabilită în cursul demonstrației de mai sus a acestei relații limită.

Dar a pune pur și simplu $i = n$ în această ultimă relație nu conduce la contradicția dorită! Se obține

$$\sqrt{n} \leqslant x_n \leqslant z_n \leqslant \sqrt{n} + 2^{-(n-1)}(n - \sqrt{n}) \leqslant \sqrt{n} + (n-1)/2^{n-1} \leqslant \sqrt{n} + 1;$$

chiar dacă am căuta să fim mai preciși în ultima estimare, relația nu va putea contrazice așa de ușor faptul că x_n este întreg, deoarece nu știm cît de aproape de 1 este partea fracționară a lui $\sqrt{n}$!.

Mai este necesară o idee. Anume, să scriem

$$\sqrt{n} \leqslant x_{n-1} \leqslant z_{n-1} \leqslant \sqrt{n} + (n - \sqrt{n})2^{-(n-2)} < \sqrt{n} + (n-1)2^{-(n-2)} \leqslant \sqrt{n} + 1.$$

Deci, în ipoteza făcută, $x_{n-1} = [\sqrt{n}] + 1$. Dar acea ipoteză reclamă și $x_n > [\sqrt{n}]$, adică $x_n \geqslant [\sqrt{n}] + 1$, deci $(x_{n-1} + nx_{n-1}^{-1})/2 \geqslant [\sqrt{n}] + 1$. Notînd $c = [\sqrt{n}] + 1$, aceasta revine la $(c + nc^{-1})/2 \geqslant c$, $n \geqslant c^2$, ceea ce este contradictoriu cu $c > \sqrt{n}$ (mai general, acest ultim raționament arată că, dacă $x_i > \sqrt{n}$, atunci $x_{i+1} < x_i$).

Observații. 1. Șirul (x_i) converge? Am dovedit existența unui i cu $x_i = [\sqrt{n}]$. Dacă $x_i = [\sqrt{n}]$ implică $x_{i+1} = [\sqrt{n}]$, atunci, prin inducție, rezultă $x_k = [\sqrt{n}]$ pentru orice $k \geqslant i$, deci șirul va converge, într-un mod banal.

Implicația de la $x_i = [\sqrt{n}]$ la $x_{i+1} = [\sqrt{n}]$ revine la, notînd $d = [\sqrt{n}]$, $(d + nd^{-1})/2 < d + 1$, deci la $n < d(d + 2)$. Însă $d = [\sqrt{n}]$ este echivalent cu $d^2 \leqslant n < (d + 1)^2 =$

$= d(d + 2) + 1$, deci se poate ca $n = d(d + 2)$ şi implicaţia discutată să nu fie adevărată. Nu se poate ca pentru $x_i = [\sqrt{n}]$ să avem $x_{i+1} \geq [\sqrt{n}] + 2$, deoarece aceasta ar reclama $(d + nd^{-1})/2 \geq d + 2$, $n \geq d(d + 4)$, $d(d + 4) < (d + 1)^2$, $2d < 1$, imposibil pentru $d > 0$ întreg

Ajungem la concluzia că şirul (x_i) este pentru $i \geq i_0$ (cu $i_0 \leq n$) un şir constant egal cu $[\sqrt{n}]$, cu excepţia cazurilor $n = (d + 1)^2 - 1, d = 1, 2, 3, \ldots$, adică $n = 3, 8, 15, 24, \ldots$, în care acesta oscilează, de la un rang încolo, sărind de la valoarea $[\sqrt{n}]$ la $[\sqrt{n}] + 1$ şi înapoi (vezi şi ultima paranteză din soluţie).

2. Ultima observaţie din soluţie permite scurtarea acesteia. După ce s-a stabilit că $x_i \geq [\sqrt{n}]$ pentru orice i, din acea observaţie rezultă că $x_1 > x_2 > \ldots > x_i > x_{i+1}$ atît timp cît $x_i > [\sqrt{n}]$, dar, x_j fiind întregi şi $x_1 = n$, aceasta poate avea loc numai pentru $i \leq n - \sqrt{n}$ etc.

Soluţia problemei 12-NL (vezi 7.2). Dacă vom marca toate punctele despre care este vorba în enunţ, se va obţine o figură foarte încărcată. Să observăm deci în prealabil că această figură este invariantă prin rotaţia de unghi 90° în jurul centrului O al pătratului. De aceea, dacă vom pune în evidenţă, printre cele 12 puncte din enunţ, trei dintre ele în situaţia punctelor P_0, P_1, P_2 din fig. 86,

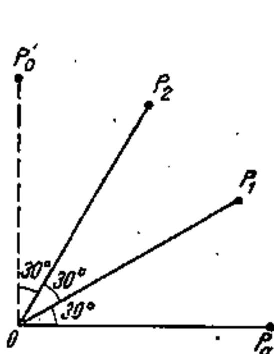


Fig. 86

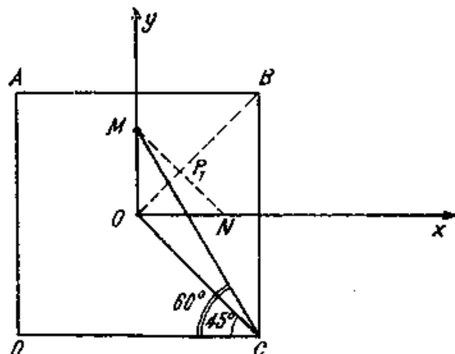


Fig. 87

cu $OP_0 = OP_1 = OP_2$, problema va fi rezolvată (am reprezentat şi punctul P_0' obţinut rotind P_0 cu 90° în jurul lui O ...).

Să urmărim deci poziţia într-un singur cadran cu vîrful în O, de exemplu cel din fig. 87, în care $Ox \perp BC$, $Oy \perp AB$. Punctul M se află pe porţiunea pozitivă a axei Oy, ca urmare a situaţiei unghiurilor din C. La fel, N se află pe porţiunea pozitivă a axei Ox, iar $OM = ON$ ca urmare a consideraţiilor iniţiale privind rotaţia de 90°, deci mijlocul P_1 al lui MN se află pe bisectoarea lui xOy, la distanţa $OM\sqrt{2}/2$.

Să figurăm acum și pe BK și mijlocul său P_0 (fig. 88). Nu trebuie să mai figurăm și mijlocul P_2 al lui BL, deoarece figura este simetrică față de diagonala BD, simetrie în care B stă pe loc, A merge în C, deci K în L și P_2 este simetricul lui P_0 față de BD, adică față de OP_1.

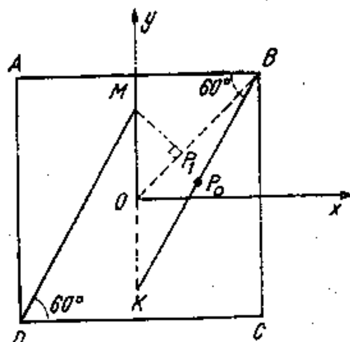


Fig. 88

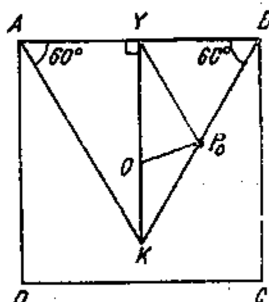


Fig. 89

Rămîne de demonstrat numai că $OP_0 = OP_1$ și că $\sphericalangle P_0OP_1=30°$. Afirmația relativă la unghi se stabilește cel mai simplu pe fig. 89. Avem $YP_0 = AK/2$ (linie mijlocie) $= AB/2 = YO$, deci YOP_0 este isoscel. Apoi $\sphericalangle BYP_0 = 60°$, deoarece $YP_0 || AK$, deci $\sphericalangle OYP_0=30°$, $\sphericalangle YOP_0 = (180° - 30°)/2 = 75°$. Revenind la fig. 88, în care $\sphericalangle MOP_1 = 45°$, se obține $\sphericalangle P_0OP_1 = 75° - 45° = 30°$.

Relația $OP_0 = OP_1$ revine, cum $OP_1 = OM\sqrt{2}/2 = OK\sqrt{2}/2$. (fig. 88), la $OK = OP_0\sqrt{2}$ și va rezulta din teorema sinusurilor în triunghiul OP_0K, în urma determinării în continuare a unghiurilor pe fig. 89, întîi $\sphericalangle OKP_0 = 30°$ (imediat) și apoi $\sphericalangle OP_0K = 180° - \sphericalangle YP_0O - \sphericalangle BP_0Y = 180° - 75° - 60° = 45°$.

Observații. 1. Coordonarea unei astfel de probleme pare a fi plină de dificultăți, nu atît din cauza greutății de a redacta o soluție, cît datorită cîmpului larg ce-l oferă situația din problemă pentru soluții ocolite, utilizînd cele mai diverse cunoștințe de geometrie elementară, precum și lungimii ce o poate atinge o redactare în care s-ar lua în considerare, cu toată „conștiinciozitatea", toate cele 12 puncte.

2. Există și o soluție prin numere complexe a acestei probleme, pe care o prezentăm numai în ceea ce privește stabilirea faptului că P_1 se obține rotind P_0 cu 30° în jurul lui O. Axele fiind cele din figurile 87, 88, fie $2a$ latura pătratului. Punctul D se va reprezenta prin numărul complex $-a(1 + i)$, punctul M prin $-a(1 + i) + 2a(\cos 60° + i \sin 60°)$, punctul N prin $-a(1 + i) + 2a(\cos 30° + i \sin 30°) = -a(1 + i) + 2a(\sin 60° + i \cos 60°)$, deci mijlocul P_1 al lui MN prin semisuma ultimelor două numere complexe, adică prin $-a(1 + i) + a(\sin 60° + \cos 60°)(1 + i) = a(1 + i)(\sqrt{3} - 1)/2$; acesta are modulul $a(\sqrt{3} - 1)\sqrt{2}/2$ și argumentul $\pi/4$.

Punctul P_0 se reprezintă prin $a(1 + i) - a(\cos 60° + i \sin 60°) = a(1 + (2 - \sqrt{3})i)/2$, ce are ca modul $a\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, iar ca argument x, determinat prin $\operatorname{tg} x = 2 - \sqrt{3}, \pi/2 > x > 0$, deci prin $\operatorname{tg} 2x = 2 \operatorname{tg} x/(1 - \operatorname{tg}^2 x) = 2(2-\sqrt{3})/(4\sqrt{3}-6) = (2-\sqrt{3})/(\sqrt{3}(2-\sqrt{3})) = 1/\sqrt{3}$, deci $2x = \pi/6$, $x = \pi/12$ și diferența dintre argumentul lui P_1 și al lui P_0 este $(\pi/4) - (\pi/12) = \pi/6$, deci 1/12 din cercul întreg (2π).

Faptul că și modulele corespunzătoare lui P_0 și P_1 sînt egale se verifică ridicînd la pătrat pe cel al lui P_1; obținem $a^2(4 - 2\sqrt{3})/2 = a^2(2 - \sqrt{3})$, deci pătratul modulului corespunzător lui P_0.

Soluția problemei 13-PL (vezi 7.2). La baza acestei soluții stă următoarea metodă de a număra în două moduri elementele unei submulțimi a unui produs cartezian.

Fie C mulțimea celor 2^n șiruri considerate în enunț. Dacă M este o submulțime a lui $B \times C$, atunci (fig. 90) numărul card M de elemente din M este suma, cînd b parcurge B, a numerelor de elemente din toate mulțimile M_b (firele verticale) din figură. În notații precise M_b se definește prin $M_b = \{c \mid c \in C, (b, c) \in M\}$ și avem $\operatorname{card} M = \sum_{b \in B} \operatorname{card} M_b$. Pe de altă parte, avem și $\operatorname{card} M = \sum_{c \in C} \operatorname{card} M^c$, unde M^c, desenat în fig. 90, se definește prin $M^c = \{b \mid b \in B, (b, c) \in M\}$.

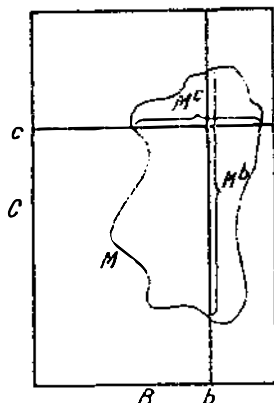


Fig. 90

Vom defini, pentru a ajunge la concluzia ce se cere demonstrată, $M = \{(b, c) \mid b \in B, c \in C$, există $a \in B$ cu $b = ca\}$ și vom avea $M^c = \{b \mid b \in B$, există $a \in B$ cu $b = ca\} = B \cap cB$, unde cB este mulțimea $\{ca \mid a \in B\}$ despre care a fost vorba în enunț. Pe de altă parte, $M_b = \{c \mid c \in C$, există $a \in B$ cu $b = ca\}$. Să observăm însă că $xaa = x$ pentru orice x și a din C; aceasta ne conduce la concluzia că $b = ca$ este echivalent cu $ba = c$ ($b = ca$ implică $ba = caa = c$ etc., înmulțirea definită în enunț fiind, evident, asociativă), deci $M_b = \{c \mid c \in C$, există $a \in B$ cu $ba = c\} = bB$ în notația introdusă anterior.

Relația $xy = xz$ pentru $x, y, z \in C$ implică, prin înmulțire cu x, $y = z$, deci $x \to bx$ este o bijecție și $\operatorname{card} M_b = \operatorname{card}(bB) = \operatorname{card} B$ pentru orice $b \in B$.

Rezultă, conform celor stabilite la început,

$$\operatorname{card} M = \sum_{b \in B} \operatorname{card} M_b = \sum_{b \in B} \operatorname{card} B = (\operatorname{card} B)(\operatorname{card} B) = k^2.$$

Dacă notăm cu $m = \min_{c \in C} \operatorname{card}(B \cap cB)$, problema cere să se arate că $m \leq k^2 2^{-n}$. Aceasta rezultă din

$$k^2 = \operatorname{card} M = \sum_{c \in C} \operatorname{card} M^c = \sum_{c \in C} \operatorname{card}(B \cap cB) \geq \sum_{c \in C} m = m \operatorname{card} C = m \cdot 2^n.$$

Soluția problemei 14-FI (vezi 7.2). Această problemă privește numai proprietăți de incidență și de ordine. Însă soluția se bazează pe noțiunea de distanță; acesta este elementul ei neașteptat.

Se consideră toate perechile (A, P) în care P este un plan ce conține cel puțin trei puncte ale mulțimii E, iar A — un punct al lui E ce nu aparține lui P. Există asemenea perechi și acestea sînt în număr finit; printre ele se poate alege una, ce o notăm tot (A, P), pentru care distanța de la A la planul P să fie minimă posibilă.

Fie B, C, D trei puncte ale lui E ce aparțin lui P. Conform ipotezei, P va conține cel puțin încă un punct F din E. Deosebim două cazuri. Primul este cel în care F aparține uneia din zonele 1, 2, 3, 4 din fig. 91, al doilea cel în care F aparține uneia din zonele 5, 6, 7.

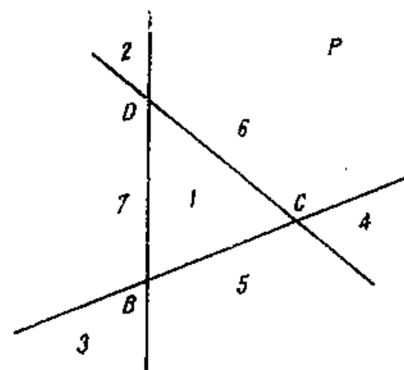


Fig. 91

Punctul F nu poate fi pe nici una din cele trei drepte din fig. 91, deoarece, conform enunțului, E nu conține trei puncte coliniare.

Vom considera întîi cazul 1 și vom arăta că acesta este imposibil. Putem schimba notațiile astfel încît F să se afle în zona 1.

Într-un tetraedru, ținînd seama de formula volumului său, la înălțimea cea mai mică va corespunde baza de arie cea mai mare. Ținînd seama de modul cum a fost aleasă perechea (A, P) și aplicînd această observație în tetraedrele $AFBD$, $AFDC$, $AFCB$, se obțin aria $FBD \geq$ aria ABD, aria $FDC \geq$ aria ADC, aria $FCB \geq$ aria ACB.

Fie G proiecția lui A pe planul P. Rezultă aria $ABD >$ aria GBD, aria $ADC >$ aria GDC, aria $ACB >$ aria GCB. Comparînd cu inegalitățile stabilite și adunînd, obținem aria $FBD +$ aria $FDC +$ + aria $FCB >$ aria $GBD +$ aria $GDC +$ aria GCB. Dar suma din membrul stîng este aria BCD, F fiind în zona 1, iar suma din cel drept este $\geq$ aria BCD, după cum se vede considerînd, pe rînd, situațiile în care G este în zona 1 (în care are loc egalitate), în una din zonele 2, 3, 4 și în una din zonele 5, 6, 7.

Cu aceasta s-a stabilit imposibilitatea cazului 1. Deci vom putea schimba notațiile astfel încît, de exemplu, F să fie în zona 5. Vom arăta că piramida de vîrf A și de bază $BDCF$ răspunde cerințelor problemei; toate sînt evidente cu excepția faptului că ea nu conține alte puncte din E.

Pe muchii sau pe diagonala BC a bazei nu se pot afla puncte din E, deoarece E nu conține trei puncte coliniare. În interioarele triunghiurilor BCD, BCF nu pot exista puncte din E, deoarece împreună cu vîrfurile triunghiului respectiv acestea ar fi în cazul 1. În interiorul piramidei nu pot exista puncte din E, deoarece distanța lor la P ar fi pozitivă, dar mai mică decît distanța de la A la P.

Afirmația este complet demonstrată.

Observație. 1. Se putea evita apelul la noțiunea de volum, dovedind că, într-un tetraedru $XYZT$, înălțimea din X este egală cu distanța de la X la ZT înmulțită cu sinusul unghiului dintre fețele XZT, YZT, iar cea din Y cu distanța de la Y la ZT înmulțită cu sinusul aceluiași unghi (fig. 92). În situația din cazul 1 am fi obținut că distanța de la F la BD nu este mai mică decît cea de la A la BD, deci este mai mare decît cea de la G la BD, aceeași inegalitate și între distanțele de la F și G la DC și la CB și apoi o figură plană, pe care n-o mai prezentăm, ar fi scos în evidență imposibilitatea unei asemenea poziții (în care F este în zona 1).

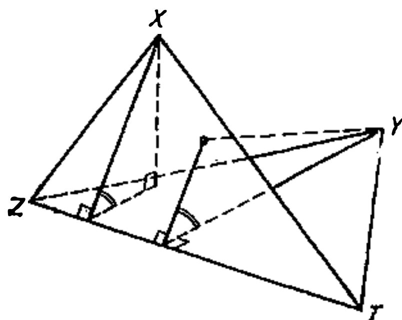


Fig. 92

Experiența din prima zi a Olimpiadei a arătat că 24 ore nu prea sînt suficiente pentru apariția ideii de bază a soluției acestei probleme (reamintim, însă, în condiții în care au fost de rezolvat și alte 15). Această idee pare a nu fi de largă circulație.

Totuși, să remarcăm că, într-unul din manualele de *Geometrie* de clasa 9—10, în vigoare în 1980 în țara noastră, în lista de probleme recapitulative apărea:

Problema A. *Se consideră o mulțime finită M de puncte în plan (sau în spațiu), nu toate coliniare. Să se demonstreze că există două puncte distincte A și B în M, așa încît pe dreapta AB să nu se mai găsească nici un alt punct din M.*

Soluția acestei probleme este următoarea. Considerăm toate tripletele (A, B, C) de puncte din M, necoliniare, și alegem unul, notat (A, B, C), pentru care distanța de la A la dreapta BC este minimă posibilă. Dacă pe dreapta BC ar exista încă un punct D

din M, putem aranja notațiile ca în fig. 93 și, cum într-un triunghi înălțimea mai mică va corespunde la latura mai mare, rezultă $BC \geqslant AB$, $CD \geqslant AD$, deci $BD = BC + CD \geqslant AB + AD$, ceea ce, nu poate avea loc decît dacă B D, A sînt coliniare, contrar construcției.

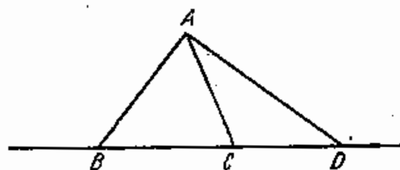


Fig. 93

Este evident că o persoană familiară cu problema A avea toate șansele să rezolve și 14-FI, a cărei soluție a fost prezentată înainte, și aceasta chiar în cele patru ore de concurs.

Probleme de genul lui 14-FI și A, ținînd seama de unele căi de evoluție ale învățămîntului școlar din ultimii ani, au șansa să capete o importanță mult mai mare decît cea a unei metode simple, ingenioase, dar speciale și neașteptate. Aceasta începe să iasă în evidență dacă ne punem întrebarea, preferabil întîi relativ la problema A din observația precedentă: „Există o demonstrație a afirmației respective care să nu facă apel la noțiunea de distanță?".

Problema A se referă numai la relația de incidență. Însă o demonstrație bazată numai pe proprietăți ale acestei relații nu se poate da, deoarece afirmația din problema A este falsă în geometriile peste un corp finit (în locul corpului numerelor reale), cu cel puțin trei elemente.

Dar o demonstrație bazată numai pe proprietăți ale relațiilor de incidență și de poziție? O astfel de demonstrație există! Ea este prezentată, de exemplu, în [2], §3 al capitolului 12; menționăm însă că urmărirea capitolului 12 nu necesită cunoașterea capitolelor precedente! Punctul de plecare al acestei demonstrații îl reprezintă axiomele de ordine din sistemul lui Hilbert, plus cele de incidență. Ultima din lista lor este axioma lui Pasch.

Recent au existat inițiative de a introduce noțiuni de geometrie axiomatică în programa școlară. Ca orice noutate, acestea au stîrnit obiecții. Introducerea lor s-a făcut fără ca elevii să aibă în prealabil în orizontul lor matematic noțiuni de geometrie proiectivă, de geometrie neeuclidiană etc. S-a predat sistemul de axiome al lui Hilbert. Acesta are cinci grupuri. Axioma paralelelor (grupul 5) și axiomele de incidență (grupul 1) nu au fost o noutate pentru elevi. În parte nici grupul 3 (axiomele de congruență), în acesta aflîndu-se și unul din cazurile de congruență a triunghiurilor. Grupul 2 însă, axiomele de ordine, care se încheie cu axioma lui Pasch, creează impresia, prin demonstrațiile dificile ale unor fapte ce intuitiv par evidente,

în care acea axiomă se aplică de mai multe ori, unor complicații inutile.

Problema A din observația 2, ca și 14-FI (vezi 7.2) nu par însă deloc intuitiv evidente. Apărînd ca un instrument de rezolvare a unor astfel de probleme, axioma lui Pasch va ajunge, credem, să cîștige prețuirea elevilor, într-un mod care în matematică reprezintă aproape o regulă.

Soluția problemei 15-VN (vezi 7.2). Fie $x_1, \ldots, x_n$ acel șir. Ideea de a scrie

$$(x_1 + \ldots + x_7) + (x_8 + \ldots + x_{14}) + \ldots + (x_{71} + \ldots + x_{77}) =$$
$$= (x_1 + \ldots + x_{11}) + (x_{12} + \ldots + x_{22}) + \ldots + (x_{67} + \ldots + x_{77}),$$

ceea ce conduce la egalitatea dintre un număr negativ și un număr pozitiv, deci la o contradicție, este ușor accesibilă. Aceasta ne arată că $n < 77$.

Această idee poate fi rafinată astfel:

$$(x_1 + \ldots + x_7) + (x_2 + \ldots + x_8) + \ldots + (x_{11} + \ldots + x_{17}) =$$
$$= (x_1 + x_2 + \ldots + x_{11}) + (x_2 + x_3 + \ldots + x_{12}) + \ldots$$
$$\ldots + (x_7 + x_8 + \ldots + x_{17}).$$

Se obține în același mod o contradicție și concluzia că $n < 17$.

În soluția autorilor urmează un exemplu de șir cu proprietățile din enunț cu 16 elemente, anume 5, 5, —13, 5, 5, 5, —13, 5, 5, —13, 5, 5, 5, —13, 5, 5, arătînd cu acesta că numărul maxim de termeni cerut de problemă este 16.

Replica juriului : enunț foarte potrivit Olimpiadei, dar pe ce cale se poate „găsi" un exemplu de astfel de șir cu 16 termeni? Se pare că se riscă a pune concurenții „să caute un ac într-un car cu fîn"!

Anticipînd, să menționăm că problema a fost propusă în concurs, că au existat concurenți care au căutat pe cale empirică un astfel de șir de 16 termeni și că unii chiar au reușit în căutarea lor.

Dar ceea ce a înlăturat toate obiecțiile juriului a fost următoarea soluție, descoperită în „cele 24 de ore" de unul din șefii de delegații :

Altă soluție a problemei 15-VN (vezi 7.2). Fie $x_1, \ldots, x_n$ un șir cu proprietățile din enunț. Dacă orice grup de $11 - 7 = 4$ termeni consecutivi se poate completa, la stînga sau la dreapta, printr-un grup de 7 termeni consecutivi, pînă la un grup de 11 termeni consecutivi, atunci suma termenilor grupului de 4 este egală cu dife-

rența dintre suma grupului de 11 și cea a grupului de 7, rezultînd astfel pozitivă. Să reprezentăm schematic acest raționament prin $(4) = (11) - (7) > 0$.

Dacă acea completare reușește pentru orice grup de 4, atunci și raționamentul $(3) = (7) - (4) < 0$ va reuși totdeauna, la fel și $(1) = (4) - (3) > 0$, conducînd la concluzia că orice termen al șirului va fi pozitiv, în contradicție cu faptul că suma a 7 consecutivi este negativă. Cu alte cuvinte, un astfel de șir, pentru un n dat, nu poate exista dacă acea completare a unui grup de 4 consecutivi la unul de 11 consecutivi reușește totdeauna.

Cînd o astfel de completare nu reușește? Dacă rangul primului termen din grupul de 4 consecutivi este k, iar al ultimului m, atunci completarea la stînga nu reușește cînd $k \leqslant 7$, iar cea la dreapta cînd $m \geqslant n - 6$, deci, cum $m = k + 3$, cînd $k \geqslant n - 9$. Cele două zone de nereușită au intersecție nevidă dacă și numai dacă $n - 9 \leqslant 7$, adică $n \leqslant 16$. Cu aceasta s-a dovedit că un șir cu proprietățile din enunț are maximum 16 termeni.

Pînă aici, această soluție apare mai lungă și poate mai greoaie decît precedenta. Dar ea ne arată calea către exemplul de șir, cu proprietățile din enunț, cu 16 elemente!

Anume, dacă $n = 16$, singurul grup de 4 termeni consecutivi ce nu poate fi completat în sensul descris este cel al termenilor de ranguri 7, 8, 9, 10. Din această cauză, suma acestor termeni nu este neapărat pozitivă. Vor apărea și două grupuri de cîte 3 termeni, pentru care raționamentul $(3) = (7) - (4) < 0$ nu este valabil, anume grupurile 4, 5, 6 și 11, 12, 13, ale căror sume nu vor fi deci neapărat negative. În fine, termenii pentru care raționamentul $(1) = (4) - (3) > 0$ nu funcționează sînt x_3, x_7, x_{10}, x_{14}; acești termeni nu sînt deci neapărat pozitivi. Este instructiv de urmărit aceste deducții pe fig. 94. Cele stabilite conduc la ideea de a alege termenii

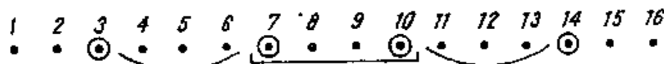


Fig. 94

x_3, x_7, x_{10}, x_{14} negativi, iar pe ceilalți pozitivi, în exemplul ce dorim să-l construim. Vom încerca să alegem un șir de forma $a, a, -b, a, a, a, -b, a, a, -b, a, a, a, -b, a, a$, cu $a, b > 0$. El va satisface condițiile din enunț dacă și numai dacă $5a - 2b < 0$, $8a - 3b > 0$, relații ce revin la $5/2 < b/a < 8/3$, inegalități compatibile. Deci un șir de 16 termeni cu proprietățile din enunț poate fi construit și răspunsul la problemă rezultă a fi 16.

Autorii au ales $b/a = (5+8)/(2+3)$, deci $b = 13$, $a = 5$.

Această problemă (15-VN, vezi 7.2) a apărut, printre toate cele propuse la Olimpiadele descrise în această carte, drept cea mai reprezentativă pentru spiritul acestor Olimpiade. În 1981, cînd Olimpiada Internațională a fost organizată în Statele Unite, ziariștii de la un cotidian de largă circulație, dorind să explice cititorilor cît mai pe înțeles ce este și ce se petrece la Olimpiada Internațională de Matematică, au reprodus textul acestei probleme în articolul respectiv. Acestea sînt și motivele pentru care ea figurează și pe coperta acestei cărți (vezi, totuși, și 7.5).

Soluția problemei 16-VN (vezi 7.2). a) Punctele (x, y) de coordonate întregi din plan se împart în nouă clase, după resturile împărțirii lui x, y la 3. Aceste clase sînt arătate în fig. 95.

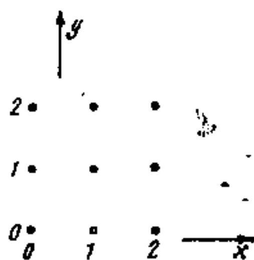


Fig. 95

Vom nota cu F mulțimea acelor clase ce conțin elemente din E. Dacă F are cel puțin patru elemente, vor exista o coloană x_0 și o linie y_0 ce vor conține, fiecare, cel puțin două elemente din F. Pentru ușurința expunerii, vom scădea (x_0, y_0) din toate elementele din E (componentă cu componentă) și vom ajunge în situația ca acea linie și acea coloană să fie, ambele, 0

b) Să precizăm condiția din enunț asupra lui E. Media aritmetică a trei numere întregi este un număr întreg dacă și numai dacă sau (cazul 1) cele trei numere dau același rest prin împărțirea cu 3 sau (cazul 2) resturile împărțirilor cu 3 ale celor trei numere sînt, într-o anumită ordine, 0, 1 și 2.

Condiția din enunț cere deci ca, pentru trei puncte din E, abscisele și ordonatele lor să nu fie, fiecare, într-unul din cele două cazuri. Aceasta exclude prezența în F a unei întregi linii sau a unei întregi coloane (cazul 1 la una din coordonate, cazul 2 la cealaltă), precum și a unei configurații dintre cele din fig. 96, care corespund toate cazului 2 la ambele coordonate.

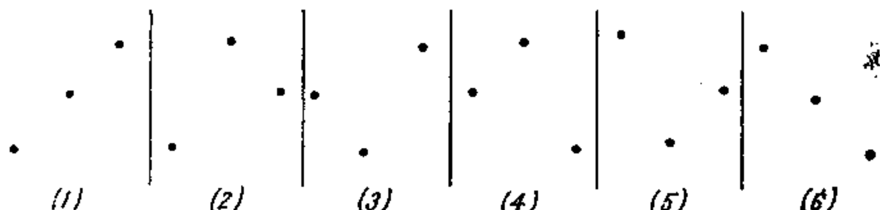


Fig. 96

De asemenea, se exclude prezența a trei elemente din E în aceeași clasă din F (cazul 1 la ambele coordonate).

c) Revenind la concluziile de la a) și excluzînd, conform cu b), prezența în F a unei coloane sau a unei linii, se ajunge la una din cele două alternative din fig. 97, în care s-au marcat cu × elementele ce se știu a fi în F, iar cu ∘ cele ce se știu a nu fi (despre unele aceasta nu este încă precizat).

În cazul A vom putea marca cu ∘ toate celelalte elemente, utilizînd pe rînd situațiile 6, 4, 5, 3 din fig. 96.

În cazul B vom putea marca cu ∘ punctul din dreapta sus [adică (2, 2)], ca urmare a configurației 3 din fig. 96. În fig. 98 sînt marcate

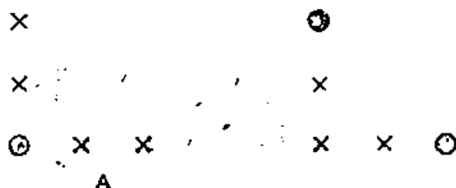


Fig. 97

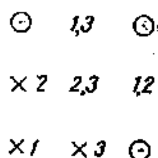


Fig. 98

trei triplete de puncte, primul format din cele cu 1 etc., dintre care primul este în situația 2 din fig. 96, iar celelalte sînt o linie și o coloană, triplete ce ne arată că, dintre cele trei puncte rămase, cel mult unul poate aparține lui F.

Atît în cazul A, cît și în B s-a ajuns la concluzia că F nu poate avea mai mult de patru elemente. Conform ultimei afirmații din b), într-o clasă din F nu pot fi mai mult de două elemente din E și deci E are cel mult opt elemente.

Există mulțimi E cu proprietățile din enunț ce au opt elemente. Una din acestea este $\{(1, 0), (4, 0), (2, 0), (5, 0), (0, 1), (0, 4), (0, 2), (0, 5)\}$, construită conform cazului A din fig. 97; verificarea faptului că aceasta are proprietățile din enunț se face pe baza celor stabilite la b).

Așadar, problema este rezolvată : $n = 8$.

Se observă că în soluția acestei probleme s-a ajuns destul de repede la o situație în care rămîneau de cercetat un număr finit de posibilități și se aștepta de la concurent să facă aceasta cît mai expeditiv, cu cît mai multă iscusință, punîndu-și cît mai mult în mișcare inteligența. Astfel de probleme au mai apărut la Olimpiada Internațională : 3-DE (Olimpiada ce o prezentăm, vezi 7.2), 1-FR (Olimpiada a 17-a, vezi 5.2), I1-US și II5-BG (a 16-a, vezi 4.2) și chiar GB1 (a 15-a, vezi 3.1 și 3.8).

7.4. Alegerea problemelor pentru concurs

La Olimpiada a 19-a, conducerea juriului a luat inițiativa de a aplica următoarea procedură de alegere a celor șase probleme de concurs din lista celor (16 în acest caz) propuse de comisia de preselecție a comitetului de organizare (vezi 2.1). După discuții generale în juriu asupra celor 16 probleme, unele din acestea menționate în 7.3, în faza următoare s-a desenat pe tablă un tabel dreptunghiular, cu 16 coloane corespunzătoare celor 16 probleme și cu 21 linii corespunzătoare celor 21 delegații prezente. Fiecare șef de delegație era invitat să marcheze, pe linia ce-i corespundea, șase coloane exprimînd propunerea sa în legătură cu cele șase probleme ce urmau a fi date spre rezolvare concurenților.

Se numărau apoi voturile obținute de fiecare problemă, deci numărul de semne de pe fiecare coloană. Problema ce obținea numărul minim de voturi era eliminată, iar delegațiile ce o votaseră erau invitate să-și mute voturile respective la alte probleme. Se repeta apoi numărătoarea etc., pînă rămîneau șase probleme, care, astfel, avînd cele mai multe voturi, erau decise drept probleme de concurs.

În condițiile în care la Olimpiadă participau un număr tot mai mare de delegații, această metodă a însemnat un mare pas înainte în asigurarea faptului de a ține seama în mod egal de părerea tuturor. Avantajul în comparație cu uzanța de a asculta propuneri de includere a cîte unei probleme pe lista de concurs, făcute de cîte o delegație, și apoi de a le supune la vot, este vizibil. Evident, și această procedură poate conduce la „balotaje“.

Nu sînt consemnate toate etapele modificării tabelului; ar fi și greu. La această Olimpiadă, după eliminarea a opt probleme, pe această cale, anume 4-DE, 5-DE, 6-DD, 8-GB, 9-HU, 11-NL, 13-PL și 16-VN, numărătoarea se prezenta astfel:

Problemă	1-BG	2-CS	3-DE	7-GB	10-NL	12-NL	14-FI	15-VN
Număr de voturi	19	12	15	18	18	17	8	19

Deci problema dificilă 14-FI a rezistat mai mult decît multe altele. Votul însă nu se putea considera încheiat, deoarece dintre cele opt delegații, ce votaseră pentru 14-FI, numai patru votaseră și pentru 2-CS și, în cazul în care celelalte patru și-ar fi mutat voturile de la 14-FI la 2-CS și nici una (dintre cele două ce mai puteau face aceasta) nu și-ar fi mutat votul la 3-DE, problema 2-CS ar fi depășit 3-DE ca număr de voturi (pentru a urmări eventualitatea descrisă, ar fi necesar tabelul complet și nu numai datele prezentate înainte).

Dar o astfel de situaţie extremă nu s-a produs şi, după mutarea celor opt voturi, problemele rămase au ajuns să aibă respectiv cîte 20, 14, 16, 19, 19, 18, 20 voturi şi cu aceasta nici 2-CS nu a intrat pe lista de concurs.

Evident că existenţa unor obiecţii la adresa unei probleme nu înseamnă încă renunţarea de a o propune concurenţilor, după cum absenţa acestor obiecţii nu înseamnă că delegaţii nu vor considera că alte probleme de pe listă sînt mai potrivite. Aceste observaţii sînt valabile pentru voturile respective de la toate Olimpiadele.

Ordinea în concurs şi punctajele celor şase probleme alese mai înainte s-a hotărît să fie următoarele: *1* (12-NL) — 6 puncte, *2* (15-VN) — 6 puncte, *3* (10-NL) — 7 puncte; *4* (7-GB) — 6 puncte, *5* (3-DE) — 7 puncte, *6* (1-BG) — 8 puncte.

La Olimpiada a 19-a conducerea juriului a luat iniţiativa de a afişa pe un panou toate listele cu problemele celor două zile de concurs, traduse de şefii de delegaţii în limbile respective. Toţi delegaţii le puteau cerceta, iar, la obiecţia unuia din ei în legătură cu faptul, că traducerea făcută ar conţine indicaţii în plus pentru concurenţi, juriul s-ar fi adunat pentru a o analiza. Şi la Olimpiada a 18-a s-a luat o măsură în această direcţie.

Asemenea obiecţii nu au apărut. Aplicarea măsurilor de securitate s-a făcut, ca şi la celelalte Olimpiade, într-un climat de încredere reciprocă, cea menţionată fiind privită mai mult ca o ocazie de a afla detalii asupra unor limbi mai puţin cunoscute sau a exersa cunoştinţe de limbi străine.

7.5. Premiile speciale

În timpul coordonării au apărut, la fel ca la celelalte Olimpiade, diferite probleme, controverse. Toate au trecut însă pe planul doi, în comparaţie cu cele ridicate de premiile speciale.

Juriul a acordat, la Olimpiada a 19-a, şase premii speciale şi a fost la un pas de a mai acorda încă unul, poate chiar două.

Această situaţie s-a armonizat perfect cu iniţiativa comitetului Olimpiadei, menţionată şi în regulamentul trimis delegaţiilor, de a organiza la sfîrşit partea a II-a a simpozionului „Matematica şi tineretul" (vezi 7.1), la care concurenţii au fost invitaţi să participe cu comunicări de matematică şi la care cei distinşi cu premii speciale şi-au expus soluţiile respective. Astfel, aceste soluţii au putut fi aflate în detalii de către toţi participanţii, inclusiv şefii şi secunzii

delegaţiilor, şi, în plus, au putut fi cunoscute personalităţile celor premiaţi.

Un succes deosebit a înregistrat problema *2* (15-VN, vezi 7.2 şi discuţiile din 7.3), conducînd la un moment de vîrf al acestei Olimpiade, ca şi în general al Olimpiadelor descrise în această carte. După cum s-a arătat în 7.3, această problemă a pus oarecum în dificultate juriul, care nu a reuşit să-i epuizeze aspectele matematice. De aceea apare deosebit de meritorie găsirea, de către un concurent, Martin Čadek din Cehoslovacia (CS1), a unei metode prin care situaţia din această problemă este complet dominată.

Soluţie a problemei 2 (15-VN, vezi 7.2), *distinsă cu premiu special.* Fie $x_1, \ldots, x_n$ un şir finit oarecare de numere reale. Să notăm $y_0 = 0$, $y_1 = x_1, \ldots, y_k = x_1 + \ldots + x_k, \ldots$ Există o corespondenţă bijectivă între şirurile $x_1, \ldots, x_n$ şi $y_1, \ldots, y_n$, realizată în sens invers de $x_k = y_k - y_{k-1}$.

Condiţiile problemei se traduc prin $y_{k+7} - y_k < 0$ pentru $0 \leqslant k \leqslant n - 7$ şi $y_{k+11} - y_k > 0$ pentru $0 \leqslant k \leqslant n - 11$, deci $y_{k+7} < y_k$ şi $y_k < y_{k+11}$ pentru acei k.

Să scriem aceste inegalităţi „la rînd", completînd de fiecare dată la dreapta cu un y de indice minim posibil :

$$0 = y_0 < y_{11} < y_4 < y_{15} < y_8 < y_1 < y_{12} < y_5 < y_{16} < y_9 <$$

$$< y_2 < y_{13} < y_6 < y_{17} < y_{10} < y_3 < y_{14} < y_7 < y_0 = 0.$$

În acest mod, se vede că $n \geqslant 17$ conduce la contradicţie. Pentru $n = 16$ se observă că toate inegalităţile cerute de condiţiile problemei figurează în acest şir şi că acesta nu mai este ciclic, ci liniar, începînd cu $y_{10} < y_3 < y_{14} < \ldots$ şi încheindu-se cu $\ldots < y_2 < y_{13} < y_6$. Alegînd $y_1, \ldots, y_{16}$ aşa incît aceste inegalităţi să fie adevărate, ceea ce este evident posibil, se pot determina $x_1, \ldots, x_{16}$ prin formula de la sfîrşitul primului aliniat al soluţiei. În acest mod, pe lîngă concluzia că 16 este numărul maxim de termeni dintr-un şir cu proprietăţile din enunţ, se obţine şi forma generală a acestor şiruri de 16 elemente.

În limbaj competiţional, autorul acestei soluţii a fost mai tare decît juriul.

Dar la această problemă a mai fost acordat un premiu special, pentru o generalizare a ei.

Generalizare şi soluţie a problemei 2 (15-VN, vezi 7.2), *distinsă cu premiu special.* Vom înlocui 7 şi 11 din enunţ cu numere întregi pozitive p şi q oarecare, punîndu-ne deci întrebarea : „Care este numărul maxim de termeni dintr-un şir, în care suma oricăror p termeni con-

secutivi este negativă, iar suma oricăror q termeni consecutivi este pozitivă?".

Vom nota cu d cel mai mare divizor comun al lui p şi q.

Dacă $x_1, \ldots, x_n$ este un şir de numere reale, vom nota, la fel ca în soluţia precedentă, $y_0 = 0$, $y_1 = x_1, \ldots, y_k = x_1 + \ldots + x_k, \ldots$

a) Să presupunem că n este multiplu de d şi că $x_1, \ldots, x_n$ are proprietăţile indicate. Să considerăm şirul

$$x'_1 = x_1 + \ldots + x_d, x'_2 = x_{d+1} + \ldots + x_{2d}, \ldots, x'_{n/d} =$$

$$= x_{n-d+1} + \ldots + x_n = x_{((n/d)-1)d+1} + \ldots + x_{(n/d)d}.$$

Obţinem un şir de n/d termeni, în care suma oricăror p/d consecutivi va fi negativă, iar suma oricăror q/d consecutivi va fi pozitivă. Notînd acest şir tot cu $x_1, \ldots, x_{n/d}$, vor rezulta pentru y_i corespunzători inegalităţi de forma $y_{k+(p/d)} < y_k$ şi $y_{k-(q/d)} < y_k$.

Fie $y_r = \min(y_0, y_1, \ldots, y_{n/d})$. Conform primei inegalităţi rezultă $r + (p/d) \geqslant (n/d) + 1$, altfel $y_{r+(p/d)} < y_r$, iar conform celei de a doua inegalităţi rezultă analog $r - (q/d) \leqslant -1$. Cele două inegalităţi obţinute conduc la $n/d \leqslant r + (p/d) - 1 \leqslant (q/d) + (p/d) - 2$.

Deci situaţia $n/d = (q/d) + (p/d) - 1$ este imposibilă. Numărul maxim de termeni dintr-unul din şirurile considerate este deci $\leqslant p + q - d - 1$ (atenţie! $n \leqslant p + q - 2d$ rezultă numai pentru n multiplu de d).

Este de remarcat că acest raţionament revine de fapt la prima parte a soluţiei precedente, însă este redactat pentru p, q oarecare.

b) Să arătăm că există un şir $x_1, \ldots, x_n$ cu proprietăţile cerute, avînd $n = p + q - d - 1$ termeni. Condiţiile ce se impun elementelor y_i corespunzătoare revin la un număr de inegalităţi ce se pot scrie toate cu simbolul $<$.

Un element y_k poate să apară numai în inegalităţile $y_{k+p} < y_k$, $y_{k-q} < y_k$, $y_k < y_{k-p}$, $y_k < y_{k+q}$, inegalităţi ce au sens respectiv în cazurile $k \leqslant n - p = q - d - 1$, $k \geqslant q$, $k \geqslant p$ şi $k \leqslant n - q = p - d - 1$, deci dintre primele două poate apărea cel mult una, iar dintre celelalte tot cel mult una. În concluzie, fiecare y_k poate apărea în cel mult două inegalităţi şi, cînd aceasta are loc, el apare în membrul drept al uneia şi în cel stîng al celeilalte.

Rezultă că sistemul de inegalităţi $<$ impus elementelor y_i se poate reprezenta printr-un număr de linii şi un număr de cicluri, de inegalităţi succesive $<$, fiecare termen y_i apărînd în scriere, în total, cel mult o dată. Un astfel de sistem este compatibil dacă şi numai dacă acesta nu conţine nici un ciclu.

b') Pentru a arăta existenţa şirului $x_1, \ldots, x_n$ descris la b) mai trebuie demonstrat numai că sistemul corespunzător de inegalităţi

nu conține nici un ciclu. Dacă acesta ar conține un astfel de ciclu $y_{k_0} < y_{k_1} < \ldots < y_{k_r} = y_{k_0}$, am avea $k_{i+1} = k_i + q$ sau $k_{i+1} = k_i - p$, pentru fiecare i; dacă prima ar avea loc de a ori și a doua de b ori, am obține $0 = aq - bp$, cu $a + b = r$. În plus, $k_{i+1} \equiv k_i \pmod{d}$ pentru orice i. Dacă r a fost ales minim posibil, $k_0, k_1, \ldots, k_{r-1}$ rezultă distincți doi cîte doi.

$aq = bp$ implică $a(q/d) = b(p/d)$ și, cum q/d și p/d sînt primi între ei, $a \geqslant p/d$, $b \geqslant q/d$, deci $r = a + b \geqslant (p + q)/d$.

Pe de altă parte, $k_{i+1} \equiv k_i \pmod{d}$ pentru orice i conduce la existența unui c cu $0 \leqslant c < d - 1$, așa încît $k_i \equiv c \pmod{d}$ și, cum $0 \leqslant k_i \leqslant p + q - d - 1$, obținem $k_i \in \{c, c + d, \ldots, c + p + q - 2d\}$, mulțime care are $(p + q - d)/d = ((p + q)/d) - 1 < (p + q)/d \leqslant r$ elemente, în contradicție cu faptul că numerele $k_0, \ldots, k_{r-1}$ sînt distincte două cîte două.

Am demonstrat cu aceasta că numărul maxim de elemente al unui șir, în care suma oricăror p termeni consecutivi este negativă, iar suma oricăror q consecutivi este pozitivă, este $p + q - d - 1$, unde d este cel mai mare divizor comun al lui p și q.

Se vede cum și punctele b) și b′) ale soluției se bazează pe aceeași idee ca partea a doua a soluției precedente, însă sînt redactate pentru p, q oarecare, ceea ce, ca și în cazul punctului a), a necesitat un efort deloc de neglijat.

Autorul acestei generalizări și soluții este John Rickard din Anglia (GB7). El nu s-a mulțumit însă cu această depășire a cerințelor, ci a obținut încă un premiu special pentru următoarea.

Generalizare și soluție a problemei 3(10-NL, vezi 7.2), *distinsă cu premiu special.* a) Generalizarea constă în următoarele. Se consideră grupul multiplicativ G al tuturor claselor de resturi k modulo n, prime cu n. Verificarea faptului că G este grup, în afara a două momente evidente, trece prin existența întregilor u, v, cu $ku + nv = 1$, deci cu $ku \equiv 1 \pmod{n}$.

Se consideră apoi un subgrup H al lui G, diferit de G. Existența unui astfel de subgrup reclamă $n \geqslant 3$ (pentru $n = 2$ grupul G se reduce la elementul unitate). Notînd elementele din H prin numerele corespunzătoare din $\{1, 2, \ldots, n - 1\}$, se consideră, în loc de V_n, mulțimea $W_n = \{kn + r | k = 1, 2, \ldots, r \in H\}$ și se definește indecompozabilitatea unui $x \in W_n$ în W_n prin inexistența unor $y, z \in W_n$ cu $yz = x$.

Se afirmă că enunțul problemei rămîne valabil și pentru W_n.

Pentru $H = \{1\}$ avem $W_n = V_n$ și se obține exact afirmația din problema *3* (10-NL, vezi 7.2).

b) Metoda de demonstrare a afirmației de la a) este următoarea. Se consideră două numere prime distincte p și q, congruente modulo n,

dar necongruente modulo n cu nici un $r \in H$. Nici unul din acestea nu va divide n; de exemplu, dacă p ar divide n, ar urma $q = p + un$ şi s-ar divide şi el la p etc. Să presupunem că $p < q$.

Se consideră întregul pozitiv k minim pentru care $p^k \in W_n$ [în soluţia a doua a acestei probleme, prezentată în 7.3, s-a văzut că există un astfel de k cu $p^k \equiv 1 \pmod n$ etc.]. Rezultă $k \geqslant 2$.

Se consideră descompunerile $(p^k)(q^k) = (p^{k-1}q)(pq^{k-1})$. Cele patru numere din paranteze sînt în W_n, deoarece acestea dau aceleaşi resturi ca şi p^k la împărţirea cu n şi sînt mai mari decît p^k. (Atenţie ! Avem $n + 1 \in W_n$, dar $1 \notin W_n$ ...). Pe de altă parte, p^k este indecompozabil în W_n conform definiţiei lui k, nu divide nici unul din celelalte trei numere, deoarece $k \geqslant 2$, deci, descompunînd acele trei numere în factori ireductibili în W_n, vom obţine în egalitatea de mai sus două descompuneri diferite în cei doi membri, deoarece factorul p^k nu va apărea în dreapta. Acestea vor fi cele două descompuneri cerute.

c) A rămas de demonstrat posibilitatea de a găsi numerele prime p şi q cu proprietăţile de la b). Printr-un raţionament la fel cu cel din soluţia problemei 11-GB de la Olimpiada a 17-a (vezi 5.5), aceasta va rezulta din:

Lemă. *Mulţimea M a tuturor numerelor prime ce nu divid pe n şi care prin împărţire cu n dau resturi ce nu aparţin lui H (numere prime ce nu aparţin deci lui W_n) este infinită.*

Demonstraţia acestei leme utilizează esenţial faptul că H este subgrup şi că $H \neq G$, neutilizate pînă acum.

Să demonstrăm întîi că $M \neq \emptyset$. Să alegem în acest scop un element $k \in G \setminus H$, interpretat ca număr întreg pozitiv $\leqslant n - 1$. Acest număr este prim cu n, deci nici un divizor prim al său nu divide pe n. Dacă toţi divizorii primi ai lui k ar fi în H, atunci şi produsul lor k ar fi în H, deoarece H este grup. Dar am presupus $k \notin H$, deci va exista un divizor prim p al lui k pentru care $p \notin H$. Acest număr prim p este în M.

Să presupunem acum că $M = \{p_1, \ldots, p_s\}$ şi să obţinem o contradicţie. Metoda ce începe cu considerarea lui $p_1 \ldots p_s + 1$ pare să eşueze. Apare ideea de a considera $p_1 \ldots p_s + n$.

Divizorii primi ai acestui număr nu divid pe n, deoarece ar divide şi pe $p_1 \ldots p_s$, iar printre $p_1, \ldots, p_s$ nu există divizori ai lui n. De asemenea, nici unul dintre numerele prime $p_1, \ldots, p_s$ nu este divizor al lui $p_1 \ldots p_s + n$, deoarece în acest caz ar trebui să-l dividă şi pe n.

Fiindcă $M = \{p_1, \ldots, p_s\}$, rezultă că orice divizor prim al lui $p_1 \ldots p_s + n$ va da prin împărţire cu n un rest în H. Produsul lor $p_1 \ldots p_s + n$ va avea aceeaşi proprietate, H fiind grup. Deci restul u al împărţirii lui $p_1 \ldots p_s$ cu n va fi în H.

Aceasta nu constituie însă o contradicție ! O altă idee deblochează cursul demonstrației. Anume, se consideră $p_1^2p_2 \ldots p_s + n$, se reface raționamentul precedent și se ajunge la concluzia că restul v al împărțirii lui $p_1^2p_2 \ldots p_s$ cu n va fi în H.

Nici aceasta nu este însă imposibil. Ceea ce încheie însă demonstrația, constituind contradicția necesară, este observația că este imposibil ca u și v să fie ambii în H. Într-adevăr, avem $v \equiv up_1$ (mod$n$), fapt ce se poate exprima și sub forma $v = uw$ în G, unde w este restul împărțirii lui p_1 la n (w este în G, deoarece p_1 este prim cu n). G este grup și deducem $w = u^{-1}v$, care ar fi în H, dacă u și v ar fi ambele în subgrupul H. Însă $p_1 \in M$ și deci $w \notin H$.

Cu aceasta afirmația de la a), adică existența unui element din W_n, care să aibă două descompuneri diferite (nu numai prin ordinea factorilor) în produs de elemente ireductibile în W_n, a fost complet dovedită.

Autorul celor două soluții prezentate înainte a apărut drept cel mai bun exemplu, de la Olimpiadele descrise în această carte, de îmbinare a ingeniozității în rezolvarea de probleme elementare, cu o cultură și o experiență matematică dincolo de limitele programelor școlare.

Discuțiile din 3.12 și 4.6 au abordat o astfel de problemă și soluțiile descrise anterior reprezintă o bună continuare a lor, chiar dacă nu în legătură tot cu analiza matematică.

Au mai fost acordate trei premii speciale pentru următoarele trei soluții ale problemei *3* (10-NL, vezi 7.2).

Soluție a problemei 3 (10-NL, vezi 7.2), *distinsă cu premiu special.* a) Ideea este de a considera două numere a și b, indecompozabile în V_n, prime între ele, dar nici unul din acestea nefiind prim, astfel încît să aibă respectiv ca factori primi p și q, congruenți modulo n, adică $a = pc$, $b = qd$. Din $a \equiv b \equiv 1 \pmod{n}$ și $p \equiv q \pmod{n}$ va rezulta $c \equiv d \pmod{n}$ și apoi $pd \equiv qc \equiv 1 \pmod{n}$, adică pd, $qc \in V_n$. În plus $c, d > 1$.

Vom considera apoi egalitatea $a \cdot b = (pd)(qc)$ și în aceasta vom descompune pd și qc în factori indecompozabili în V_n.

Factorul a, indecompozabil în V_n, nu va apărea în membrul drept, deci cele două descompuneri obținute vor satisface condițiile din enunț, rezolvînd problema. Într-adevăr, dacă $a = pc$ ar divide pd, ar urma că c divide d, deci că c divide și pe $a = pc$ și pe $b = qd$, incompatibil cu $c > 1$ și cu a, b prime între ele. Dacă $a = pc$ ar divide pe qc, ar urma că p divide pe q, deci că p divide și pe $a = pc$ și pe $b = qd$, incompatibil cu a, b prime între ele.

b) Rămîne de arătat cum se pot găsi a, b cu proprietăţile de la a). Această alegere va fi posibilă, dacă vom pune în evidenţă un şir a_k, $k = 1, 2, \ldots$, de elemente indecompozabile în V_n, prime între ele două cîte două, nici unul dintre acestea nefiind prim.

Într-adevăr, vom scrie $a_k = p_k c_k$, cu p_k primi. Conform raţionamentului din soluţia problemei 11-GB de la Olimpiada a 17-a (vezi 5.5), citat deja în soluţia precedentă, vom putea găsi $i \neq j$ cu $p_i \equiv p_j \pmod n$, deci $a = a_i$ şi $b = a_j$ sînt în situaţia de la a).

c) Şirul (a_k) cu proprietăţile de la b) se obţine astfel. Se consideră numere y_k, $k = 1, 2, \ldots$, în V_n, prime între ele două cîte două, fiecare avînd cel puţin un divizor prim $p_k \notin V_n$. Se descompun y_k în factori indecompozabili în V_n şi se consideră factorul a_k din descompunerea lui y_k ce se divide la p_k.

Un divizor comun al lui a_i, a_j cu $i \neq j$ ar fi divizor comun şi al lui y_i, y_j, deci a_i, a_j sînt prime între ele. Nici un a_i nu este prim, deoarece ar trebui în acest caz să coincidă cu $p_i \notin V_n$, contrar lui $a_i \in V_n$.

d) La rîndul lor, numerele y_k cu proprietăţile de la c) se obţin astfel. Se consideră un şir z_k, $k = 1, 2, \ldots$, de numere de forma $nd_k - 1$, cu $d_k \geqslant 1$, prime între ele două cîte două. Se definesc $y_k = z_{2k-1} z_{2k}$.

Cum $z_i \equiv -1 \pmod n$, rezultă $y_k \equiv 1 \pmod n$, deci $y_k \in V_n$. Orice z_i are cel puţin un divizor prim ce nu este în V_n, altfel z_i, ca produs al acestor divizori, ar fi în V_n, contrar lui $z_i \equiv -1 \pmod n$. Deci şi orice y_k are cel puţin un divizor prim ce nu este în V_n. Faptul că y_k sînt prime între ele două cîte două este evident.

e) În fine, să arătăm cum se construiesc z_k de la d). Se consideră $z_1 = n - 1$ şi apoi, prin recurenţă,

$$z_{2k} = n + \prod_{i=1}^{2k-1} z_i, \quad z_{2k+1} = n + z_1 \prod_{i=1}^{2k} z_i.$$

Se demonstrează cu uşurinţă, prin inducţie, că $z_i \equiv -1 \pmod n$; factorul z_1 din a doua formulă a fost pus tocmai pentru a face posibilă această inducţie.

Să presupunem acum că z_i şi z_j, cu $i < j$, ar avea un factor comun u. Din formula de recurenţă pentru z_j rezultă că u ar divide şi pe n, iar din formula de recurenţă pentru z_i rezultă existenţa unui $k < i$, dacă $i > 1$, pentru care u divide pe z_k. Deci indicele minim k pentru care u divide z_k este $k = 1$. Am obţinut faptul că u divide şi n şi $z_1 = n - 1$, deci u divide $n - (n - 1) = 1$; cu aceasta am dovedit că z_i, z_j, cu $i \neq j$, sînt prime între ele, încheind rezolvarea problemei.

Altă soluție a problemei 3 (10-NL, vezi 7.2) *distinsă cu premiu special.* Se consideră un număr prim p, ce nu divide n, așa încît $p \notin V_n$; de exemplu, un divizor prim p al lui $n - 1$.

Se consideră întregul pozitiv minim k pentru care $p^k \in V_n$ (vezi a doua soluție a acestei probleme din 7.3). Cum $k \geq 2$, se scrie $k = a + b$, cu $a, b \geq 1$ întregi. Deci p^{a+b} este indecompozabil în V_n.

Se scrie $p^{a+b}((p^a + n)(p^b + n)) = (p^a(p^b + n))(p^b(p^a + n))$. Numerele $(p^a + n)(p^b + n)$, $p^a(p^b + n)$, $p^b(p^a + n)$ diferă de $p^{a+b} \in V_n$ prin multipli de n, deci sînt în V_n.

Cum p nu divide n, exponenții cu care acest număr prim intră în descompunerile în factori primi ale celor trei numere sînt, respectiv, 0, a și b, deci nici unul din ele nu se divide la p^{a+b}.

Dacă în egalitatea precedentă se descompun cele trei numere în factori indecompozabili în V_n, se obține o relație ce rezolvă problema, deoarece factorul, indecompozabil în V_n, p^{a+b} ce apare în membrul stîng nu va apărea în cel drept.

A treia soluție a problemei 3 (10-NL, vezi 7.2) *distinsă cu premiu special.* Se aleg p și $k \geq 2$ ca în soluția precedentă: p prim, $p^k \in V_n$, $p^r \notin V_n$ pentru $1 \leq r \leq k - 1$. Deci p^k este indecompozabil în V_n.

Se consideră $a = p^k + np^{k-1}$, care este în V_n, dar nu se divide cu p^k, numărul prim p nedivizînd pe n. Și $u = a^k$ este în V_n; descompunînd fiecare din cei k factori a în factori indecompozabili în V_n, se obține o astfel de descompunere a lui u, în care nu apare p^k. Dar $u = (p^k)^{k-1}(p + n)^k$, $(p + n)^k \equiv p^k \pmod n$, deci $(p + n)^k \in V_n$ ca urmare a faptului că $p^k \in V_n$. Descompunînd $(p + n)^k$ în factori indecompozabili în V_n, se obține din egalitatea precedentă o astfel de descompunere a lui u, în care apare p^k (de $k - 1 \geq 1$ ori), deci care nu coincide cu cea obținută înainte.

Deși ultimele două soluții sînt mai scurte, coordonatorii și juriul au apreciat bogăția de fapte puse în evidență de celelalte două. Putem spune că această problemă a determinat pe mulți concurenți să efectueze o cercetare a proprietăților lui V_n legate de descompunerile în produs de factori indecompozabili în V_n. O serie de astfel de proprietăți au apărut de mai multe ori în soluțiile prezentate: „produsul a două numere din V_n este în V_n", „dacă $a \equiv b \pmod n$, $a > b$ și $b \in V_n$, atunci $a \in V_n$", precum și „orice număr din V_n se poate scrie ca un produs de numere indecompozabile în V_n", a cărei demonstrație riguroasă se face la fel ca și cea a existenței unei descompuneri în factori primi pentru orice număr natural ≥ 2.

După cum am menţionat la 7.3, concurenţii au găsit multe soluţii, diferite într-o măsură mai mare sau mai mică de la caz la caz, pentru problema *6* (1-BG, vezi 7.2). Cea mai simplă a fost următoarea.

Soluţie a problemei 6 (1-BG, vezi 7.2). Din $f(n+1)>f(f(n))$ se vede că $\min\{f(n)|n\geq 1\}$ se poate realiza numai pentru $n=1$ (nu pentru un n de forma $m+1$). Deci pentru $n\geq 2$ avem $f(1)<f(n)$, în particular $f(n)\geq 2$.

Restricţia lui f la $\{2, 3, \ldots\}$ duce deci această mulţime tot în $\{2, 3, \ldots\}$ şi are proprietăţile din enunţ. Rezultă că pentru $n\geq 3$ avem $f(2)<f(n)$ şi $f(n)\geq 3$.

Continuînd, se obţine $f(1)<f(2)<\ldots<f(n)<\ldots$ (riguros — prin inducţie, considerînd restricţia lui f la $\{n, n+1, \ldots\}$ în efectuarea pasului), deci $f(n)\geq n$. Din relaţia din enunţ obţinem însă $n+1>$ $>f(n)$, de unde $f(n)=n$ este imediat.

Din păcate, modurile în care cei doi concurenţi ce au avut această idee au redactat soluţiile acestei probleme nu au permis nici coordonatorilor şi nici juriului, pus în faţa acestei situaţii, să le acorde decît cîte 4 puncte din cele 8 posibile.

Nefiind în poziţia (vezi 3.11) de a acorda un premiu special pentru această rezolvare, juriul a decis să nu acorde alt premiu special la această problemă.

7.6. Rezultate, premii

Tabelele de rezultate, extrase din documentele Olimpiadei a 19-a, analoage celor de la Olimpiada a 18-a prezentate în 6.5 şi 6.6, sînt date în fig. 99 şi fig. 100.

a Problemă	*1* (12-NL)	*2* (15-VN)	*3* (10-NL)	*4* (7-GB)	*5* (3-DE)	*6* (1-BG)
b Punctaj	6	6	7	6	7	8
c Punctaj total obţinut de concurenţi	770	360	386	357	456	393
c/b	128	60	55	59	65	49

Fig. 99

Modul de comentare a unui astfel de tabel s-a indicat în 6.5. La o eventuală comparare cu cel de la Olimpiada a 18-a, trebuie ţinut seama că aici au fost 155, iar acolo 139 concurenţi.

$\frac{40}{5}$ (5)	$\frac{39}{1}$ (6)	$\frac{38}{-}$	$\frac{37}{-}$	$\frac{36}{2}$ (8)	$\frac{35}{1}$ (9)	$\frac{34}{4}$ (13)	$\frac{33}{3}$ (16)	$\frac{32}{-}$	$\frac{31}{2}$ (18)	$\frac{30}{3}$ (21)
$\frac{29}{3}$ (24)	$\frac{28}{2}$ (26)	$\frac{27}{2}$ (28)	$\frac{26}{6}$ (34)	$\frac{25}{1}$ (35)	$\frac{24}{7}$ (42)	$\frac{23}{2}$ (44)	$\frac{22}{5}$ (49)	$\frac{21}{11}$ (60)	$\frac{20}{4}$ (64)	$\frac{19}{5}$ (69)
$\frac{18}{3}$ (72)	$\frac{17}{5}$ (77)	$\frac{16}{7}$ (84)	$\frac{15}{3}$ (87)	$\frac{14}{9}$ (96)	$\frac{13}{8}$	$\frac{12}{9}$	$\frac{11}{1}$	$\frac{10}{4}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{8}{5}$
$\frac{7}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{0}{1}$			

Fig. 100

Indicațiile regulamentului, anume de a plasa coloanele barieră între premii la numerele în paranteze $155/12 = 12, \ldots, 155/4 = 38, \ldots, 155/2 = 77, \ldots$ (vezi 4.5 și eventual 6.6), au fost urmate întocmai. S-au acordat 13 premii 1 cu punctaje între 34—40, 29 premii 2 cu punctaje între 24—33 și 33 premii 3 cu punctaje între 17—23.

Este interesant de văzut, pe baza documentelor Olimpiadei, rezultatele celor ce au obținut premii speciale (vezi 7.5) : Martin Čadek — 19 puncte (premiul 3), cei trei concurenți ce au obținut premii speciale pentru cele trei soluții la problema *3* — respectiv 31, 29 (premii 2) și 10 puncte ! John Rickard a obținut premiul 1 cu 40 puncte. El obținuse premiul 1 și la Olimpiada a 17-a (40 puncte) și la Olimpiada a 18-a (35 puncte) și fusese singurul concurent distins cu un premiu special la Olimpiada a 18-a (vezi 6.5).

8

ORGANIZAREA CELEI DE A 20-A OLIMPIADE INTERNAȚIONALE DE MATEMATICĂ

8.1. Aspecte ce nu depind numai de conducerea juriului

În anul 1978, cea de a 20-a Olimpiadă Internațională (ediție jubiliară) urma să fie organizată de România. Vom prezenta diferite probleme ale unei astfel de organizări din punctul de vedere al conducerii juriului. Cu această ocazie vom completa și descrierea din capitolul 2 a modului de desfășurare a unei Olimpiade Internaționale de Matematică.

În acest capitol ne vom concentra atenția asupra problemelor ce nu pot fi rezolvate numai de conducerea juriului, probleme ce necesită intervenții și decizii ale unor foruri superioare. Acestea pot fi grupate astfel.

a) Trimiterea de invitații oficiale de participare. În toate cazurile de pînă acum, orice țară care a participat la ultimele Olimpiade a fost invitată. În cazul de față, aceasta determina invitarea celor 21 țări ce participaseră la Olimpiada a 19-a (vezi 7.1), a Braziliei ce trimisese un observator la acea Olimpiadă, precum și a Vietnamului și a Greciei, țări ce obișnuiau să participe la Olimpiadă, deci 23 de invitații, țara noastră nemaitrebuind inclusă. Pe lîngă acestea, la fiecare Olimpiadă se lua inițiativa să se mai invite și alte țări, componentă a politicii culturale externe.

b) Întocmirea programului de desfășurare al Olimpiadei. Lectura capitolului 2 al acestei cărți, ca și a pasajelor corespunzătoare din cele următoare (3 la 7), face clare principiile de întocmire a unui astfel de program. La ultimele Olimpiade programele au fost foarte asemănătoare. Prezentăm deci ca model schița programului Olimpiadei a 19-a, la care la Belgrad a avut loc concursul și au fost cazați

concurenţii, iar la Arandjelovac (circa 80 km de Belgrad) a fost cazat juriul şi au avut loc lucrările sale.

Program al desfăşurării Olimpiadei a 19-a (schiţă)

1.7.1977. Sosirea la Belgrad a şefilor de delegaţii. Deplasarea lor la Arandjelovac.

2.7.1977. Înmînarea listelor cu cele 16 probleme propuse juriului de comitetul de organizare şi cu soluţiile lor, fiecărui şef de delegaţie.
Orele 9.15—12.00 şi 15—18. Simpozionul „Matematica şi tineretul" (vezi 7.1).

3.7.1977. Orele 8.30—12.00 şi 16—19. Şedinţe ale juriului.

4.7.1977. Orele 8.30—12.00 şi 16—19. Şedinţe ale juriului (încheierea alegerii problemelor de concurs, stabilirea ordinii lor şi a punctajelor, redactare în limbile oficiale).
Sosirea la Belgrad a concurenţilor şi la Arandjelovac a secunzilor delegaţiilor.

5.7.1977. Orele 8.30—12.30. Traducerea problemelor de concurs în limbile tuturor delegaţiilor. Dactilografierea listelor respective de şefii sau secunzii delegaţiilor.
Urma multiplicarea, introducerea în plicuri (cîte un plic pentru fiecare concurent în fiecare zi de concurs).

6.7.1977. Orele 6.30—8.30. Călătoria juriului de la Arandjelovac la Belgrad.
Orele 8.30—9.00. Festivitatea de deschidere a Olimpiadei.
Orele 9.00—9.30. Răspunsuri la întrebări ale concurenţilor (vezi detalii în 5.1).
Orele 9.00—13.00. Concurs (prima zi).
Orele 16—17. Şedinţă a juriului cu coordonatorii (la Arandjelovac).
Orele 17. Transmiterea lucrărilor din prima zi, ale concurenţilor, delegaţiilor ţărilor respective.

7.7.1977. Orele 6.30—8.30. Călătoria juriului de la Arandjelovac la Belgrad.
Orele 8.30—12.30. Concurs (a doua zi).
Orele 8.30—9.00. Răspunsuri la întrebări ale concurenţilor (vezi 5.1).
Orele 9.30. Întoarcerea juriului la Arandjelovac. Apoi corectare şi coordonare; sosirea lucrărilor din ziua a doua.

8—9.7.1977. Corectare şi coordonare.

10.7.1977. Orele 8—10. Şedinţa finală a juriului.
Orele 11. Plecarea juriului la Belgrad.
Orele 16—19. Simpozionul „Matematica şi tineretul", partea a doua, în care s-au prezentat soluţiile distinse cu premii speciale (orele 9—12 începutul acestui simpozion, în care concurenţii au prezentat comunicări de matematică).

11.7.1977. Excursie.

12.7.1977. Orele 18—20. Ceremonia de închidere a Olimpiadei şi de împărţire a premiilor.

13.7.1977. Plecarea delegaţiilor în ţările lor.

Iată şi organizarea coordonării.

Ziua	Orele	Problemă 1	2	3	4	5	6
7.7. 1977	14–15	NL	RO	AT			
	15–16	SE	BG	DE			
	16–17	FI	CS	DD			
	17–18	US	MN	HU			
	18–19	BE	PL	CU			
	20–21	DZ	SU	GB			
	21–22	FR	AT	IT			
8.7.1977	8–9	RO	DE	NL	MN	CU	BE
	9–10	BG	DD	SE	PL	GB	DZ
	10–11	CS	HU	FI	SU	IT	FR
	11–12	MN	CU	US	AT	NL	RO
	12–13	PL	GB	BE	DE	SE	BG
	15–16	SU	IT	DZ	DD	FI	CS
	16–17		NL	FR	HU	US	MN
	17–18		SE	RO	CU	BE	PL
	18–19		FI	BG	GB	DZ	SU
	19–20		US	CS	IT	FR	AT
9.7.1977	8–9		BE	MN	NL	RO	DE
	9–10		DZ	PL	SE	BG	DD
	10–11		FR	SU	FI	CS	HU
	11–12	AT			US	MN	CU
	12–13	DE			BE	PL	GB
	15–16	DD			DZ	SU	IT
	16–17	HU			FR	AT	NL
	17–18	CU			RO	DE	SE
	18–19	GB			GB	DD	FI
	19–20	IT			CS	HU	US

Un astfel de program face posibilă îndeplinirea în bune condiţii, în special în ceea ce priveşte timpul avut la dispoziţie, a tuturor sarcinilor ce revin juriului.

c) Alegerea locului de desfăşurare a lucrărilor juriului. Cazarea membrilor juriului în condiţii de confort care să le permită să participe cu punctualitate la program, care apare destul de încărcat.

d) Asigurarea cu exactitatea necesară a transporturilor din program (în cazul celui prezentat la b), în special a celor din zilele de 6.7 şi 7.7). Punerea la dispoziţia conducerii juriului a unui aparat de multiplicat şi a unui număr de persoane, care să se ocupe de multiplicarea materialelor necesare (pe lîngă cele menţionate în zilele de 2.7 şi 5.7 ale programului de la b), listele cu programul de coordonare, cu rezultate, cu premianţii etc.).

e) Punerea la dispoziţia membrilor juriului a unui număr de maşini de scris, în număr de cel puţin jumătate din numărul delegaţiilor participante, în ziua ce corespunde lui 5.7 din programul de la

b); una sau două din aceste mașini să fie cu litere chirilice (utilizate de SU, BG, MN).

f) Pregătirea foilor de hîrtie cu antetul Olimpiadei pe care concurenții își vor redacta lucrările, a dosarelor corespunzătoare și transportul lucrărilor la locul unde se află juriul.

g) Mobilizarea numărului corespunzător de însoțitori permanenți ai grupurilor de concurenți, cîte unul pentru fiecare țară, cunoscător al limbii respective.

h) Mobilizarea celor 18 coordonatori, matematicieni de înaltă ținută, cunoscători ai principiilor Olimpiadei, care să lucreze în zilele respective (6—10.7 din programul de la b) și chiar să participe la ședințele juriului în care se aleg problemele.

Cheltuielile de organizare ale Olimpiadei cresc o dată cu creșterea numărului de țări participante, o dată cu creșterea duratei ei și o dată cu creșterea numărului de persoane din țara organizatoare antrenate în lucrările ei. De aceea, trebuiau pregătite răspunsuri la o serie de întrebări în legătură cu problemele enumerate, întrebări ce puteau fi puse de organele corespunzătoare de decizie. Majoritatea acestor întrebări se referă la trăsături specifice Olimpiadei Internaționale, ce o deosebesc de un congres, de un concurs de admitere, de o Olimpiadă Națională de Matematică. Cele mai importante s-au dovedit următoarele.

1. De ce este necesară o zi la început (2.7 în cazul programului de la b) între înmînarea listelor de probleme șefilor de delegații și începerea lucrărilor juriului? Simpozionul respectiv, care nici nu apare ca onecesitate, nu poate fi plasat într-unul din „locurile mai libere"?

2. De ce un juriu de circa 20 de persoane are nevoie de patru zile (2.7 — 5.7 în programul de la b)) pentru a compune și redacta șase probleme, în timp ce experiența unor concursuri interne arată că aceasta se poate realiza, de 2—3 persoane, în două ore, chiar în dimineața concursului?

3. De ce pentru notarea a 2×8 lucrări o delegație de doi membri are nevoie de trei zile (de la 7.7 la 10.7 în programul de la b)), în timp ce experiența unor concursuri interne arată că o persoană poate corecta și nota într-o zi chiar cîteva zeci de lucrări?

4. De ce este nevoie de cei 18 coordonatori, matematicieni de cea mai înaltă calificare, care trebuie scoși de la locurile lor de muncă (vezi h))?

5. De ce supravegherea permanentă a concurenților nu poate fi încredințată secunzilor delegațiilor și toată răspunderea trebuie să rămînă pe seama însoțitorilor din țara gazdă (vezi g))?

6. De ce trebuie ca juriul să lucreze departe de locul desfășurării concursului și de ce trebuie el adus și dus înapoi în fiecare din cele două zile (vezi b) și d))?

Răspunsurile la aceste întrebări rezultă din conținutul acestei cărți (capitolele 2—7) și nu le vom repeta.

Ministerul Educației și Învățămîntului a sprijinit fără rezerve Olimpiada. La inițiativa acestuia s-a organizat o discuție preliminară, discuție în care toate problemele puse mai înainte s-au prezentat și s-au clarificat. Președinte al juriului Olimpiadei a 20-a a fost desemnat șeful delegației noastre la Olimpiadele 15—19, care a expus în detaliu la această discuție aspecte concrete legate de desfășurarea Olimpiadei Internaționale de Matematică.

Ca urmare a sprijinului primit, conducerea juriului a fost degajată de problemele ce nu le putea ea rezolva și a avut condiții optime pentru îndeplinirea misiunii sale.

8.2. Modul în care ajunge o țară să participe la Olimpiada Internațională de Matematică

Ne referim, evident, la una ce nu figurează printre primele opt, enumerate la 2.5. Dacă o țară dorește să participe, dar nu a fost invitată niciodată, atunci aceasta va trimite, pe cheltuiala ei, un observator la una din Olimpiade, care va face cunoscută intenția de a participa. În mod normal, ea va fi invitată la Olimpiada următoare, și, dacă va lua parte, va ajunge să se numere printre participanții permanenți la Olimpiada Internațională de Matematică. Evident că între trimiterea unui observator și participare, țara respectivă poate lăsa să treacă și mai mult de un an, păstrînd însă în acest timp contactul cu Olimpiada.

Se poate însă întîmpla ca o țară să fie invitată de comitetul de organizare a unei Olimpiade fără ca aceasta să se aștepte. În acest caz sau acceptă invitația, sau începe prin a trimite numai un observator etc., faptele petrecîndu-se apoi la fel ca în cazul precedent. Dacă nu răspunde în nici un fel, este posibil să nu mai fie invitată anul următor.

Evident că decizia de a participa depinde și de existența în țara respectivă a unei Olimpiade Naționale de Matematică sau a altui mijloc de selecție, de gradul de pregătire pentru Olimpiada Internațională de Matematică a elevilor ei, precum și de alte circumstanțe.

În documentele unei Olimpiade nu se consemnează însă decît țările participante și observatorii.

La o Olimpiadă pot participa ca observatori și reprezentanți ai unor țări ce dintr-un motiv sau altul nu au putut participa, ca

excepție, în acel an, reprezentanți ai unor viitoare țări organizatoare, ai unor reviste de matematică etc. Pînă la momentul la care ne referim numărul acestor observatori a fost întotdeauna foarte mic.

8.3. Coordonatorii

Alegerea echipelor de coordonatori este poate una din sarcinile cele mai de răspundere ale conducerii juriului. În legătură cu aceasta, vom aprofunda unele aspecte ale activității de coordonare (vezi 2.1 — 2.3).

Fiecare punct contează la coordonare! Modul de stabilire al premiilor, prezentat în detaliu în 3.11, 4.5, 6.6 și 7.6, arată că un punct în plus sau în minus poate deplasa un concurent dintr-una din zonele premiilor 1, 2, 3, sau a celei fără premii, în cea vecină. Mai mult, barierele între premii nu se știu dinainte, ci se stabilesc în funcție de toate rezultatele. În clasamentul pe țări, fie acesta și neoficial, un punct în plus sau în minus, chiar al unui concurent cu rezultate modeste, poate urca sau coborî țara acestuia.

Prin aceasta, coordonarea se deosebește de majoritatea activităților de notare a unor lucrări de matematică de acest tip. Nici un detaliu nu poate fi neglijat aici.

Decizia asupra notării, ce apare în urma unui dialog între o comisie de coordonare (la una din probleme) și o delegație este practic definitivă. Coordonatorii pot amîna această decizie, dar aceasta este rațional numai în cazul unor lucrări cu conținut neobișnuit, ce apar a începutul coordonării. Această decizie, pe de altă parte, poate fi lăsată pe seama juriului, dar și aceasta este rațional numai în cazul unor contradicții de principiu între coordonatori și delegația respectivă. Într-o ședință (cea finală) de circa două ore juriul nu se poate substitui unei comisii de coordonare. Lungirea programului Olimpiadei înseamnă în primul rînd cheltuieli, pentru a nu vorbi de riscul de a deteriora atmosfera de colaborare mereu prezentă, de aceea recitiri, comparări de lucrări sau contestații sînt de neconceput.

Nu se poate ști niciodată dinainte ce surprize poate oferi coordonarea unei probleme. Porțiunile corespunzătoare din capitolele 3—7 prezintă numeroase exemple în acest sens.

Coordonarea, stabilind rezultate ale concursului, apare drept partea cea mai delicată a unei Olimpiade Internaționale de Matematică. Putem spune chiar că fără coordonatori buni organizarea unei astfel de Olimpiade apare ca o aventură.

Calităţile necesare unui coordonator s-ar putea sintetiza în: competenţă, manifestată printr-o înţelegere rapidă şi sigură a tot ce este bun şi ce nu într-o lucrare, precizie în acţiune (valabilitatea argumentului „aşa s-a procedat pînă acum în toate cazurile similare", deosebit de puternic în controversele cu delegaţiile sau cu juriul, nu trebuie compromisă nici în cea mai mică măsură), rezistenţă şi constanţă (la Olimpiada a 19-a fuseseră 155 de concurenţi!), fermitate (indulgenţa faţă de un concurent poate însemna foarte uşor nedreptăţirea altuia) şi în acelaşi timp tact (se discută cu reprezentanţi oficiali ai unei alte ţări).

O echipă de coordonare, care urmăreşte rezolvările date de toţi concurenţii prezenţi la Olimpiadă (cu excepţia celor ai ţării gazdă, vezi 2.1) la una din problemele de concurs, este formată în principiu din trei persoane. Aceasta corespunde la necesitatea de a putea discuta în oricare din cele patru limbi oficiale, dar micşorează şi riscul unor greşeli în oricare din sensurile discutate. Nu trebuie uitat că fiecare din cele şase echipe de coordonatori lucrează separat cu cîte o delegaţie, nu în plenul juriului.

Coordonatori „de meserie" nu există. În fiecare an doar două persoane dintr-o ţară participă, la Olimpiada Internaţională, la coordonare, iar, de exemplu, ţara noastră organizase ultima dată această Olimpiadă în 1969, deci cu 9 ani în urmă. Cu atît mai puţin o persoană poate fi instruită în grabă şi pusă pe post de coordonator.

Un viitor coordonator trebuie să fie anunţat din timp pentru a-şi putea mobiliza toate resursele de care dispune în vederea acestei activităţi.

Ministerul Educaţiei şi Învăţămîntului a antrenat în această acţiune numai persoane cu multă competenţă matematică, bune cunoscătoare a spiritului Olimpiadelor de Matematică: cadre didactice universitare, cercetători, tineri profesori, foşti participanţi la Olimpiada Internaţională etc.

Olimpiada Internaţională este un loc unde se adună şi se rezolvă cele mai frumoase probleme de matematică de nivel şcolar. Dar aceasta este şi cea mai înaltă şcoală de apreciere şi notare a unor lucrări de matematică, de concurs, la acest nivel.

8.4. Problemele primite de comitetul de organizare de la delegaţiile participante

După cum am menţionat în 2.1, prima misiune a conducerii juriului este de a studia problemele trimise comitetului de organizare, cu circa două luni înainte, de delegaţiile ce urmează să participe la

Olimpiadă, şi de a alege din acestea un număr de circa 16, pe care să le înmîneze împreună cu soluţiile lor membrilor juriului, dintre care acesta să se fixeze la cele şase de concurs.

Spre deosebire de condiţiile în care lucrează în timpul Olimpiadei, preşedintele juriului (ca şi toţi ceilalţi participanţi de altfel) are o activitate permanentă în ţara sa, prin care intră în contact cu multe persoane din lumea matematică. El este de multe ori antrenat şi în acţiuni legate de pregătirea şi selectarea lotului ţării sale pentru Olimpiadă.

Din descrierile Olimpiadelor precedente se poate forma o idee asupra bogăţiei de fapte matematice conţinute într-o listă de probleme, cu soluţiile lor, propusă unui juriu. Dar într-o întreagă colecţie de probleme primite de un comitet de organizare! A avea aşa ceva în minte înseamnă practic absenţa altor preocupări, discuţia cu orice persoană cu care s-ar intra în contact îndreptîndu-se inevitabil către conţinutul acelor probleme. Desconspirarea lor, într-o măsură oricît de mică, ar conduce la un eşec total al Olimpiadei ce se organizează. De aceea, preşedintele juriului a deschis plicul cu toate scrisorile conţinînd probleme, păstrat într-o casă de fier la Ministerul Educaţiei şi Învăţămîntului, numai după ce a întrerupt definitiv, pînă la Olimpiadă, orice fir de legătură cu cei faţă de care acestea nu trebuiau dezvăluite.

Această situaţie este încă un argument în favoarea măsurilor de securitate ce se iau în cursul desfăşurării Olimpiadelor Internaţionale, măsuri indicate în special în 4.1 şi 5.1.

După numărul de invitaţii trimise nu era exclus ca plicul să conţină $23 \cdot 5 = 115$ probleme. Însă numai 13 ţări, anume BG, CS, CU, DE, FI, FR, GB, NL, SE, TR, US, VN, YU trimiseseră probleme, nu toate cîte 5, Statele Unite (US) — 6; în total 54 probleme. După cum am menţionat însă la 2.1, netrimiterea de astfel de probleme nu însemna încă neparticiparea ţărilor respective.

Iată enunţurile tuturor acestor probleme.

BG1. *Mulţimea* $M = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ *este reprezentată ca o reuniune disjunctă de* k *mulţimi* $M_1, \ldots, M_k$, *unde* $n \geqslant k^3 + k$. *Să se demonstreze că există* $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, *nesxcluzîndu-se situaţia* $i = j$, *şi* $k + 1$ *numere pare, distincte două cîte două,* $2r_1, \ldots, 2r_{k+1} \in M_i$ *astfel ca* $2r_1 - 1, \ldots, 2r_{k+1} - 1 \in M_j$.

BG2. *Dacă* $(1x + 2x^2 + \ldots + nx^n)^2 = a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$ $\ldots + a_{2n} x^{2n}$, *să se demonstreze că* $a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{2n} = C^2_{n+1}(5n^2 +$ $+ 5n + 2)/12$.

BG3. *Să se determine toate numerele a pentru care ecuația* $x^2 - 2x[x] + x - a = 0$ *are două rădăcini nenegative* ($[x]$ *este cel mai mare întreg ce nu depășește* x).

BG4. *Fie* ABO *un triunghi echilateral de centru* S *și* $A'B'O$ *alt triunghi echilateral, în același plan, avînd un vîrf* O *comun cu primul, cu* $A' \neq S$ *și* $B' \neq S$, *astfel încît unghiurile* $A'OB'$ *și* AOB *au aceeași orientare. Fie* M *mijlocul lui* $A'B$ *și* N *cel al lui* AB'. *Să se demonstreze că triunghiurile* $SB'M$ *și* $SA'N$ *sînt asemenea.*

CS1. *Se consideră două triunghiuri* $A_1A_2A_3$ *și* $B_1B_2B_3$, *primul neavînd nici un unghi obtuz. Dacă* $A_iA_j \geqslant B_iB_j$ *pentru toți* $i \neq j$, *să se demonstreze că între ariile lor are loc inegalitatea* $S_A \geqslant S_B$.

CS2. *Fie* T_1 *un triunghi de laturi* a, b, c *și arie* P, *iar* T_2 *alt triunghi de laturi* u, v, w *și arie* Q. *Să se demonstreze că*

$$16PQ \leqslant a^2(-u^2+v^2+w^2)+b^2(u^2-v^2+w^2)+c^2(u^2+v^2-w^2).$$

Cînd are loc egalitatea?

CS3. *Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural* n, *există două numere prime* p *și* q, *distincte, așa încît* n *să dividă diferența lor.*

CS4. *Să se determine toate numerele* $n < 1978$ *cu următoarea proprietate: dacă* $1 < m < n$ *și dacă* m *este natural și prim cu* n, *atunci* m *este un număr prim.*

CU1. *Să se demonstreze că, pentru orice triunghi* ABC, *există în planul său un punct* P *și trei puncte* A', B', C', *situate respectiv pe dreptele* BC, CA, AB, *astfel ca* $AB \cdot PC' = AC \cdot PB' = BC \cdot PA' = (3/10)\, m^2$, *unde* $m = \max(AB, BC, CA)$.

CU2. *Să se demonstreze că pentru orice* $x > 1$ *există un triunghi de laturi* $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$, $2x^3 + x^2 + 2x + 1$ și $x^4 - 1$ *și că, în toate aceste triunghiuri, unghiul maxim are aceeași mărime.*

CU3. *Se consideră toate perechile* (m, n) *de numere întregi, astfel ca* $n > m \geqslant 1$ *și astfel încît ultimele trei cifre din scrierea zecimală a lui* 1978^m *să coincidă respectiv cu ultimele trei cifre din cea a lui* 1978^n. *Să se determine perechile* (m, n) *cu aceste proprietăți pentru care* $m + n$ *este minim posibil.*

DE1. *Să se demonstreze că dacă polinomul* $ax^2 + bx + c$, *cu* $a > 0$, *are rădăcini reale* x_1, x_2, *atunci* $|x_1| \leqslant 1$, $|x_2| \leqslant 1$ *este echivalent cu* $a + b + c \geqslant 0$, $a - b + c \geqslant 0$, $a - c \geqslant 0$.

DE2. *Pentru fiecare întreg* $d \geqslant 1$ *se notează cu* M_d *mulțimea tuturor întregilor* $\geqslant 1$ *ce nu pot fi scriși ca sumă a unei progresii*

aritmetice de rație d, avînd cel puțin doi termeni și formată din întregi $\geqslant 1$. *Fie* $A = M_1$, $B = M_2 \setminus \{2\}$ *și* $C = M_3$. *Să se demonstreze că orice* $c \in C$ *se poate scrie într-un mod unic sub forma* $c = ab$ *cu* $a \in A$, $b \in B$.

DE3. *Să se determine a șasea cifră după virgulă în scrierea zecimală a lui* x^{20}, *unde* $x = \sqrt{1978} + [\sqrt{1978}]$.

DE4. *Două funcții* $c(x)$ *și* $s(x)$ *sînt definite pentru orice* $x \neq 0$, *nici una nu este constantă pe nici un interval, și satisfac pentru orice* x, y *nenuli relația* $c(x/y) = c(x)\,c(y) - s(x)\,s(y)$. *Să se demonstreze că:*

a) $c(1/x) = c(x)$, $s(1/x) = -s(x)$ *pentru orice* x; $c(1) = 1$, $s(1) = s(-1) = 0$.

b) *Sau* $c(-x) = c(x)$, $s(-x) = s(x)$ *pentru orice* x, *sau* $c(-x) = -c(x)$, $s(-x) = -s(x)$ *pentru orice* x.

Să se determine două astfel de funcții pentru care, în plus, $c(x) + s(x) = x^n$ *pentru orice* x, *unde* $n \geqslant 1$ *este întreg.*

DE5 (variantă a DE4). *Se consideră o funcție neconstantă* $f(x)$ *cu proprietatea* $f(xy) = f(x)f(y)$ *pentru orice* $x, y > 0$. *Să se determine două funcții* $c(x)$ *și* $s(x)$, *definite pentru* $x > 0$, *astfel ca* $c(x/y) = c(x)\,c(y) - s(x)\,s(y)$ *pentru orice* $x, y > 0$ *și* $c(x) + s(x) = f(x)$ *pentru orice* $x > 0$.

FI1. *Cum trebuie să fie numerele* a, b, c *astfel încît ecuația* $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ *să aibă trei rădăcini reale* t, u, v, *nu neapărat distincte, și astfel încît* t^3, u^3, v^3 *să satisfacă ecuația* $x^3 + a^3x^2 + b^3x + c^3 = 0$?

FI2. *Sateliții A și B înconjoară Pămîntul în planul ecuatorial la altitudine constantă h. Distanța între aceștia este mereu egală cu diametrul 2r al Pămîntului. Cum trebuie să fie h pentru ca ei să poată fi văzuți în direcții perpendiculare dintr-un punct de pe ecuator?*

FI3. *Fie* $p(x,y)$ *și* $q(x,y)$ *polinoame în două variabile, astfel încît pentru* $x, y \geqslant 0$ *să fie îndeplinite condițiile:*

a) $p(x, y)$ *și* $q(x, y)$ *sînt crescătoare în* x *pentru orice* y *fixat;*

b) *pentru orice* x *fixat,* $p(x, y)$ *este crescător și* $q(x,y)$ *descrescător, în* y;

c) $p(x, 0) = q(x, 0)$ *și* $p(0, 0) = 0$.

Să se demonstreze că dacă $0 \leqslant b \leqslant a$, *atunci sistemul de ecuații* $p(x, y) = a$, $q(x, y) = b$ *are o soluție unică în mulțimea* $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, *iar dacă* $a < b$, *acel sistem nu are nici o soluție în acea mulțime.*

FR1. *Să se demonstreze că orice număr natural prim cu 10 are cel puțin un multiplu a cărui scriere zecimală nu conține decît cifra 1.*

FR2. *Fie f o aplicație injectivă de la $\{1, 2, 3, \ldots\}$ în ea însăși. Să se demonstreze că pentru orice n avem* $\sum_{k=1}^{n} f(k)k^{-2} \geqslant \sum_{k=1}^{n} k^{-1}$.

FR3. *Să se demonstreze că oricare ar fi întregii x, y, z, toți $\geqslant 1$, ce satisfac $xy - z^2 = 1$, există întregi nenegativi a, b, c, d astfel ca $x = a^2 + b^2$, $y = c^2 + d^2$ și $z = ac + bd$.*

Alegînd $z = (2q)!$, să se deducă faptul că orice număr prim p de forma $4q + 1$ este o sumă de două pătrate.

FR4. *Dacă $U(n)$ este numărul tuturor perechilor (p, q) de numere întregi (pozitive sau negative fiecare), pentru care $p^2 + q^2 \leqslant n$, să se demonstreze că $\pi n - 5\sqrt{n} + 1 < U(n) < \pi n + 4\sqrt{n} + 1$, oricare ar fi $n > 0$ întreg.*

FR5. *Se consideră trei semidrepte distincte două cîte două Ox, Oy, Oz în același plan și un număr $2p > 0$. Să se demonstreze existența și unicitatea a trei puncte A, B, C, situate respectiv pe Ox, Oy, Oz, așa încît perimetrele triunghiurilor OAB, OBC, OCA să fie toate egale cu $2p$.*

GB1. *Se consideră razele perpendiculare OU, OV ale unui cerc de centru O, mijlocul M al lui UV și o coardă PQ ce trece prin M. Se consideră punctul W de pe dreapta UV pentru care $PW = PM$ și apoi punctul R de pe semidreapta PW pentru care $PR = MQ$. Să se demonstreze că $MR = UV$.*

GB2. *Un cerc este tangent laturilor AB, BC, CD, DA ale unui pătrat respectiv în punctele K, L, M, N. Se consideră două puncte, U în interiorul segmentului DM și V în interiorul segmentului DN, astfel încît $BU \| KV$. Să se demonstreze că UV este tangentă la cerc.*

GB3. *Doi întregi x, y nenuli, dar nu neapărat pozitivi, sînt astfel încît $x + y$ divide pe $x^2 + y^2$ și cîtul $(x^2 + y^2)/(x + y)$ este un divizor al lui 1978. Să se demonstreze că $x = y$.*

GB4. *Se consideră mulțimea S a tuturor întregilor pozitivi impari, mai mici decît $30m$, unde m este un întreg pozitiv, și care nu se divid la 5. Să se determine cel mai mic întreg k, astfel încît, în orice submulțime de k elemente a lui S, să existe două numere diferite, unul multiplu al celuilalt.*

GB5. *Fie $0 < f(1) < f(2) < f(3) < \ldots$ un șir cu toți termenii întregi. Cel de al n-lea întreg pozitiv ce nu aparține șirului este $f(f(n)) + 1$. Să se determine $f(240)$.*

NL1. *Membrii unei societăți internaționale fac parte din 6 țări diferite (fiecare din cîte una). Lista membrilor conține 1978 nume,*

numerotate 1, 2,...,1978. *Să se demonstreze că există cel puțin un membru al cărui număr este suma numerelor a doi compatrioți ai săi, nu neapărat distincți.*

NL2. *Se consideră două polinoame P și Q, de grade n, respectiv m, cu coeficienții termenilor de grade maxime egali cu* 1 *și care satisfac* $(P(x))^2 = (x^2 - 1)(Q(x))^2 + 1$. *Să se demonstreze că* $P'(x) = nQ(x)$.

NL3. *Să se demonstreze că pe cercul ce trece prin punctele* (0, 0), (0, 1978), (1978, 0) și (1978, 1978) (*vîrfuri ale unui pătrat*) *nu există alt punct care să aibă ambele coordonate întregi.*

SE1. *Un șir de numere reale* $(a_n)_{n=0,1,\dots}$ *se numește convex dacă* $2a_n \leq a_{n-1} + a_{n+1}$ *pentru orice întreg pozitiv n. Fie* $(b_n)_{n=0,1,\dots}$ *un șir de numere pozitive astfel încît, oricare ar fi* $a > 0$, *șirul* $(a^n b_n)$ *să fie convex. Să se demonstreze că* $(\ln b_n)_{n=0,1,\dots}$ *este convex.*

SE2. *O funcție f, definită pe un interval I, cu valori reale, se numește concavă dacă* $f(cx + (1 - c)y) \geq cf(x) + (1 - c)f(y)$ *pentru orice* $x, y \in I$ *și* $0 \leq c \leq 1$. *Dacă funcțiile* $f_1, \dots, f_n$, *definite pe același interval I, cu valori nenegative, sînt toate concave, să se demonstreze că funcția* $(f_1 \dots f_n)^{1/n}$ *este și ea concavă.*

SE3. *Un șir* $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ *de numere reale se numește concav dacă* $2a_k \geq a_{k-1} + a_{k+1}$ *pentru orice întreg k cu* $1 \leq k \leq n - 1$.

a) *Să se demonstreze existența unei constante* $C > 0$ *astfel încît, pentru orice șir concav pozitiv* $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$, *să avem*

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)^2 \geq C(n-1)\sum_{k=0}^{n} a_k^2.$$

b) *Să se demonstreze că valoarea cea mai mică a lui C de la* a) *este* 3/4.

TR1. *Numerele de la* 1 *la* 1000 *sînt așezate în ordine crescătoare de-a lungul unui cerc,* 1000 *ajungînd să fie situat lîngă* 1. *Începînd cu* 1, *se marchează numerele din* 15 *în* 15, *în direcția* 1, 16, 31,... *Marcarea încetează în momentul cînd s-a ajuns să se marcheze un număr pentru a doua oară. Cîte numere au rămas nemarcate?*

TR2. *Să se simplifice* $(\log_a(abc))^{-1} + (\log_b(abc))^{-1} + (\log_c(abc))^{-1}$, *în care* $a, b, c > 0$.

TR3. *Se consideră un cerc și două raze ale sale care nu sînt în prelungire. Să se construiască o coardă ale cărei puncte de intersecție cu cele două raze să o împartă în trei segmente de aceeași lungime.*

TR4. *Să se demonstreze că* $A + B + 1$ *este un pătrat perfect, unde* A *este un număr cu* $2m$ *cifre zecimale, toate egale cu* 1, *iar* B *unul cu* m *cifre, toate egale cu* 4.

TR5. *Să se demonstreze că* $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-2}^{p-1} + \ldots + C_p^{p-1} + C_{p-1}^{p-1}$ *și apoi să se evalueze suma* $S = 1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \ldots + 97\cdot 98\cdot 99$.

US1. *Într-un triunghi* ABC *avem* $AB = AC$. *Un cerc tangent interior cercului circumscris triunghiului este tangent și laturilor* AB, AC *în punctele* P, *respectiv* Q. *Să se demonstreze că mijlocul lui* PQ *este centrul cercului înscris în triunghiul* ABC.

US2. *Se consideră punctele* A, B, C, D, E *pe un cerc de centru* O, *de rază* r, *astfel încît* AB *și* DE *sînt paralele și de lungime* r, D *fiind diametral opus lui* A. *Dacă* X *este un punct pe* AC *și* Y *unul pe* CE, *astfel ca* XY *să treacă prin* O, *să se demonstreze că dreptele* BX *și* DY *se intersectează pe cercul considerat.*

US3. *Dacă* p *este prim,* $p > 3$, *să se demonstreze că măcar unul din numerele* $3p^{-2}, 4p^{-2}, \ldots, (p-2)p^{-2}$ *se poate exprima sub forma* $x^{-1} + y^{-1}$, *în care* x, y *sînt întregi pozitivi.*

US4. *Să se demonstreze că într-un triunghi* ABC *cu* $\sphericalangle C = 60°$ *avem* $(AB/BC) + (AB/CA) \geqslant 2$.

US5. *Dacă* $r > s > 0$ *și* $a > b > c > 0$, *să se demonstreze că* $a^rb^s + b^rc^s + c^ra^s \geqslant a^sb^r + b^sc^r + c^sa^r$.

US6. *Se consideră un punct fixat* P *în interiorul unei sfere fixate. Se construiesc trei segmente* PA, PB, PC, *perpendiculare două cîte două, cu capetele* A, B, C *pe sferă. Se consideră vîrful* Q *opus lui* P *în paralelipipedul dreptunghic ce are ca muchii* PA, PB, PC. *Să se afle locul geometric al lui* Q *cînd* A, B, C *iau toate pozițiile posibile, compatibile cu condiția impusă.*

VN1. *Se consideră, pentru* $n = 0, 1, \ldots$, $P_n(x) = 2^{-n}\left((x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n\right)$. *Să se demonstreze că:*

a) $P_n(x)$ *verifică identitatea* $P_n(x) - xP_{n-1}(x) + 4^{-1}P_{n-2}(x) = 0$;

b) $P_n(x)$ *este un polinom de gradul* n.

VN2. *Să se demonstreze că se pot așeza* $2n(2n+1)$ *bucăți de săpun, fiecare constituind un paralelipiped dreptunghic de dimensiuni* $1, 2, n+1$, *într-o cutie cubică de latură* $2n+1$, *dacă și numai dacă* n *este par sau* $n = 1$.

VN3. *Se consideră patru puncte arbitrare în spațiu, distincte două cîte două.*

a) *Să se demonstreze că există un triunghi fără unghiuri obtuze, ale cărui laturi să aibă ca lungimi* $AB + CD$, $AC + BD$, $AD + BC$.

b) *Ce condiție trebuie să satisfacă punctele* A, B, C *și* D *pentru ca triunghiul de la a) să fie dreptunghic?*

VN4. *Un tetraedru* $ABCD$ *are proprietatea că muchiile sale opuse au aceeași lungime* ($AB = CD$, $AC = BD$ *și* $AD = BC$). *Vîrfurile sale variază,* A, B, C *descriind trei suprafețe sferice concentrice, de raze respectiv* 3, 4 *și* 12, *de centru* P. *Care este valoarea maximă a lui* PD?

VN5. *Fie* AH *înălțime și* AM *mediană în triunghiul* ABC. *Care este condiția necesară și suficientă ca* $\sphericalangle BAH = \sphericalangle CAM$?

YU1. *Fie* p *un număr prim. Să notăm cu* $P = \{0, 1, \ldots, p-1\}$. *Fie* A *o mulțime oarecare formată din* $p-1$ *numere naturale, nici unul din acestea nefiind divizibil cu* p. *Dacă* $\mathcal{P}(A)$ *înseamnă mulțimea tuturor submulțimilor lui* A, *să definim funcția* f, *pe* $\mathcal{P}(A)$, *cu valori în* P, *prin* $f(\emptyset) = 0$, *iar pentru* $B \subset A$, $B \neq \emptyset$, $f(B)$ *este restul împărțirii prin* p *a sumei numerelor din* B. *Să se demonstreze că* f *este surjectivă.*

YU2. *Să se determine toate tripletele* (a, b, c) *de numere reale pozitive pentru care sistemul* $ax + by - cz = 0$, $a\sqrt{1-x^2} + b\sqrt{1-y^2} - c\sqrt{1-z^2} = 0$ *are soluții în mulțimea numerelor reale. Să se determine apoi toate soluțiile sale reale.*

YU3. *Fie* p, q, r, *trei drepte în spațiu, care nu sînt paralele cu același plan. Să se determine trei plane* a, b, c *perpendiculare două cîte două, care conțin respectiv dreptele* p, q, r.

8.5. Modul de selecție a problemelor ce urmau să fie propuse juriului

Problemele din acea listă trebuiau alese dintre cele 54 enunțate în 8.4. Era de dorit ca acestea să fie problemele „cele mai potrivite" pentru Olimpiada Internațională, dar această noțiune nu are o definiție în cîteva rînduri, ea se precizează în urma unor contacte sistematice cu lumea Olimpiadei. Aceeași observație se poate face și relativ la dezideratul ca problemele să fie de diverse grade de dificultate (vezi 3.9). Era de dorit ca acestea să reprezinte cît mai egal diversele domenii de matematică (vezi 3.9) și, de asemenea, diversele țări ce trimiseseră probleme. Pentru succesul Olimpiadei ar

fi fost bine ca printre ele să fie una care să aibă şanse să rămînă în amintirea participanţilor ca o problemă deosebit de frumoasă, adecvată (vezi 3.12). În fine, era de dorit ca problemele să întreţină speranţa că vor oferi posibilitatea concurenţilor de a găsi soluţii cît mai diverse, mai deosebite, dintre care unele să poată fi distinse cu premii speciale.

Alegerea s-a făcut de o comisie restrînsă, compusă din cinci persoane, printre care preşedintele juriului, unii dintre coordonatori etc. Aceasta s-a petrecut cu puţine zile înaintea începerii Olimpiadei (vezi 8.4).

Principiile enunţate apar drept judicioase, dar aplicarea lor concretă nu pare imediată. Din întreg textul acestei cărţi reiese că modul optim de a studia o problemă, de a-i cîntări dificultatea, calităţile şi defectele, este de a o rezolva. Cu trei zile înainte de şedinţa comisiei, preşedintele juriului a deschis plicul cu probleme şi a trecut la rezolvarea lor. Acea şedinţă a avut ca moment important prezentarea concluziilor ce au rezultat din activitatea de rezolvare a celor 54 de probleme.

Dăm, în continuare, soluţiile celor 54 probleme, însoţite de unele din comentariile comisiei, împărţite în şapte grupe, deşi, aşa cum s-a indicat în 6.3, o asemenea împărţire este legată de dificultăţi şi conduce la inexactităţi.

8.6. Problemele cele mai dificile

Astfel au fost calificate cele patru probleme ce au rezistat încercării de rezolvare independentă, descrisă în 8.5. Această situaţie are şi ea, evident, o valoare relativă, ţinînd seama de numărul total al acelor probleme şi de timpul avut la dispoziţie.

Soluţia problemei SE3 (vezi 8.4), *după soluţia autorilor*. a) Să începem prin a observa că dacă

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)^2 \geqslant D\sum_{k=0}^{n} a_k^2, \quad \left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)^2 \geqslant D\sum_{k=0}^{n} b_k^2$$

cu $D > 0$ şi dacă $a_k, b_k \geqslant 0$ pentru orice k, atunci

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k \geqslant D^{1/2}\left(\left(\sum_{k=0}^{n} a_k^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=0}^{n} b_k^2\right)^{1/2}\right) \geqslant$$

$$\geqslant D^{1/2}\left(\sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k)^2\right)^{1/2},$$

ultima inegalitate fiind cunoscută sub denumirea de inegalitatea lui Minkovski. Prin ridicare la pătrat aceasta revine la

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} a_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=0}^{n} b_k^2\right)^{1/2}$$

şi se demonstrează scriind că discriminantul trinomului de gradul doi $\sum_{k=0}^{n} (a_k x + b_k)^2$ este nepozitiv. S-a obţinut

$$\left(\sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)\right)^2 \geqslant D \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)^2,$$

cu alte cuvinte că, dacă $a_0, \ldots, a_n$ şi $b_0, \ldots, b_n$ sînt două şiruri $x_0, \ldots, x_n$ de numere nenegative ce satisfac $\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)^2 \geqslant D \sum_{k=0}^{n} x_k^2$, atunci şi $a_0 + b_0, \ldots, a_n + b_n$ va fi un astfel de şir. Se verifică imediat că dacă $a_0, \ldots, a_n$ este un şir ca mai înainte şi dacă $c \geqslant 0$, atunci şi $ca_0, \ldots, ca_n$ are acele proprietăţi.

b) Să considerăm acum problema determinării celui mai mare D_n, pentru care, oricare ar fi şirul concav nenegativ $a_0, \ldots, a_n$, să avem $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)^2 \geqslant D_n \sum_{k=0}^{n} a_k^2$. Ţinînd seama de rezultatul de la a), vom căuta să exprimăm şirul $a_0, \ldots, a_n$ ca o „combinaţie liniară cu coeficienţi nenegativi" a unor şiruri concave fixate, nenegative.

O astfel de reprezentare a fost obţinută în 6.3, cu ocazia rezolvării problemei BG3, propuse juriului la Olimpiada a 18-a, în cazul $a_0 = a_n = 0$. Anume, să înlocuim în raţionamentul din acea soluţie $b_1, \ldots, b_n$ cu $-c_1, \ldots, -c_n$ respectiv şi apoi n cu $n-1$. Rezultatul va fi $a_k = \sum_{s=1}^{n-1} g_{s,k} c_s$, pentru $k = 1, \ldots, n-1$, unde $g_{s,k} = s(n-k)/n$ pentru $s \leqslant k$ şi $g_{s,k} = (n-s)k/n$ pentru $k \leqslant s$. Formula pentru a_k va fi valabilă şi pentru $k = 0$ şi $k = n$, dacă vom pune $g_{s,0} = 0$, $g_{s,n} = 0$.

Dacă $a_0, \ldots, a_n$ este concav, atunci (vezi soluţia citată din 6.3) $c_s = 2a_s - a_{s-1} - a_{s+1} \geqslant 0$. Se verifică imediat că, oricare ar fi s, şirul $g_{s,0}, \ldots, g_{s,n}$ este concav şi nenegativ.

Dacă, în general, a_0 şi a_n nu sînt nuli, vom considera şirul $u_k = a_0 + (a_n - a_0)kn^{-1}$, pentru care $u_0 = a_0$, $u_n = a_n$ şi $2u_k - u_{k-1} - u_{k+1} = 0$ şi apoi şirul $v_k = a_k - u_k$, care rezultă concav, cu $v_0 = v_n = 0$ şi căruia i se poate aplica deci reprezentarea obţinută anterior.

Reprezentarea definitivă este $a_k = \sum_{s=1}^{n-1} g_{s,k} c_s + g_{0,k} a_0 + g_{n,k} a_n$, în care $g_{0,k} = (n-k)/n$, $g_{n,k} = k/n$. (Atenţie ! $g_{0,k} = g_{1,k}$ pentru $k = 1, \ldots, n$,

dar $1 = g_{0,0} \neq g_{1,0} = 0$ etc.). Se verifică și aici că $g_{0,0}, \ldots, g_{0,n}$ și $g_{n,0}, \ldots, g_{n,n}$ sînt concave nenegative.

c) Conform reprezentării obținute în b) și celor stabilite la a), numărul D_n va fi cel mai mic dintre numerele $\left(\sum_{k=0}^{n} g_{s,k}\right)^2 \Big/ \sum_{k=0}^{n} g_{s,k}^2$, în care s ia valorile $0, 1, \ldots, n$. În continuare trebuie calculate aceste numere. Vom utiliza formulele

$$\sum_{k=1}^{p} k = p(p+1)/2 \text{ și } \sum_{k=1}^{p} k^2 = p(p+1)(2p+1)/6.$$

Dacă $1 \leqslant s \leqslant n-1$, atunci dintre numerele $g_{s,k}, k = 0,1,\ldots,n$, două sînt nule, s dintre acestea sînt egale, respectiv, cu $(n-s)/n$ înmulțit cu $1,2,\ldots,s$, iar $n-s-1$ cu s/n înmulțit cu $1,2,\ldots$ $\ldots, n-s-1$. Suma lor va fi

$$\frac{n-s}{n}\frac{s(s+1)}{2}+\frac{s}{n}\frac{(n-s-1)(n-s)}{2}=$$

$$=\frac{(n-s)s}{2n}\left(s+1+n-s-1\right)=\frac{(n-s)s}{2},$$

iar suma pătratelor lor

$$\left(\frac{n-s}{n}\right)^2\frac{s(s+1)(2s+1)}{6}+\left(\frac{s}{n}\right)^2\frac{(n-s-1)(n-s)(2n-2s-1)}{6}=$$

$$=\frac{s(n-s)}{6n^2}((n-s)(s+1)(2s+1)+s(n-s-1)(2n-2s-1)),$$

deci suma este
$s(n-s)(-2ns^2+2n^2s+n)/(6n^2) = s(n-s)(1+2s(n-s))/(6n)$.

Raportul ce ne interesează este

$$\frac{(n-s)^2s^2}{4}\frac{6n}{(n-s)s(1+2(n-s)s)}=\frac{3n}{4(1+(2s(n-s))^{-1})}$$

și este minim cînd $s(n-s)$ este minim, deci pentru $s=1$ și $s=n-1$, valoarea sa minimă fiind $\frac{3}{4}n(n-1)\Big/\left(n-\frac{1}{2}\right)$.

Pentru $s=0$ și $s=n$, numerele $g_{s,k}$, $k=0,\ldots,n$, sînt egale respectiv cu $1/n$, înmulțit cu $0, 1, \ldots, n$, deci suma lor este $n(n+1)/(2n)=$

$= (n+1)/2$, suma pătratelor lor este $n(n+1)(2n+1)/(6n^2) = (n+1)(2n+1)/(3n)$, iar raportul ce interesează este

$$\frac{3}{4}n(n+1) \Big/ \left(n+\frac{1}{2}\right).$$

Problema se poate rezolva şi fără a cerceta dacă acest raport, scris sub forma $(n-1)r_n$ după cum sugerează enunţul, este mai mare sau mai mic decît minimul $(n-1)w_n$ al celorlalte rapoarte, determinat înainte. Anume, se observă că $w_n = (3/4)n(n-1/2)^{-1} > 3/4$ şi că tinde la 3/4 pentru $n \to +\infty$ şi că $r_n = (3/4)(n^2+n)(n^2-n-1/2)^{-1}$ are aceleaşi proprietăţi, fapte care sînt suficiente pentru a argumenta afirmaţia (b) din enunţ; a) este implicată de b).

Problema VN4 (vezi 8.4) nu numai că a rezistat tentativei de rezolvare, dar nici soluţia autorilor nu a apărut completă (o altă delegaţie nu a anexat nici o soluţie la problemele trimise, de altfel vezi şi 3.8). Aceasta a fost dată, în 1979, lotului lărgit al ţării noastre ce se pregătea pentru Olimpiada Internaţională din acel an. Un elev a găsit următoarea

Soluţie a problemei VN4 (vezi 8.4). a) Începem cu o observaţie generală. Pentru orice tetraedru $ABCD$ există un paralelipiped care are printre vîrfurile sale cele patru vîrfuri ale tetraedrului, dar nu are printre muchiile sale nici una din muchiile acelui tetraedru

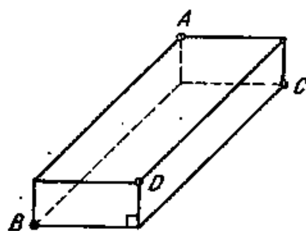


Fig. 101

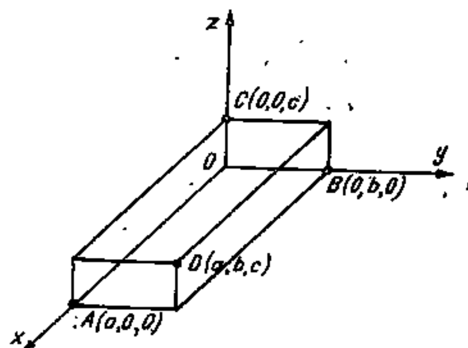


Fig. 102

(vezi fig. 101). Acest paralelipiped se obţine ducînd prin fiecare muchie a tetraedrului un plan paralel cu muchia opusă.

Muchiile tetraedrului sînt diagonale ale feţelor paralelipipedului, două muchii opuse ale tetraedrului sînt egale respectiv cu cele două

diagonale ale fețelor paralelipipedului ce sînt paralele cu acestea. Deci tetraedrul are proprietatea din enunț dacă și numai dacă toate fețele paralelipipedului au cele două diagonale egale, ceea ce înseamnă că aceste fețe sînt dreptunghiuri, deci dacă și numai dacă paralelipipedul este dreptunghic.

b) Să considerăm acum un tetraedru $ABCD$ cu proprietățile din enunț, paralelipipedul dreptunghic corespunzător, și să alegem un sistem de axe ortogonale în spațiu $Oxyz$ așa încît $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$, unde a, b, c sînt neprecizați ; rezultă $D(a, b, c)$ (vezi fig. 102).

Fie și $P(x, y, z)$. Avem

$$PA^2 = (x - a)^2 + y^2 + z^2, \quad PB^2 = x^2 + (y - b)^2 + z^2,$$

$$PC^2 = x^2 + y^2 + (z - c)^2$$

și $PD^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$. Pentru a găsi o relație între ele să formăm $PA^2 + PB^2 + PC^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2) = PD^2 + 2PO^2$. Deci $PD^2 \leq PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $PO = 0$, adică P coincide cu O.

Toate aceste concluzii se puteau obține și fără considerarea paralelipipedului (în stilul soluției problemei BG6, propuse juriului la Olimpiada a 15-a, prezentată în 3.5.).

Dar ceea ce apare evident în prezența paralelipipedului și nu apare clar altfel este că această situație este posibilă : luăm trei raze perpendiculare două cîte două în cele trei sfere din enunț $PA = 3$, $PB = 4$, $PC = 12$ și figura ce corespunde lui PD maxim se realizează, conform cu fig. 102.

Situația legată de această problemă merită comentarii. Observațiile de la a) nu sînt „ceva special", ci o legătură naturală, interesantă, între tetraedre și paralelipipede. Odată adusă în discuție de cineva, ea este ușor de înțeles și de demonstrat. Dar aceasta nu s-a dovedit a fi unul din drumurile pe care raționamentul rezolvitorului obișnuia să circule.

Nici SE3 și nici VN4 nu au fost incluse de comisie pe lista pentru juriu.

Soluția problemei NL1 (vezi 8.4) *după soluția autorilor.* Vom demonstra afirmația din enunț prin reducere la absurd. Avem $1978 = 6 \cdot 329 + 4$, deci printre cele șase țări va exista una, s-o numim A, care va avea 330 membri, fie $a_1 < \ldots < a_{330}$ numerele lor (evident că pot fi mai multe asemenea țări și ele, ca și A, pot avea și mai mult de 330 membri).

Dacă A nu are proprietatea din enunț, atunci, oricare ar fi $1 \leqslant \leqslant i < j \leqslant 330$, $a_j - a_i$ nu este în A.

S-ar părea acum că va trebui să vedem care este numărul maxim u, pentru care sîntem siguri că există u asemenea diferențe distincte două cîte două și să afirmăm că printre celelalte cinci există o țară, care conține $[(u-1)/5]+1$ dintre aceste diferențe. Dar, după cum se va vedea, o asemenea procedură ne-ar pune în imposibilitatea de a continua mai mult de un pas.

Ne vom baza numai pe faptul că $a_{330} - a_1 > \ldots > a_{330} - a_{329}$ nu sînt în A (în particular, am observat că u de mai înainte este cel puțin 329). Cum $329 = 5 \cdot 65 + 4$ și cele 329 diferențe aparțin la cinci țări, va exista una din aceste țări, s-o notăm B, care este deci diferită de A, în care se vor afla 66 (sau mai multe) dintre acestea. Să le notăm $b_1 < \ldots < b_{66}$, deci $b_j = a_{330} - a_{i_j}$, $i_{66} < \ldots < i_1$.

Dacă nici B nu are proprietatea din enunț, rezultă că nici un $b_j - b_k$, cu $k < j$, nu se află în B. Dar, în plus, $b_j - b_k = a_{i_k} - a_{i_j}$, deci acestea nu aparțin nici lui A.

Acesta este punctul care nu ar fi funcționat dacă nu am fi ales cu grijă diferențele, anume $a_{330} - a_j$, din care să fi extras apoi cele 66 numere b_i.

Raționamentul se poate deci continua. Se consideră cele $65 = = 4 \cdot 16 + 1$ numere $b_{66} - b_1, \ldots, b_{66} - b_{65}$ care nu se află nici în A, nici în B și rezultă existența unei țări C, diferite de A și B, ce va conține 17 din aceste numere; să le notăm $c_1 < \ldots < c_{17}$.

Dacă nici C nu are proprietatea din enunț, atunci $c_i - c_j$, pentru orice $1 \leqslant j < i \leqslant 17$, nu se va afla în C. Dar $c_i - c_j$ rezultă, la fel ca mai inainte, egal cu o diferență de forma $b_m - b_n$, cu $m > n$, deci nu se va afla nici în A și nici în B.

Se consideră acum cele 16 numere $c_{17} - c_1, \ldots, c_{17} - c_{16}$, se ține seama de $16 = 3 \cdot 5 + 1$ și se obțin șase numere $d_1 < \ldots < d_6$ din acest șir ce vor aparține aceleiași țări D, diferite de A, B, C. Apoi, la fel, dacă nici D nu ar avea proprietatea din enunț, printre cele $5 = 2 \cdot 2 + 1$ numere $d_6 - d_1, \ldots, d_6 - d_5$ se vor găsi trei, $e_1 < < e_2 < e_3$, ce vor aparține aceleiași țări E, diferite de toate cele precedente.

A rămas o singură țară F, căreia vor trebui să-i aparțină diferențele $e_3 - e_1$, $e_3 - e_2$, $e_2 - e_1$, dacă E nu are proprietatea din enunț, și, cum $e_3 - e_1 = (e_3 - e_2) + (e_2 - e_1)$, dacă nici F nu ar avea acea proprietate, am ajunge la o contradicție.

Am marcat în prezentarea soluției momentul de dificultate al acestei probleme. Dar problema a fost considerată de comisie potrivită pentru concurs și a fost inclusă în lista propusă juriului.

Problema VN2 (vezi 8.4) a rezistat tentativei de rezolvare numai relativ la un caz particular, anume $n = 3$, deci privind imposibilitatea de a așeza într-un cub cu latură 7, format din 343 cuburi de latură 1, 42 de paralelipipede de dimensiuni $1 \times 2 \times 4$. Prezentăm întîi soluția ce nu acoperă acest caz, dar este mult mai simplă.

Soluție a problemei VN2 (vezi 8.4), *valabilă pentru* $n \neq 3$. a) Cubul de latură $2n + 1$ este format din $(2n + 1)^3 = 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1$ cuburi de latură 1, iar cele $2n(2n + 1)$ paralelipipede, fiecare de dimensiuni $1 \times 2 \times (n + 1)$, conțin în total $4n(2n + 1)(n + 1) = 8n^3 + 12n^2 + 4n$ cuburi de latură 1. Deci, dacă așezarea este posibilă, vor rămîne $2n + 1$ cuburi de latură 1 neocupate în cubul „total".

Presupunem, evident, că este vorba de așezări în care fiecare paralelipiped urmează să fie format din numărul corespunzător de cuburi de latură 1 dintre cele $(2n + 1)^3$ ce formează cubul „mare"; problema nu a mai fost complicată cu cerința de a demonstra că altfel de așezări sînt imposibile, dacă au proprietatea din enunț.

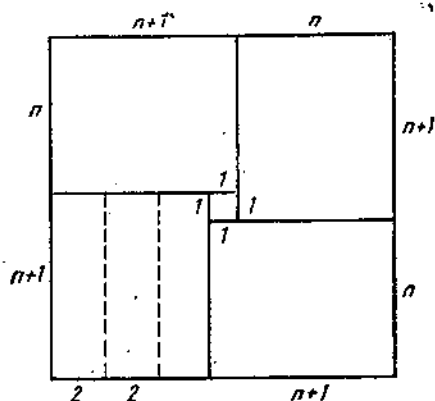


Fig. 103

b) Cazul n par. Cubul de latură $2n + 1$ se împarte în $2n + 1$ straturi de grosime 1. În fiecare astfel de strat se plasează $2n = 4(n/2)$ paralelipipede de dimensiuni $1 \times 2 \times (n + 1)$, ca în fig. 103, în care cele patru dreptunghiuri au dimensiunile n și $n + 1$ fiecare, lățimea n fiind împărțită în $n/2$ segmente de mărime 2. Centrul stratului rămîne liber.

c) Cazul n impar, generalități. Să observăm că paralelipipedele au două dimensiuni, 2 și $n+1$, pare, deci acestea intersectează fiecare strat de grosime 1 (de felul celor considerate la b) după un număr par de cuburi $[0, 2, n + 1$ sau $2(n + 1)]$ de latură 1 (dintre cele ce formează cubul „mare"). Stratul are însă în total $(2n + 1)^2$, deci un număr impar, de cuburi. Deci în fiecare strat, într-o așezare ca în enunț, va rămîne cel puțin un cub de latură 1 neocupat. Dar (vezi a) există în total $2n+1$ cuburi neocupate și fiecare strat face parte dintr-una din cele trei familii de cîte $2n+1$ straturi disjuncte, deci fiecare strat va conține exact un cub de latură 1 neocupat.

d. Cazul n impar, $n > 1$. Să considerăm o așezare ca în enunț. Fie d_1, d_2, d_3 cele trei direcții, perpendiculare între ele, ale muchiilor cubului de latură $2n + 1$. Fie M_i mulțimea paralelipipedelor ce au „muchia lungă", deci cea de lungime $n + 1$, paralelă cu d_i și m_i — numărul de paralelipipede din M_i. Fiecare din cele m_i paralelipipede din M_i intersectează stratul de grosime 1, perpendicular pe d_i și care conține cubul „central" de latură 1 (vezi fig. 104), după două cuburi de latură 1.

Paralelipipedele ce nu sînt în M_i sînt sau disjuncte de acel strat, sau îl intersectează după $n + 1$ sau $2(n + 1)$ cuburi de latură 1 (vezi fig. 104, dreapta). Stratul are, conform cu c), $(2n + 1)^2 - 1$ cuburi

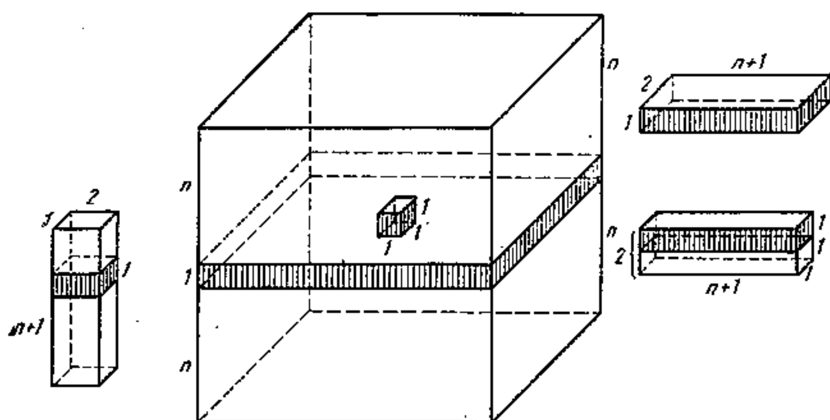


Fig. 104

de latură 1 ocupate, număr care, conform raționamentului precedent, rezultă egal cu $2m_i + u_i(n + 1)$, în care u_i este întreg. Cum $(2n + 1)^2 - 1 = 4n(n + 1)$, ajungem la concluzia că $2m_i$ se divide cu $n + 1$ pentru orice i.

Numărul total $2n(2n + 1)$ de paralelipipede este egal cu $m_1 + m_2 + m_3$, deci $4n(2n + 1)$ se divide cu $n + 1$. Însă $n + 1$ este prim cu n, precum și cu $2n + 1$, diferența lor fiind n, deci $n + 1$ va divide 4. Cum $n > 1$ este impar, rezultă $n = 3$.

Am arătat că o așezare cu proprietățile din enunț este imposibilă pentru $n > 3$ impar.

e) Cazul $n = 1$. Cubul „mare" are latura 3, paralelipipedele au dimensiunile $1 \times 2 \times 2$ și sînt în număr de 6; le vom numerota $1, 2, \ldots, 6$ și le vom desena (fig. 105) cum apar în cele trei straturi succesive.

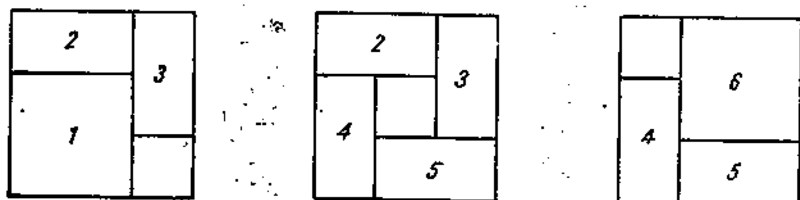


Fig. 105

Soluția autorilor la problema VN2 (vezi 8.4), *valabilă și pentru* $n = 3$. Tratarea cazurilor n par, $n = 1$ și stabilirea faptului că pentru n impar orice „strat" conține exact un cub de latură 1 neocupat se fac la fel ca în soluția anterioară (b), e), a) și c), respectiv). Rămîne de demonstrat că pentru $n \geqslant 3$ impar o așezare ca în enunț este imposibilă. Se consideră o astfel de așezare și se caută să se ajungă la o contradicție.

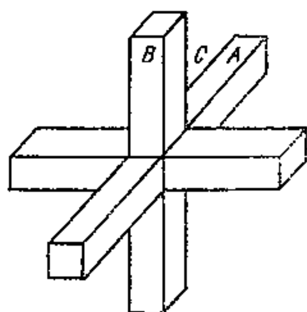


Fig. 106

Se consideră cele trei straturi, perpendiculare respectiv pe cele trei direcții ale muchiilor cubului, ce conțin cubul „central" de latură 1 (unul din aceste straturi apare în fig. 104). Cuburile de latură 1 ce compun pe cel de latură $2n+1$ se împart în patru categorii, după cum acestea sînt conținute în $p = 0, 1, 2, 3$ din cele trei straturi. Există un singur cub în situația $p=3$ (cel central) și $6n$ în situația $p=2$, formînd împreună trei paralelipipede $1 \times 1 \times \times (2n + 1)$, arătate în fig. 106.

După cum a reieșit din fig. 104, oricare dintre paralelipipedele $1 \times 2 \times (n + 1)$ conține cel puțin un cub cu $p > 0$. Mai precis, un astfel de paralelipiped P este într-unul din următoarele patru cazuri (vezi fig. 107, în care literele A, B, C, ce apar și în fig. 106, precizează pozițiile posibile ale lui P, în fiecare caz, în cubul „mare").

a) P conține cubul central, caz în care el conține $n + 1$ cuburi cu $p = 2$ și n cu $p = 1$.

b) P nu conține cubul central, conține două cuburi cu $p = 2$ și $2n$ cu $p = 1$.

c) P nu conține cubul central, conține un cub cu $p = 2$, $n + 1$ cuburi cu $p = 1$ și n cu $p = 0$.

d) P nu conține cuburi cu $p \geqslant 2$, două cu $p = 1$ și $2n$ cu $p = 0$.

Se observă că situațiile b), c), d) se pot unifica astfel : dacă un paralelipiped P nu conține cubul central și conține r cuburi cu $p = 2$, atunci acesta conține $2 + (n - 1)r$ cuburi cu $p = 1$.

Cum orice strat conține exact un cub de latură 1 neocupat, rezultă (vezi fig. 106) că există cel mult un cub neocupat în situația $p \geqslant 2$. În legătură cu aceasta apar trei posibilități.

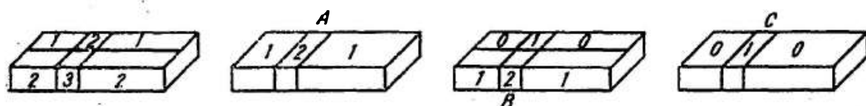


Fig. 107

1) Cubul central este neocupat. În acest caz toate cele $2n(2n + 1)$ paralelipipede vor fi în situația „unificată". Numerele r corespunzătoare vor avea ca sumă $6n$ (numărul total de cuburi cu $p = 2$), deci numărul total de cuburi cu $p = 1$ din acele paralelipipede va fi

$$2 \cdot 2n(2n + 1) + (n - 1)6n = 14n^2 - 2n.$$

2) Un cub cu $p = 2$ este neocupat. În acest caz cubul central (vezi situația a)) va fi ocupat de un paralelipiped ce va avea încă $n + 1$ cuburi cu $p = 2$ și n cu $p = 1$. Celelalte $4n^2 + 2n - 1$ paralelipipede vor fi în situația „unificată", suma numerelor r corespunzătoare va fi $6n - (n + 1) - 1 = 5n - 2$ și numărul total de cuburi cu $p = 1$ din toate paralelipipedele va fi $(4n^2 + 2n - 1)2 + (n - 1)(5n - 2) + n = 13n^2 - 2n < 14n^2 - 2n$, număr ce apăruse la 1).

3) Toate cuburile cu $p \geqslant 2$ sînt ocupate. Cuburile cu $p = 1$ din toate paralelipipedele se numără la fel ca la 2) și rezultă mai multe decît în acel caz, $5n - 2$ trebuind înlocuit cu $5n - 1$.

Concluzia este că există în total cel puțin $13n^2 - 2n$ cuburi cu $p = 1$. Dar din fig. 106 rezultă că astfel de cuburi sînt în număr de $12n^2$, deci inegalitatea $12n^2 \geqslant 13n^2 - 2n$, adică $n \leqslant 2$, imposibil.

Această problemă a fost inclusă de comisie în lista pentru juriu, pentru a avea în acea listă o problemă deosebită, care să aibă șansa de a rămîne în amintirea participanților. Dar era clar că, așa cum Olimpiada a 15-a nu devenise (vezi 3.5, 3.9) „olimpiada cercului" (este vorba de „cercul cu care copiii se joacă", noțiune care în limba organizatorilor acelei Olimpiade nu este omonimă cu „cercul din geometrie"), nici Olimpiada a 20-a nu avea să devină „olimpiada săpunului".

Poate că această problemă, dacă ar fi apărut în anii cubului lui Rubik, al cărui „schelet" nu este altceva decît fig. 106 pentru $n = 1$, ar fi avut mai mari șanse de a deveni problemă de concurs la Olimpiada Internațională.

8.7. Probleme ce nu se încadrează în materia pentru Olimpiadă

Ce înseamnă a fi „în afara programei analitice a Olimpiadei" am discutat în 2.7; noțiunea este departe de a fi rigidă (vezi și 7.1).

Din lista de la 8.4, cele ce apar în această situație sînt FI3 și NL2. Dacă privim enunțurile acestor probleme, se pare că FI3 ar putea fi acceptată, dar NL2 nu. După rezolvarea lor, punctul de vedere se va schimba însă complet.

Soluția problemei FI3 (vezi 8.4). a) Să precizăm întîi că vom înțelege „crescător" și „descrescător" în sens strict; de exemplu în situația $p(x, y) = q(x, y) = r(x)$, unde r este un polinom strict crescător pe $[0, \infty)$, afirmația nu este adevărată etc. Unele raționamente în plus, începînd cu observația că un polinom ce este crescător, dar nu strict, pe un interval este o constantă, ar putea extinde totuși aria sa de valabilitate.

b) Un polinom de o variabilă strict crescător pe $[0, \infty)$ are limita $+\infty$ la $+\infty$, iar unul strict descrescător are limita $-\infty$ la $+\infty$, deoarece în ambele cazuri gradul polinomului este > 0.

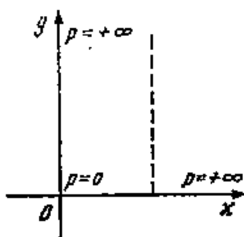


Fig. 108

c) Fie $0 \leqslant b \leqslant a$. În fig. 108 este prezentată schematic comportarea lui p, pe baza concluziilor de la b) și a ipotezelor din enunț.

Aplicarea teoremei Darboux lui $p(x, 0)$ arată existența unui x_0 unic cu $p(x_0, 0) = a$ și apoi aplicarea acesteia lui $p(x, y)$, pentru $x \in [0, x_0]$ fixat, arată existența unui $f(x)$ unic cu $p(x, f(x)) = a$.

d) Să demonstrăm că f este continuă pe $[0, x_0]$. Cel mai simplu este de a observa întîi că f este strict descrescătoare: pentru $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant x_0$ rezultă $a = p(x_1, f(x_1)) < p(x_2, f(x_1))$ și, cum $p(x_2, y)$ este strict crescătoare, din $p(x_2, f(x_2)) = a$ rezultă $f(x_2) < f(x_1)$. În continuare se observă că f ia orice valoare c din $[0, f(0)] = [f(x_0), f(0)]$, datorită teoremei Darboux aplicate lui $p(x, c)$, unde $p(0, c) \leqslant$ $\leqslant p(0, f(0)) = a$.

Se știe, și nu este greu de demonstrat, că o funcție monotonă pe un interval, a cărei mulțime de valori este un interval, este continuă.

e) Să considerăm acum $q(x, f(x))$. Avem $q(0, f(0)) \leqslant q(0, 0) = p(0, 0) = 0$ și $q(x_0, f(x_0)) = q(x_0, 0) = p(x_0, 0) = a$ și $q(x, f(x))$ este continuă.

Mai mult, $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant x_0$ implică $f(x_1) > f(x_2)$, conform cu d), deci $q(x_1, f(x_1)) < q(x_2, f(x_1)) < q(x_2, f(x_2))$, conform ipotezelor din enunț asupra lui q. Funcția $q(x, f(x))$ a rezultat strict crescătoare și continuă pe $[0, x_0]$, deci va exista $x \in [0, x_0]$ unic cu $q(x, f(x)) = b$, dacă $0 \leqslant b \leqslant a$. Notînd $y = f(x)$, se obține $p(x, y) = a$, $q(x, y) = b$, adică existența perechii (x, y) cerute de enunț. Unicitatea acesteia rezultă din faptul că $p(x, y) = a$ implică $p(x, 0) \leqslant p(x, y) = a$, deci $x \in [0, x_0]$ și apoi (vezi c)) $y = f(x)$, $q(x, f(x)) = b$ etc.

f) În general $p(x, y) \geqslant p(x, 0) = q(x, 0) \geqslant q(x, y)$, ceea ce arată că $p(x, y) = a < b = q(x, y)$ este imposibil.

Funcția f nu este un polinom și nu se întrevede o soluție care să evite teorema Darboux. Funcția compusă $q(x, f(x))$ se poate evita exprimînd, la fel ca pentru $p(x, y) = a$, relația $q(x, y) = b$ prin $x \geqslant x_1$, $y = g(x)$, cu g strict crescătoare și apoi observînd că, dacă $b \leqslant a$, atunci $x_1 \leqslant x_0$ și că $g(x) - f(x) = 0$ are o soluție unică pe $[x_1, x_0]$, fiind continuă, strict crescătoare, nepozitivă în x_1 și nenegativă în x_0.

Soluția problemei NL2 (vezi 8.4). Derivînd relația din enunț, se obține $2P(x)P'(x) = 2x(Q(x))^2 + 2(x^2 - 1)Q(x)Q'(x)$. Polinomul $Q(x)$ divide membrul drept, nu are divizori comuni de grad > 0 cu $P(x)$, deoarece, conform relației din enunț, un astfel de divizor ar divide pe 1, deci $Q(x)$ divide pe $P'(x)$, dar ele au ambele gradul $n - 1$ (relativ la Q aceasta rezultă din relația din enunț), primii coeficienți egali cu 1, respectiv n, q.e.d.

Soluția este foarte simplă. Problema se poate reformula însă, exprimînd relația $P' = nQ$ prin coeficienți, deci fără derivată. Ce ar face un concurent ce n-ar cunoaște noțiunea de derivată?

O cale este $(P(x) - 1)(P(x) + 1) = (x^2 - 1)(Q(x))^2$, a observa că $P(x) - 1$ și $P(x) + 1$ sînt relativ primi, deci sau $P(x) - 1 = (x^2-1)(P_1(x))^2$, $P(x)+1=(Q_1(x))^2$, sau $P(x) - 1 = (x-1)(P_1(x))^2$, $P(x) + 1 = (x + 1)(Q_1(x))^2$, sau $P(x) - 1 = (x + 1)(P_1(x))^2$, $P(x) + 1 = (x - 1)(Q_1(x))^2$, sau $P(x) - 1 = (P_1(x))^2$, $P(x) + 1 = (x^2 - 1)(Q_1(x))^2$. Prima conduce la $(Q_1(x))^2 = 2 + (x^2 - 1)(P_1(x))^2$, relație analoagă cu cea din enunț, a doua la $(x + 1)(Q_1(x))^2 = 2 + (x - 1)(P_1(x))^2$, căreia nu i se întrevăd, se pare, continuări simple, a

treia conduce la contradicția $P(-1) = 1$, $P(-1) + 1 \leqslant 0$ și a patra la fel la $P(\pm 1) \geqslant 1$, $P(\pm 1) + 1 = 0$.

Dar există o soluție elementară, care arată și care sînt toate perechile $P(x)$, $Q(x)$ ce satisfac relația din enunț, soluție care însă nu a fost „pe masa comisiei de selecție". Anume, să substituim $x = R(y)$, unde R este o fracție rațională, așa ca $x^2 - 1 = (R(y))^2 - 1$ să devină un pătrat perfect. Nu este nevoie de o teorie pentru aceasta, $x = (y + y^{-1})/2$, $x^2 - 1 = ((y - y^{-1})/2)^2$ fiind „în repertoriul uzual". Avem $P((y + y^{-1})/2) = y^{-n}P_1(y)$, $Q((y + y^{-1})/2) = y^{-(n-1)}Q_1(y)$, unde P_1 și Q_1 sînt polinoame de grad $2n$ și $2n - 2$, cu primii coeficienți $2^{-n}, 2^{-(n-1)}$. Relația din enunț devine, după înmulțirea cu y^{2n}, $(P_1(y))^2 = \frac{1}{4}(y^2 - 1)^2(Q_1(y))^2 + y^{2n}$, deci $\left(P_1(y) + \frac{1}{2}(y^2 - 1)Q_1(y)\right)\left(P_1(y) - \frac{1}{2}(y^2 - 1)Q_1(y)\right) = y^{2n}$. În prima paranteză este un polinom de grad $2n$ cu primul coeficient $2 \cdot 2^{-n}$ și rezultă $P_1(y) + \frac{1}{2}(y^2 - 1)Q_1(y) = 2^{-(n-1)}y^{2n}$, deci $P_1(y) - \frac{1}{2}(y^2 - 1)Q_1(y) = 2^{n-1}$. De aici $P_1(y) = (2^{-(n-1)}y^{2n} + 2^{n-1})/2$ și $Q_1(y) = (2^{-(n-1)}y^{2n} - 2^{n-1})/(y^2 - 1)$.

Însă $Q_1(y)$ este un polinom, numărătorul său se va anula pentru valorile $y = \pm 1$ ce-i anulează numitorul, deci $2^{-(n-1)} = 2^{n-1}$, $2^{2(n-1)} = 1$, $n = 1$, $Q(x) = 1$, $(P(x))^2 = x^2 - 1 + 1$, $P(x) = x$, aceasta fiind singura posibilitate.

Nici FI3 și nici NL2 nu au fost incluse pe lista ce s-a propus juriului.

8.8. Probleme de geometrie în spațiu

Acest capitol al matematicii părea a deveni un punct nevralgic: de la problema *2* (PL2, vezi 3.1) de la Olimpiada a 15-a, nu s-a mai dat în concurs, la cele patru Olimpiade ce au urmat, nici o problemă de geometrie în spațiu. Problema *3* (NL4, vezi 6.2), dată la Olimpiada a 18-a, nu merita decît în mică parte a fi încadrată în acest domeniu. Includerea pe lista pentru juriu a problemei de geometrie în spațiu VN2 (vezi 8.4, 8.6) nu anunța o schimbare.

Soluțiile problemelor de geometrie în spațiu din lista de la 8.4 sînt următoarele.

Soluția problemei FI2 (vezi 8.4). Mărginindu-ne la planul ecuatorial din enunț, se ajunge la o problemă de geometrie plană!

Condiția de posibilitate din enunț revine (vezi fig. 109), dacă se construiește cercul de diametru AB, și se notează cu C centrul său, la faptul ca acel cerc să intersecteze cercul „Pămînt" și (fig. 109 fiind simetrică față de mediatoarea lui AB) la faptul că raza vizuală MA este deasupra orizontului. A doua condiție se traduce prin $\sphericalangle OMA > 90°$, deci prin aceea că raza OM taie a doua oară cercul de diametru AB într-un punct nesituat pe semicercul acelui cerc ce apare în fig. 109.

Prima din cele două condiții cere ca raza r să fie mai mare sau egală cu $OC-r$, iar a doua — ca r să fie mai mică decît ON, unde N este intersecția lui OB cu cercul de diametru AB (vezi fig. 109). Prima este deci $2r \geqslant ((r+h)^2 - r^2)^{1/2}$, adică $4r^2 \geqslant 2rh + h^2$, $h \leqslant r(\sqrt{5}-1)$, iar a doua $r < r + h - BN$, deci $BN < h$, adică din triunghiul dreptunghic ABD, $AN \perp BD$ etc., $h > AB^2/(2(r+h))$, $2rh + 2h^2 > 4r^2$, $h > r$.

Răspunsul la problemă este $r < h \leqslant r(\sqrt{5} - 1)$.

Fig. 109

Nu este lipsit de interes a compara această problemă cu problema *4* (YU5, vezi 3.1, 3.6) de la Olimpiada a 15-a.

Soluția problemei US6 (vezi 8.4). a) Fie întîi $UVWZ$ un dreptunghi de centru S și T un punct în spațiu (fig. 110). Rezultă, din teorema medianei, $TU^2 + TW^2 = 2TS^2 + 2US^2 = 2TS^2 + 2VS^2 = TV^2 + TZ^2$.

b) În paralelipipedul dreptunghic din problemă (fig. 111) rezultă acum, dacă O este centrul sferei, $OB^2 + OC^2 = OP^2 + OX^2$, $OP^2 +$

Fig. 110

Fig. 111

$+ OQ^2 = OA^2 + OX^2$, de unde, eliminînd OX^2, relația $OA^2 + OB^2 +$ $+ OC^2 = 2OP^2 + OQ^2$; să observăm că este exact una din relațiile din soluția problemei VN4 din 8.6. Cum $OA = OB = OC = R$, notînd astfel raza sferei, se obține $OQ^2 = 3R^2 - 2OP^2$.

Deci locul geometric căutat este inclus în sfera, concentrică cu cea inițială, de rază $(3R^2 - 2OP^2)^{1/2}$.

c) Vom demonstra acum că orice punct al acelei sfere este un punct al locului geometric. Fie $OQ^2 = 3R^2 - 2OP^2$. Deoarece $OP < R$, avem $OQ^2 > R^2$, deci Q este în exteriorul sferei; P este interior. Rezultă că sfera intersectează sfera de diametru PQ; fie A unul din punctele de intersecție.

Să considerăm planul perpendicular în P pe PA și proiecția X a lui Q pe acesta (fig. 112). Deci $Q \| XPA$ etc., $QXPA$ rezultă un dreptunghi, conform cu a) avem $OP^2 + OQ^2 = OA^2 + OX^2$, deci $OX^2 =$ $= OP^2 + (3R^2 - 2OP^2) - R^2 = 2R^2 -$ $- OP^2 > R^2$. Punctul X a rezultat în afara sferei inițiale, deci în afara cercului de intersecție a acelei sfere cu planul considerat; P este în interiorul cercului. Deci cercul de intersecție va avea două puncte comune cu cercul de diametru PX, construit în acel plan; fie B unul din acestea.

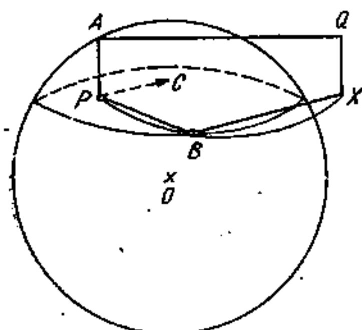


Fig. 112

Segmentele AP, PB, BX, XQ se află printre muchiile unui paralelipiped dreptunghic ce are PQ ca diagonală spațială. Fie PC a treia muchie a acestui paralelipiped ce pleacă din P. Rămîne de arătat că C aparține sferei inițiale.

Conform cu b) avem $OA^2 + OB^2 + OC^2 = 2\,OP^2 + OQ^2$, deci, cum $OA = OB = R$, $OC^2 = 2OP^2 + (3R^2 - 2\,OP^2) - 2R^2 = R^2$, q.e.d.

Soluția problemei VN3 (vezi 8.4). Va trebui dovedit că $(AD+BC)^2 \leqslant$ $\leqslant (AC + BD)^2 + (AB + CD)^2$, prin schimbarea notațiilor rezultînd și alte două inegalități etc.

Dacă înlocuim D cu un punct D' din planul ABC, nesituat în același semiplan determinat de BC ca și A și astfel ca $\Delta BCD =$ $= \Delta BCD'$, atunci membrul stîng al inegalității nu scade (el rămîne același dacă și numai dacă $D' = D$), iar membrul drept nu se schimbă.

Un raționament mai detailat ce conduce la concluzia precedentă a fost prezentat în 3.5, la soluția problemei PL3 (vezi 3.1) de la Olimpiada a 15-a, problemă foarte apropiată ca idee de cea de față.

Problema de aici s-a redus deci la cazul $D = D'$; şi deci, dacă vom demonstra inegalitatea, egalitatea va putea avea loc dacă şi numai dacă $D = D'$.

Inegalitatea se scrie $AD^2 + BC^2 + 2AD \cdot BC \leqslant AC^2 + BD^2 + AB^2 + CD^2 + 2(AC \cdot BD + AB \cdot CD)$. Din teorema medianei se obţine, M, N fiind mijloacele lui BC, AD (fig. 113),

$$AC^2 + AB^2 = 2AM^2 + 2MC^2,$$

$$BD^2 + CD^2 = 2DM^2 + 2MC^2,$$

$$AC^2 + BD^2 + AB^2 + CD^2 = 2(AM^2 + DM^2) + BC^2 = 4MN^2 + AD^2 + BC^2 \geqslant$$

$$\geqslant AD^2 + BC^2,$$

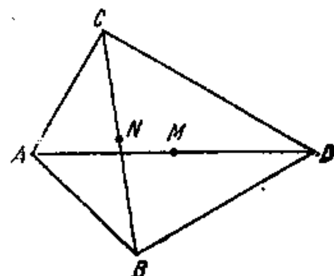


Fig. 113

cu egalitate atunci şi numai atunci cînd $M = N$, ceea ce înseamnă că $ABDC$ este paralelogram. Pe de altă parte, teorema Ptolemeu (vezi problema PL3, citată înainte, din 3.1, rezolvată la 3.5) afirmă că $AD \cdot BC \leqslant AC \cdot BD + AB \cdot CD$, egalitatea avînd loc dacă şi numai dacă $ABDC$ este inscriptibil.

Din cele două inegalităţi obţinute cea cerută rezultă imediat. Triunghiul de care este vorba în enunţ este dreptunghic dacă şi numai dacă A, B, C, D sînt vîrfurile unui paralelogram inscriptibil, adică ale unui dreptunghi.

Soluţia problemei YU3 (vezi 8.4). a) Să înlocuim, pe baza unor teoreme cunoscute de geometrie în spaţiu, cerinţele $a \perp b$, $b \perp c$, $c \perp a$ cu $a \perp b$, $c \perp a \cap b$, unde $a \cap b$ este dreapta de intersecţie a planelor a şi b.

b) Să presupunem acum că p, q, r şi $a \supset p$, $b \supset q$ sînt date. Atunci existenţa unui plan c, care satisface $c \supset r$, $c \perp a \cap b$, este echivalentă cu $r \perp a \cap b$, planul c fiind unic.

Deci problema se reduce la: să se determine două plane $a \supset p$ şi $b \supset q$ astfel încît $a \perp b$ şi $a \cap b \perp r$.

c) Există un caz banal, cel în care p, q, r sînt trei drepte două cîte două perpendiculare, în care este suficient să alegem drept a planul ce trece prin p perpendicular pe r, drept b — pe cel ce trece prin q perpendicular pe r, iar drept c — pe cel ce trece prin r perpendicular pe p; fiecare din planele alese a, b, c conţine o dreaptă (respectiv p, q, r) perpendiculară respectiv pe b, c, a. Pentru completitudine, să observăm că a conţine şi pe q, b pe r, c pe p.

Vom presupune deci că p şi q nu sînt perpendiculare.

d) Dacă înlocuim p, q, r cu drepte respectiv paralele cu ele, la fiecare triplet de plane $a \supset p$, $b \supset q$, $c \supset r$ corespunde tripletul de plane paralele respectiv cu a, b, c ce trec respectiv prin noile drepte etc. Problema se poate trata deci în cazul particular, în care p, q, r trec prin acelaşi punct O.

e) Vom căuta acum, cum se obişnuieşte, să reducem problema la una de geometrie plană. Raţionamentele se pot urmări pe fig. 114.

Fie P un punct pe p, $P \neq 0$. Fie z planul perpendicular pe p în P. Cum q nu este perpendiculară pe p, aceasta va intersecta planul z într-un punct $Q \neq P$. Planul a este determinat de intersecţia sa s cu z, care este o dreaptă ce trece prin P, iar planul $b \supset q$ de intersecţia sa t cu z, care trece prin Q.

Intersecţia $a \cap b$ este dreapta OD, unde D este intersecţia dreptelor s şi t; dacă $s \| t$, atunci $a \cap b$ este paralela prin O la ele.

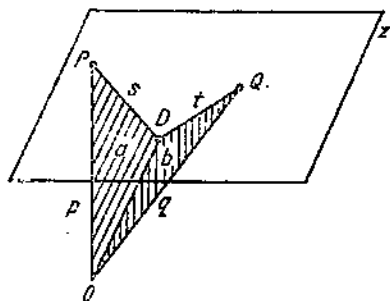


Fig. 114

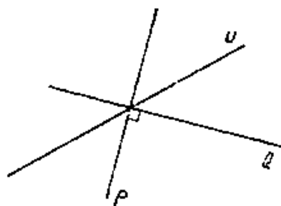


Fig. 115

f) Să vedem cum se exprimă condiţia $a \perp b$ printr-una asupra lui s, t. Avem $z \perp a$, deoarece a conţine pe $p \perp z$. Deci $b \perp a$ implică $t = b \cap z \perp a$ şi apoi $t \perp s$, ca urmare a faptului că $s \subset a$.

Reciproc, $s \perp t$ implică, deoarece $t \perp p$ (dat fiind că $t \subset z \perp p$), faptul că t este perpendiculară pe planul a ce conţine dreptele s şi p, deci că $b \perp a$ (b conţinînd pe t). Cu alte cuvinte, $a \perp b$ se traduce prin $s \perp t$.

g) Condiţia $r \perp a \cap b$, deci $r \perp OD$ se traduce prin faptul că OD este inclusă în planul y, perpendicular în O pe r. Planul y nu poate fi paralel cu z, deoarece ar urma $p = r$ şi p, q, r ar fi toate paralele cu un acelaşi plan, contrar ipotezelor.

În concluzie, $r \perp a \cap b$ se traduce prin : D aparţine intersecţiei u a lui y cu z.

h) Problema s-a redus la următoarea problemă de geometrie plană (fig. 115). Se consideră două puncte diferite P şi Q şi o dreaptă u, toate în acelaşi plan z. Să se construiască două drepte perpendiculare s şi t, ce trec prin P şi Q, care să se intersecteze într-un punct situat pe u.

Această problemă se rezolvă imediat, intersectînd u cu cercul de diametru PQ şi unind punctul obţinut cu P şi Q; dacă el coincide de exemplu cu P, se ia tangenta în P la cerc etc. Pot fi două, una sau nici o soluţie.

Problema VN3, din cauza teoremei Ptolemeu care nu se ştie dacă se predă în toate ţările participante, poate crea avantaje unora. Comisia a ales ca alternative US6 şi YU3. Problema YU3 nu semăna cu altele ce fuseseră propuse juriului în ultimii ani şi stîrnise simpatia „rezolvitorului" (vezi 8.5) prin volumul mic de cunoştinţe utilizate, prin soluţia sa, care, deşi lungă, curgea natural.

Totuşi, pentru a nu risca lipsa geometriei în spaţiu de pe lista de concurs şi la Olimpiada a 20-a, comisia a decis includerea lui US6, ca fiind mai aproape de obişnuinţa concurenţilor, între cele propuse juriului şi menţinerea lui YU3 „în rezervă".

8.9. Probleme cu mulţimi şi cu numere întregi

Nu mai puţin de patru probleme din cele şase propuse concurenţilor la Olimpiada a 19-a s-ar fi încadrat în acest titlu. Nu este de mirare că asemenea probleme sînt foarte agreate la Olimpiada Internaţională; în liceu nu se predau multe teoreme profunde în acest domeniu şi deci aici există multe posibilităţi de a pune întrebări care să solicite mai degrabă iscusinţa decît cunoştinţele.

În lista de 54 de la 8.4 sînt 17 asemenea probleme, anume NL1, a cărei soluţie a fost prezentată în 8.6, şi alte 16, ale căror soluţii urmează.

Soluţia problemei BG1 (vezi 8.4). Pentru fiecare $i = 1, \ldots, k$ să definim $N_i = \{j \mid 1 \leqslant j \leqslant n,\ 2j \in M_i\}$ şi $P_i = \{j \mid 1 \leqslant j \leqslant n,\ 2j - 1 \in M_i\}$. Avem $\{1, \ldots, n\} = N_1 \cup \ldots \cup N_k = P_1 \cup \ldots \cup P_k$, ambele reuniuni fiind disjuncte. Problema cere să se demonstreze că există o pereche i, j, pentru care card $(N_i \cap P_j) > k$. Dacă aceasta nu ar fi adevărat, am deduce, din $\{1, \ldots, n\} = \bigcup_{i,j=1}^{k} (N_i \cap P_j)$, reuniunea fiind disjunctă, $n = \sum_{i,j=1}^{k} \operatorname{card}(N_i \cap P_j) \leqslant \sum_{i,j=1}^{k} k = k^2 \cdot k = k^3$. Deci chiar $n \geqslant k^3 + 1$ este suficient pentru valabilitatea enunţului.

Să observăm şi că $\{N_i \cap P_j | i, j = 1, \ldots, k\}$ reprezintă o partiţie oarecare, formată din k^2 mulţimi, a lui $\{1, \ldots, n\}$. Pentru $n = k^3$ aceasta poate fi aleasă astfel ca toate mulţimile sale să aibă cîte k elemente şi deci pentru un asemenea n afirmaţia din problemă este falsă.

Soluţia problemei CS3 (vezi 8.4). Aceasta constă în raţionamentul din soluţia problemei 11-GB de la Olimpiada a 17-a (vezi 5.1), prezentată în 5.5. Anume, pentru orice p natural să considerăm restul $f_n(p)$ al împărţirii lui p cu n. Există n resturi posibile : $0, 1, \ldots, n-1$. Cum numere prime p sînt o infinitate, vor exista două distincte p şi q cu $f_n(p) = f_n(q)$, deci cu $q - p$ divizibil cu n.

Soluţia problemei CS4 (vezi 8.4). a) Să observăm întîi că un număr n are proprietatea din enunţ dacă şi numai dacă $n > p^2$, p prim implică n divizibil cu p. Într-adevăr, „numai dacă" este imediat (din n nedivizibil cu p ar urma n prim cu p^2 şi $p^2 < n$), iar dacă implicaţia enunţată este adevărată şi n este prim cu un $m < n$, $m > 1$, atunci dacă m n-ar fi prim, el ar fi produsul a k numere prime cu $k \geqslant 2$ şi dacă p ar fi cel mai mic dintre aceste numere prime, ar rezulta $1 < p^2 \leqslant m < n$ şi p^2 prim cu n, contrar ipotezei.

b) Dacă $2 = p_1 < p_2 < \ldots$ sînt toate numerele prime, atunci, dacă $p_t^2 < n \leqslant p_{t+1}^2$, pentru ca n să aibă proprietatea din enunţ este necesar şi suficient ca n să se dividă cu $p_1 \ldots p_t$.

Să facem o listă de numere $p_1 \ldots p_t$: $2, 2 \cdot 3 = 6$, $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310 > 1978$. Deci numerele căutate vor fi : printre cele $\leqslant 4 = p_1^2$ numerele 2, 3, 4, printre cele > 4 şi $\leqslant 9 = p_2^2$ cele divizibile cu 2, deci 6 şi 8, printre cele > 9 şi $\leqslant 25 = p_3^2$ cele divizibile cu 6, deci 12, 18 si 24, printre cele > 25 şi $\leqslant 49 = p_4^2$ cele divizibile cu 30, deci numai 30, printre cele > 49 şi $\leqslant 121 = p_5^2$ cele divizibile cu 210, deci nici unul. Altele < 1978 nu pot exista, deoarece ar trebui să se dividă cu 2310.

Evident că existenţa unor alte numere, $\geqslant 1978$, care să aibă proprietatea din enunţ, reprezintă o problemă mai dificilă de teoria numerelor.

Răspunsul la problemă este 2, 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24 şi 30.

Soluţia problemei OU3 (vezi 8.4). Coincidenţa numerelor formate din ultimele trei cifre din 1978^n respectiv 1978^m, revine la $1978^n - 1978^m = 1000\,k$ cu k întreg, adică la $1978^m(1978^{n-m} - 1) = 2^3 5^3 k$.

În membrul stîng primul factor este divizibil cu 2, dar nu cu 5, iar al doilea nu este divizibil cu 2. Deci relaţia revine la

$$1978^m = 2^3 k_1, \quad 1978^{n-m} - 1 = 5^3 k_2 = 125\,k_2.$$

Cum $m + n = (n - m) + 2m$, rezultă că va trebui găsit m minim ce o satisface pe prima şi $n - m$ minim ce o satisface pe a doua.

Numărul 1978 este divizibil cu 2, dar nu cu 2^2; aceasta conduce la m minim egal cu 3.

Să determinăm întîi toţi exponenţii $p > 0$ pentru care $1978^p - 1 = 5k_3$. Avem $1978 \equiv -2 (\text{mod } 5)$, $(-2)^2 \equiv -1 (\text{mod } 5)$ etc., deci aceşti exponenţi sînt toate numerele de forma $p = 4q$ cu q întreg > 0.

Pentru a determina toţi exponenţii $p = 4q$ pentru care $1978^p - 1 = 125k_2$, să observăm că $1978 \equiv -22 (\text{mod } 125)$, $1978^4 \equiv (-22)^4 (\text{mod } 125) \equiv (2 \cdot 11)^4 (\text{mod } 125) \equiv 2^4 121^2 (\text{mod } 125) \equiv 2^4 4^2 (\text{mod } 125) \equiv 256 (\text{mod } 125) \equiv 6 (\text{mod } 125)$. În consecinţă, relaţia $1978^{4q} - 1 = 5^3 k_2$ revine la $6^q - 1 = 5^3 k_4$, deci la $(1 + 5)^q - 1 =$

$$= 5^3 k_4,\ 1 + q \cdot 5 + \frac{q(q-1)}{2} 5^2 - 1 = 5^3 k_5 = 5^2 (5k_5), \text{ de unde întîi } q = 5s$$

şi apoi $5^2 s + \dfrac{s(5s-1)}{2} 5^3 = 5^3 k_5$, deci $s = 5t$; rezultă $p = 4 \cdot 5^2 t$.

În concluzie, $1978^{n-m} - 1 = 5^3 k_2$ este echivalent cu $n - m = 4 \cdot 5^2 t$ şi $n - m$ minim este 100, $n + m = (n - m) + 2m$ minim este deci 106, atins pentru $n = 103$ şi $m = 3$.

Această problemă a fost apreciată de comisie drept una dintre cele mai potrivite, dintre cele de mai mică dificultate.

Soluţia problemei DE2 (vezi 8.4). a) Să determinăm întîi care sînt toate numerele din M_1.

$x \notin M_1$ este echivalent cu $x = a + (a + 1) + \ldots + (a + n - 1)$, în care $a \geqslant 1$, $n \geqslant 2$, deci cu $x = (2a + n - 1)n/2$. Diferenţa dintre factorii de la numărător este $2a - 1$, deci unul este par şi celălalt impar. Condiţia $a \geqslant 1$ este echivalentă cu faptul că primul factor este mai mare decît al doilea, care este $\geqslant 2$ ca urmare a faptului că $n \geqslant 2$. Deci $x \notin M_1$ este echivalent cu: $2x$ se poate scrie ca produs de doi factori de parităţi diferite, ambii $\geqslant 2$. Aceasta revine la $2x = 2^k m$ cu $k \geqslant 1$ şi $m \neq 1$ impar; prin împărţire la 2 condiţia $k \geqslant 1$ devine $k \geqslant 0$.

Am ajuns la concluzia că M_1 este formată din $1, 2, \ldots, 2^k, \ldots$

b) Să determinăm acum care sînt toate numerele din M_2.

$x \notin M_2$ este echivalent cu $x = a + (a + 2) + \ldots + (a + 2(n-1)) = (a + n - 1)n$, cu $a \geqslant 1, n \geqslant 2$. Condiţia $a \geqslant 1$ se traduce prin faptul că primul factor este mai mare sau egal cu al doilea, care este $\geqslant 2$. Deci $x \notin M_2$ este echivalent cu x neprim, $x \geqslant 2$.

Am ajuns la concluzia că M_2 este formată din 1 şi din toate numerele prime; deci $M_2 \setminus \{2\}$ este formată din 1 şi din toate numerele prime impare.

c) Afirmația din enunț relativă la unicitate rezultă acum: $2^k p = 2^m q$ cu p, q primi impari sau 1 implică $p = q$ și apoi $k = m$.

d) Nu este nevoie să determinăm M_3, ci numai să arătăm că M_3 este inclusă în mulțimea M_3' formată din toate numerele de forma $2^k p$ cu $p = 1$ sau cu p prim $\neq 2$. Vom arăta, invers, că orice număr ce nu este în M_3' nu este nici în M_3. Aceasta revine la a arăta că dacă $x = 2^k pq$ cu $p, q > 1$ impari, atunci x se poate scrie sub forma $x = a + (a + 3) + \ldots + (a + 3(n - 1)) = n(2a + 3n - 3)/2$, cu $a \geqslant 1$ și $n \geqslant 2$, cu alte cuvinte, că $2x = 2^{k+1}pq$ se poate scrie sub forma nm, cu $n \geqslant 2$ și $m \geqslant 3n - 1$, unde n și m sînt de parități diferite.

Să presupunem că $p \geqslant q$. Dacă încercăm să luăm $n = q$, rezultă $m = 2^{k+1}p \geqslant 2^{k+1}q$ și, pentru $k \geqslant 1$, acesta este mai mare ca $4q = 4n$. În cazul rămas, $k = 0$, alegem $n = 2$ și rezultă $m = pq \geqslant 3^2 > 5 = 3 \cdot 2 - 1 = 3n - 1$ și cu aceasta problema este complet rezolvată.

Observație. Era necesar a determina precis M_1 și M_2: mărirea uneia ar fi putut periclita valabilitatea afirmației relative la unicitate, iar micșorarea pe cea relativă la existență.

Incluziunea $M_3 \subset M_3'$ este strictă; avem $1 + 4 + 7 = 12$, deci $12 \notin M_3$, dar $12 = 2^2 \cdot 3 \in M_3'$.

Problema DE2 a fost apreciată de comisie drept foarte frumoasă, dar totuși dificilă, deși calea spre soluția ei nu pare a fi presărată cu „cotituri".

Soluția problemei FR1 (vezi 8.4). Conform teoremei lui Euler, oricare ar fi n prim cu 10, există un k întreg pentru care n divide pe $10^k - 1$, deci pe $99\ldots9$. Dar n poate fi multiplu de 3, așa încît vom aplica acea teoremă lui $9n$, care este și el prim cu 10, deci $9n$ va divide un număr de forma $99\ldots9$, iar n va divide $11\ldots1$ corespunzător.

Se poate evita teorema lui Euler, pe aceeași cale prin care aceasta a fost evitată în cea de-a doua soluție dată în 7.3 problemei 10-NL (vezi 7.2), de la Olimpiada a 19-a.

Soluția problemei FR3 (vezi 8.4). Această problemă este, într-un anumit sens, cunoscută. Este remarcabilă soluția autorilor, ce o dăm și aici.

a) Dacă prima afirmație din enunț n-ar fi adevărată, am putea găsi un triplet (x_0, y_0, z_0) ce ar infirma-o, cu z_0 minim posibil și cu $x_0 \leqslant y_0$. Deci $x_0 y_0 - z_0^2 = 1$, $x_0, y_0, z_0 \geqslant 1$ și nu există a, b, c, d întregi nenegativi pentru care $x = a^2 + b^2$, $y = c^2 + d^2$, $z = ac + bd$. Vom căuta să ajungem la o contradicție.

b) Vom construi, plecînd de la (x_0, y_0, z_0), alt triplet care să satisfacă relația $xy - z^2 = 1$. Fie $z = u + x$; acea relație devine $xy - x^2 - 2xu - u^2 = 1$ sau $x(y - x - 2u) - u^2 = 1$. Cum $u = z - x$, rezultă $y - x - 2u = y + x - 2z$.

Deci $(x_0, x_0+y_0-2z_0, z_0-x_0)$ este un triplet ce satisface $xy-z^2=1$.

c) Să verificăm că tripletul construit la b) are toate componentele $\geqslant 1$. Avem întîi, media geometrică a două numere pozitive nedepăşind-o pe cea aritmetică $z_0^2 = x_0y_0 - 1 < x_0y_0 \leqslant ((x_0+y_0)/2)^2$, deci $z_0 < (x_0+y_0)/2$ şi $x_0 + y_0 - 2z_0 > 0$. Pe de altă parte, dacă $z_0 - x_0 \leqslant 0$, rezultă $z_0 \leqslant x_0 \leqslant y_0$.

Dacă $z_0 = x_0$, atunci $x_0(y_0 - x_0) = 1$, $x_0 = 1 = 1^2 + 0^2$, $y_0 = 2 = 1^2 + 1^2$, $z_0 = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1$, deci contrar presupunerii de la a), cu $a = c = d = 1$, $b = 0$.

Dacă $z_0 < x_0$, atunci $1 = x_0y_0 - z_0^2 \geqslant x_0^2 - z_0^2 \geqslant (z_0+1)^2 - z_0^2 = 2z_0 + 1$, deci $z_0 \leqslant 0$, de asemenea contrar presupunerilor de la a).

d) Cum $z_0 - x_0 < z_0$, pentru tripletul construit la b) afirmaţia din enunţ este adevărată, deci $x_0 = m^2 + n^2$, $x_0 + y_0 - 2z_0 = p^2 + q^2$, $z_0 - x_0 = mp + nq$. Din aceste relaţii se obţine $z_0 = m^2 + n^2 + mp + nq = m(m+p) + n(n+q)$ şi apoi $y_0 = p^2 + q^2 + 2z_0 - x_0 = p^2 + q^2 + 2mp + 2nq + m^2 + n^2 = (m+p)^2 + (n+q)^2$. Dar aceasta contrazice presupunerea de la a), dacă notăm $a = m$, $b = n$, $c = m + p$, $d = n + q$.

Deci prima afirmaţie din enunţ a fost dovedită.

e) Pentru a demonstra că orice număr prim p de forma $p = 4n + 1$ este o sumă de două pătrate perfecte, ne bazăm pe teorema Wilson $(p-1)! + 1 = pr$ şi obţinem $(4n)! + 1 = pr$. Dar $(4n)! = (2n)!(4n+1-1)(4n+1-2)\ldots(4n+1-2n) \equiv (2n)!(-1)^{2n}(2n)! (\mathrm{mod}(4n+1)) \equiv ((2n)!)^2 (\mathrm{mod}\ p)$ şi rezultă $((2n)!)^2 = py - 1$. Aplicînd proprietatea demonstrată, pentru $p = x$ şi $z = (2n)!$, se deduce concluzia dorită.

Soluţia problemei GB3 (vezi 8.4). a) Avem $1978 = 2 \cdot 23 \cdot 43$, deci are opt divizori pozitivi. Înlocuind, dacă este cazul, x cu $-x$ şi y cu $-y$, ajungem să putem presupune $x^2 + y^2 = m(x + y)$ cu $m > 0$, $x \neq 0$, $y \neq 0$. Nu vom încerca însă, pe rînd, cele opt valori posibile pentru m, ci vom utiliza un fapt din lumea de idei a problemei FR3 (problema precedentă).

b) Dacă un număr prim $p \neq 2$ divide $a^2 + b^2$ şi dacă a şi b nu se divid amîndoi cu p, atunci $p = 4n + 1$.

Pentru a dovedi aceasta, să presupunem că b nu se divide cu p, deci că acesta este prim cu p. Va exista deci c cu $bc - kp = 1$ şi obţinem $(ac)^2 + 1 = pr$, adică $(ac)^2 = -1 (\mathrm{mod}\ p)$ şi apoi $(ac)^{p-1} = ((ac)^2)^{(p-1)/2} \equiv (-1)^{(p-1)/2} (\mathrm{mod}\ p)$. Dar $(ac)^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$ ca urmare a teoremei Fermat şi deci, cum $p \neq 2$, adică $1 \not\equiv -1 (\mathrm{mod}\ p)$, rezultă că $(p-1)/2$ este par; afirmaţia de la începutul lui b) este demonstrată.

c) În problemă nu se presupune că x și y nu se divid amîndoi cu m. Dar, dacă d este c.m.m.d.c. al lui x și y, avem $x = dz$, $y = dt$ și rezultă $d(z^2 + t^2) = m(z + t)$ și apoi, împărțind cu cel mai mare divizor comun al lui d și m, o relație de forma $k(z^2 + t^2) = n(z + t)$ în care n este un divizor al lui 1978 și n divide $z^2 + t^2$. Se știe și că $z \neq 0$, $t \neq 0$ și se cere să se demonstreze că $z = t$.

d) Cum z și t sînt primi între ei, dacă p este un divizor prim al lui n diferit de 2, rezultă din b) că $p = 4r + 1$. Dar $23 = 4 \cdot 5 + 3, 43 = 4 \cdot 10 + 3$, iar p este un divizor prim și al lui 1978, deci $n = 1$ sau $n = 2$.

e) Știm deci că are loc una din relațiile $k(z^2 + t^2) = z + t$, $k(z^2 + t^2) = 2(z + t)$. Înmulțindu-le respectiv cu $4k$ și k, acestea devin $4k^2(z^2 + t^2) = 4k(z + t)$ și $k^2(z^2 + t^2) = 2k(z + t)$ și apoi $(2kz-1)^2+(2kt-1)^2=2$ și $(kz-1)^2 + (kt-1)^2 = 2$. Din prima rezultă $2kz - 1 = \pm1$, $2kt - 1 = \pm1$, din a doua $kz - 1 = \pm1$, $kt - 1 = \pm1$. Semnele $-$ sînt excluse de $z \neq 0$ și $t \neq 0$ și obținem $2kz = 2kt = 2$, respectiv $kz = kt = 2$ și afirmația la care s-a redus problema (vezi c)) este dovedită.

Rezultă și $k = 1$ dacă $n = 1$ și $k = 1$ sau 2 dacă $n = 2$. În schimb, cel mai mare divizor comun al lui m și d poate fi un divizor oarecare al lui $1978/n$. De exemplu, $x = y = 43$, $m = 43$, $n = 1$.

Problema se dovedește mai dificilă decît pare. Dar o mică apropiere a soluției ei cu cea a problemei FR3, o asemănare formală cu problema *5* (3-DE, vezi 7.2) de la Olimpiada a 19-a și, mai ales, faptul că era urmată de problemele GB4 și GB5, ce se încadrau în aceeași categorie, dar au apărut mai atractive (vezi și 8.5) au determinat comisia să-i acorde mai puțină atenție.

Soluția problemei GB4 (vezi 8.4). a) M este formată din toate numerele pozitive $30m$ prime cu 10. Între $10r$ și $10(r + 1)$ există patru astfel de numere : $10r + 1$, $10r + 3$, $10r + 7$, $10r + 9$. Mulțimea M conține $3m$ astfel de „tranșe" și deci are $12m$ elemente.

b) Să considerăm, ca ilustrație, întîi cazul $m = 1$, deci $M = \{1, 3, 7, 9; 11, 13, 17, 19; 21, 23, 27, 29\}$. Aici 1 divide pe 3 care divide pe 9 care divide pe 27, iar 7 divide pe 21. Au rămas alte șase numere în M. Deci dacă alegem nouă numere din M, vor exista cel puțin două dintre ele într-una din mulțimile $\{1, 3, 9, 27\}$ sau $\{7, 21\}$ și deci se vor divide unul la celălalt.

Dacă alegem cîte un număr din $\{1, 3, 9, 27\}$ și $\{7, 21\}$, se poate întîmpla ca unul să se dividă la celălalt: 21 și 7 la 1, 21 la 3. Dar putem alege opt numere din M, care să nu se dividă unul la celălalt, alegînd pe cele șase „rămase" 11, 13, 17, 19, 23, 29 și cele mai mari din cele două submulțimi menționate, deci 27 și 21.

În cazul $m = 1$ răspunsul este deci $k = 9$, care apare a fi $8m + 1$.

c) Să arătăm că $k = 8m + 1$ este răspunsul și în cazul general; cele stabilite la b) ne arată calea.

Pe baza celor arătate la a), $P = \{x | x \in M, x > 10m\}$ are $4 \cdot 2m = 8m$ elemente. Dacă $x, y \in P$, $x \neq y$ și x se divide la y, adică $x = yz$ atunci $z \geqslant 3$, deoarece x nu se divide cu 2. Dar $30m > x \geqslant 3y > 3 \cdot 10m = 30m$ — contradicție. Cu aceasta s-a demonstrat că avem $k > 8m$.

Să atașăm fiecărui $q \in M$ numărul $3^r q$, cu $r \geqslant 0$, așa încît $3^r q \in M$, $3^{r+1}q \notin M$. Rezultă $3^r q < 30m < 3^{r+1}q$, deci $10m < 3^r q < 30m$, adică $3^r q \in P$. Cum în P sînt $8m$ numere, dacă $Q \subset M$ are cel puțin $8m + 1$ elemente, vor exista $q, q' \in Q$, de exemplu $q < q'$, pentru care cele două numere atașate mai sus sînt egale, deci $3^r q = 3^{r'} q'$, $r > r'$ și $q' = 3^{r-r'}q$, adică q' se divide cu q.

Cu aceasta s-a demonstrat că $k \leqslant 8m + 1$ și problema este complet rezolvată.

Soluția problemei GB5 (vezi 8.4). a) Există un algoritm care conduce la determinarea succesivă a lui $f(1), \ldots, f(n), \ldots$ și care se poate urmări pe fig. 116, unde (n) a fost scris sub $f(f(n)) + 1$.

Înainte de toate, avem $f(1) = 1$, altfel 1 ar fi primul ce ar lipsi din șir și ar urma $1 = f(f(1)) + 1$, $f(f(1)) = 0$, imposibil.

Primul termen ce lipsește este deci $f(f(1)) + 1 = 2$. Rezultă că $f(2) \geqslant 3$, $f(3) \geqslant 4$ și despre al doilea ce lipsește putem spune că este $f(f(2)) + 1 \geqslant f(3) + 1 \geqslant 5$ și deducem $f(2) = 3$, $f(3) = 4$ al doilea ce lipsește este deci $f(f(2)) + 1 = 5$.

Rezultă $f(4) \geqslant 6$, $f(5) \geqslant 7$; al treilea ce lipsește va fi $f(f(3)) + 1 = f(4) + 1 \geqslant 7$, deci 6 este în șir, $f(4) = 6$ și al treilea ce lipsește este chiar 7 etc. (fig. 116).

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
1 3 4 6 8 9 11 12 14 16 17 19 21 22 24
(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9)

Fig. 116

Dar a rezolva problema, adică a determina $f(240)$, prin acest algoritm nu este în spiritul Olimpiadei (vezi 4.3, soluția problemei I1-US), deși nu ar dura mult.

b) Să observăm că $f(n)$ este mai mare decît n cu numărul de elemente $f(n)$ ce lipsesc din șir:

$$f(n) = n + \operatorname{card}\{k | f(f(k)) < f(n)\},$$

$(f(f(k)) + 1 < f(n)$ este echivalent cu $f(f(k)) < f(n)$ deoarece, conform ipotezei, $f(f(k)) + 1$ nu poate fi egal cu $f(n)$).

Sub această formă relația este „o ecuație în $f(n)$", dar ea se transformă imediat în $f(n) = n + \text{card}\{k | f(k) < n\}$.

c) Fie $a_1 = 2$ și $a_{n+1} = f(a_n)$. Relația de la b) conduce, pentru $n > 1$, la

$$a_{n+1} = a_n + \text{card}\{k | f(k) < a_n\} = a_n + \text{card}\{k | f(k) < f(a_{n-1})\} =$$

$$= a_n + \text{card}\{k | k < a_{n-1}\} = a_n + a_{n-1} - 1.$$

Notînd $b_n = a_n - 1$, rezultă că b_n satisfac relația de recurență a șirului Fibonacci $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$; acesta este chiar șirul Fibonacci, deoarece din a) deducem $b_1 = 1$, $b_2 = 2$.

d) Să scriem acum $f(b_{n+1} + r) = b_{n+1} + r + \text{card}\{k | f(k) < b_{n+1} + r\} = b_{n+1} + r + \text{card}\{k | f(k) \leqslant b_{n+1}\} + \text{card}\{k | b_{n+1} < f(k) < b_{n+1} + r\}$ (conform cu b)).

Inegalitatea $f(k) \leqslant b_{n+1}$, cum $b_{n+1} = a_{n+1} - 1 = f(a_n) - 1$, este echivalentă cu $f(k) < f(a_n)$, deci cu $k < a_n$, iar $f(k) > b_{n+1}$ cu $k \geqslant a_n = b_n + 1$, deci cu $k = b_n + u$, $u > 0$.

Obținem $f(b_{n+1} + r) = b_{n+1} + r + \text{card}\{k | k < a_n\} + \text{card}\{u | u > 0, f(b_n + u) < b_{n+1} + r\} = b_{n+1} + r + a_n - 1 + \text{card}\{u | u > 0, f(b_n + u) < b_{n+1} + r\}$, în care $b_{n+1} + a_n - 1 = b_{n+1} + b_n = b_{n+2}$.

Această formulă ne-ar permite să demonstrăm prin inducție că $f(b_n + r) = b_{n+1} + f(r)$, anume să realizăm pasul de la n la $n + 1$, continuînd astfel

$$f(b_{n+1} + r) = b_{n+2} + r + \text{card}\{u | u > 0, b_{n+1} + f(u) < b_{n+1} + r\} =$$

$$= b_{n+2} + f(r).$$

Dar pasul inițial al unei astfel de inducții nu funcționează! Avem $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, dar $f(1 + r) = 2 + f(r)$ este adevărat pentru $r = 1$ și $r = 2$, însă nu pentru $r = 3$. De aceea vom demonstra prin inducție formula $f(b_n + r) = b_{n+1} + f(r)$, dar numai pentru $r \leqslant b_{n+1}$. În raționamentul precedent vom presupune deci $r \leqslant b_{n+2}$ și relația $f(b_n + u) < b_{n+1} + r$ va conduce la $f(b_n + u) < b_{n+1} + b_{n+2} = b_{n+3} = f(a_{n+2}) - 1$, $b_n + u < a_{n+2}$, $b_n + u \leqslant b_{n+2} = b_n + b_{n+1}$, $u \leqslant b_{n+1}$ și $f(b_n + u) = b_{n+1} + f(u)$ va fi deci aplicabilă, ca urmare a ipotezei de inducție.

Am dovedit deci că $f(b_n + u) = b_{n+1} + f(u)$ pentru $1 \leqslant u \leqslant b_{n+1}$.

e) Pentru a beneficia de rezultatul de la d), să observăm că pentru orice întreg $n \geqslant 1$ există k cu $b_k \leqslant n < b_{k+1} = b_k + b_{k-1}$ și rezultă

$n = b_k + m$ cu $0 \leqslant m < b_{k-1}$; apoi pe m îl tratăm la fel, k înlocuindu-se cu un număr $\leqslant k - 2$ etc. Obținem, pentru orice n întreg $\geqslant 2$, aplicînd cele precedente lui $n - 1$, o reprezentare de forma $n = 1 + b_{k_1} + b_{k_2} + \ldots + b_{k_r}$, în care $k_i \geqslant k_{i+1} + 2$ pentru orice i și $k_r \geqslant 1$. Chiar din raționamentul precedent se obține $b_{k_{i+1}} + \ldots + b_{k_r} < b_{k_i - 1}$, deși aceasta s-ar putea verifica și direct, succesiv pentru $i = r - 1, r - 2, \ldots, 1$.

Conform celor stabilite la d) rezultă $f(n) = f(b_{k_1} + (1 + b_{k_2} + \ldots + b_{k_r})) = b_{k_1+1} + f(1 + b_{k_2} + \ldots + b_{k_r})$ etc., deci $f(n) = 1 + b_{k_1+1} + b_{k_2+1} + \ldots + b_{k_r+1}$ pentru $n = 1 + b_{k_1} + b_{k_2} + \ldots + b_{k_r}$ cu $k_i \geqslant k_{i+1} + 2$, $k_r \geqslant 1$.

f) Acum calculul lui $f(240)$ este mult facilitat. Șirul Fibonacci este 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ..., deci $240 = 1 + 233 + 5 + 1 = 1 + b_{12} + b_4 + b_1$ și $f(240) = 1 + b_{13} + b_5 + b_2 = 1 + 377 + 8 + 2 = 388$.

Soluția autorilor pentru problema GB5 (vezi 8.4). Se începe cu observația că $f(f(n)) = f(n) + n - 1$, care se argumentează la fel ca la începutul lui b) din soluția precedentă, precum și cu $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, care se obțin la fel ca în a) din acea soluție. Se continuă cu

$$f(3) = f(f(2)) = f(2) + 1 = 4, \quad f(4) = f(f(3)) = f(3) + 2 = 6,$$

$$f(6) = f(f(4)) = f(4) + 3 = 9, \quad f(9) = f(f(6)) = f(6) + 5 = 14,$$

$$f(14) = f(f(9)) = f(9) + 8 = 22, \quad f(22) = f(f(14)) = f(14) + 13 = 35,$$

$$f(35) = f(f(22)) = f(22) + 21 = 56, \quad f(56) = f(f(35)) = f(35) + 34 = 90,$$

$$f(90) = f(f(56)) = f(56) + 55 = 145, \quad f(145) = f(f(90)) = f(90) +$$

$$+ 89 = 234, \quad f(234) = f(f(145)) = f(145) + 144 = 378,$$

concluzii care echivalează cu cele de la c) din soluția precedentă.

Se observă apoi că $91 = f(f(35)) + 1$ lipsește din șir, deci $f(57) = 92$, $f(92) = f(f(57)) = f(57) + 56 = 148$, $f(148) = f(f(92)) = f(92) + 91 = 239$, $f(239) = f(f(148)) = f(148) + 147 = 386$, după aceasta că $387 = f(f(148)) + 1$ lipsește din șir, deci că $f(240) = 388$.

Observație. Din aspectul primilor termeni ai șirului $f(n)$, prezentați ilustrativ în punctul a) al primei soluții, rezultă ipoteza că acest șir nu conține nici un triplet de întregi consecutivi și că din acesta nu lipsește nici o pereche de întregi consecutivi. Aceasta este o consecință directă a enunțului: după orice $f(f(n))$ urmează un întreg

lipsă, deci prezența a trei întregi consecutivi $f(k)$, $f(k+1)$, $f(k+2)$ în șir ar reclama lipsa din șir a lui k și a lui $k+1$, însă orice întreg ce lipsește este un $f(f(n))+1$, deci este precedat de unul ce apare în șir.

Se arată cu ușurință că dacă n este în șir, atunci $f(n+1)=f(n)+2$, iar dacă n nu este în șir, atunci $f(n+1)=f(n)+1$. Nu s-a întrevăzut o cale de a ajunge de la aceste observații la o formulă generală cum este cea stabilită în prima soluție.

Problema GB5 s-a bucurat de cea mai călduroasă recomandare din partea rezolvitorului (vezi 8.5).

Soluția problemei NL3 (vezi 8.4). Ecuația cercului din enunț este $(x-989)^2+(y-989)^2=2\cdot 989^2$. Mai departe soluția problemei seamănă cu cea a lui GB3, prezentată anterior în acest paragraf, dar este mai simplă. Se scrie $2\cdot 989^2=u^2+v^2$ cu $u, v>0$ întregi, sau $2\cdot 23^2\cdot 43^2=u^2+v^2$, se consideră c.m.m.d. comun d al lui u și v, pătratul său trebuie să dividă membrul stîng, deci d va divide $23\cdot 43$. Dacă $u=dz$, $v=dw$, obținem $2m^2=z^2+w^2$ cu z, w primi între ei și m — un divizor al lui $23\cdot 43$, mai precis $dm=23\cdot 43$. Însă un divizor prim al lui z^2+w^2 este, conform punctului b) din soluția problemei GB3, de forma $4k+1$, deci el nu poate fi nici 23, nici 43, adică $m=1$, $z=w=1$, $d=23\cdot 43$, $u=v=23\cdot 43=$ $=989$, $x-989=\pm 989$, $y-989=\pm 989$, q.e.d.

Soluția problemei TR1 (vezi 8.4). Numărul marcat la pasul n este congruent cu $-14+15n$ modulo 1000. Acesta coincide cu cel marcat la pasul $m>n$ dacă și numai dacă $(-14+15m)-(-14+15n)=$ $=15(m-n)$ este multiplu de 1000, adică $m-n$ este multiplu de 200 (deoarece $15=5\cdot 3$, $1000=5\cdot 200$ etc.). Pasul m minim este deci 201, corespunzător lui $n=1$, și sînt 200 numere marcate.

Soluția problemei TR4 (vezi 8.4). Avem $A=1+10+\ldots$ $\ldots+10^{2m-1}=(10^{2m}-1)/9$, $B=4\,(10^m-1)/9$, deci $A+B+1=$ $=(10^{2m}-1+4(10^m-1)+9)/9=(10^{2m}+4\cdot 10^m+4)/9=((10^m+$ $+2)/3)^2$ și numărul $(10^m+2)/3$ este întreg, deoarece $10\equiv 1 \pmod 3$, $10^m+2\equiv 3 \pmod 3$ etc.

Soluția problemei TR5. Pentru $n=p$ relația revine la $1=1$. Pentru a putea aplica inducția după n va trebui dovedit că $C_{n+1}^p=$ $=C_n^p+C_n^{p-1}$, ceea ce, conform formulei combinărilor, revine la

$$(n+1)!/(p!(n+1-p)!)=(n!/(p!(n-p)!))+$$
$$+(n!/((p-1)!(n-p+1)!)),$$

deci la $n+1=n+1-p+p$. Avem $S=6(C_3^3+C_4^3+\ldots$ $\ldots+C_{99}^3)=6C_{100}^4=100\cdot 99\cdot 98\cdot 97/4$ etc.

Soluția problemei US3 (vezi 8.4). Avem $(1/p^2) + (1/p^2) = 2/p^2$ și „nu ne trebuie“, iar $(1/p^2) + (1/p)$ $(p+1)/p^2$ și nici ea nu este în listă. Există însă șansa de a obține una din fracțiile din enunț după efectuarea lui $(1/x) + (1/y)$, urmată de o simplificare. Aceasta ne conduce la ideea $(1/ap^2) + (1/ap) = (p+1)/ap^2$, deci la a alege a egal cu un divizor al lui $p+1$. Un a bun pentru toți $p > 3$ este $a = 2$ și acesta rezolvă problema, deoarece condiția $3 \leqslant (p+1)/2 \leqslant \leqslant p - 2$ revine la $6 \leqslant p + 1$ și $p \geqslant 5$ care sînt adevărate pentru $p > 3$, p fiind prim.

Soluția problemei YU1 (vezi 8.4). Procedura seamănă cu inducția, deși nu i se subsumează în mod natural.

Fie $A = \{a_1, \ldots, a_{p-1}\}$. Să considerăm mulțimile $A_0 = \emptyset$, $A_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$, deci $A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_{p-1} = A$. Să considerăm și $P_n = \{f(B) | B \subset A_n\}$. Avem $\{0\} = \{f(\emptyset)\} = P_0 \subset P_1 \subset \ldots \ldots \subset P_{p-1} \subset P$. Problema se pune a dovedi că $P_{p-1} = P$.

Să observăm că $1 = \text{card } P_0 \leqslant \text{card } P_1 \leqslant \ldots \leqslant \text{card } P_{p-1} \leqslant \leqslant \text{card } P = p$. Dacă toate aceste inegalități ar fi stricte, ar urma $\text{card } P_i \geqslant i + 1$, deci $\text{card } P_{p-1} \geqslant p = \text{card } P$, adică $P_{p-1} = P$ și problema ar fi rezolvată.

În caz contrar există n cu $P_n = P_{n+1}$. Submulțimile lui A_{n+1} sînt toate submulțimile lui A_n și cele de forma $B = B' \cup \{a_{n+1}\}$ cu $B' \subset A_n$. Deci $f(B) \equiv f(B') + a_{n+1} (\text{mod } p)$.

Relația $P_n = P_{n+1}$ afirmă că pentru orice $x \in P_n$ numărul $x + a_{n+1}$ este în P_n, modulo p. Dar $0 \in P_0$, deci $0 \in P_n$ și rezultă $a_{n+1} \in P_n$, apoi $2a_{n+1} \in P_n, \ldots, ka_{n+1} \in P_n$ pentru orice k, toate modulo p.

Ipoteza ne spune însă că a_{n+1} nu este multiplu de p, deci resturile împărțirilor lui $a_{n+1}, 2a_{n+1}, \ldots, pa_{n+1}$ cu p sînt toate numerele $0, 1, \ldots \ldots, p-1$ (două din ele nu pot coincide, deoarece ar urma prin scădere ka_{n+1} multiplu de p cu un $k < p$ și p fiind prim...). Cu alte cuvinte, $P_n = P_{n+1}$ implică $P_n = P$, q.e.d.

Rezolvarea acestei probleme conține și ea un moment, cel „inițial“, care nu pare a se impune, ci trebuie descoperit.

Comisia a introdus în lista celor propuse juriului șase din aceste 16 probleme, anume BG1, CU3, DE2, GB4, GB5 și YU1, iar pe lista rezervelor problema US3 (în aparență simplă, dar care poate „încurca“ pe cineva). Controverse au avut loc în legătură cu problema FR3 : cunoscută, dar potrivită Olimpiadei prin soluția ei. Pînă la urmă a fost inclusă pe lista pentru juriu ca a 17-a problemă.

15 — c. 647

8.10. Probleme cu inegalități

În această categorie ar fi putut fi incluse și unele probleme de geometrie plană, ale căror soluții vor fi prezentate în 8.11. Lăsînd la o parte și problema SE3, calificată drept prea dificilă (vezi 8.6), rămîn în total doar cinci; prezentăm în continuare soluțiile lor.

Soluția problemei FR2 (vezi 8.4). De fapt, fixînd pe n, este vorba de o funcție injectivă f de la $\{1, 2, \ldots, n\}$ la $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

a) Vom considera întîi toate funcțiile bijective s de la $\{1, 2, \ldots, n\}$ la $\{1, 2, \ldots, n\}$, adică toate permutările de n numere, și vom determina una din ele pentru care $\sum_{k=1}^{n} f(s(k))k^{-2}$ este minim posibilă, f fiind dat. Cum asemenea s sînt în număr finit, există un s pentru care acel minim este atins. Fie $g(k) = f(s(k))$.

Dacă t este o permutare oarecare a lui $1, 2, \ldots, n$, atunci

$$\sum_{k=1}^{n} g(t(k))k^{-2} \geqslant \sum_{k=1}^{n} g(k)k^{-2},$$

ca urmare a relației $g\circ t = f\circ(s\circ t)$ și a faptului că $s\circ t$ este tot o permutare.

Să alegem $1 \leqslant i < j \leqslant n$ și $t(i) = j$, $t(j) = i$, $t(k) = k$ pentru $k \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i, j\}$. Inegalitatea ce leagă $g\circ t$ de g se scrie în această situație

$$g(j)i^{-2} + g(i)j^{-2} \geqslant g(i)i^{-2} + g(j)j^{-2} \text{ sau } (g(j) - g(i))(i^{-2} - j^{-2}) \geqslant 0.$$

Cum $i < j$ implică $i^{-2} > j^{-2}$, rezultă $g(j) \geqslant g(i)$ și apoi, cum $g = f\circ s$ este și ea injectivă, rezultă $g(j) > g(i)$. În plus, s ce realizează minimul este unică.

b) Conform cu a) avem $\sum_{k=1}^{n} f(k)k^{-2} \geqslant \sum_{k=1}^{n} g(k)k^{-2}$. Dar g fiind strict crescătoare (vezi concluzia de la a)), rezultă $g(k) \geqslant k$, deci $\sum_{k=1}^{n} g(k)k^{-2} \geqslant$ $\geqslant \sum_{k=1}^{n} k^{-1}$ și problema este rezolvată.

Se observă că egalitatea are loc dacă și numai dacă $f(k) = k$ pentru orice $k = 1, 2, \ldots, n$.

Soluția problemei FR4 (vezi 8.4). Fie C cercul (plin) din planul xOy, format din toate punctele ale căror coordonate (x, y), nu neapărat

întregi, satisfac $x^2 + y^2 \leqslant n$. Să considerăm împărțirea acestui plan în pătrate 1×1 cu laturile paralele cu axele și cu vîrfurile avînd coordonate întregi. Pentru fiecare punct $(p, q) \in C$ de coordonate întregi să considerăm pătratul acelei împărțiri de vîrfuri (p, q), $(p + 1, q)$, $(p, q + 1)$, $(p + 1, q + 1)$ (fig. 117). La puncte diferite corespund

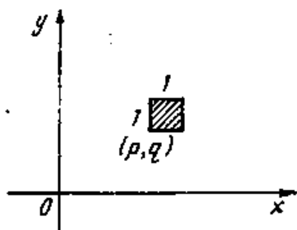


Fig. 117

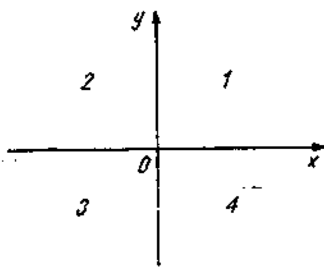


Fig. 118

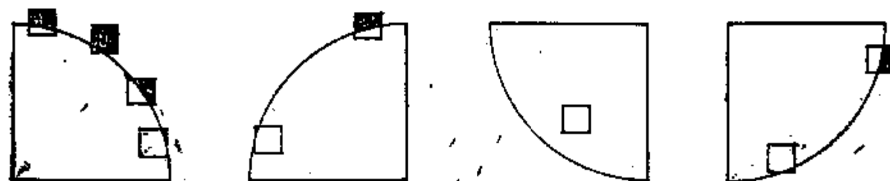
pătrate diferite. Să notăm cu F reuniunea tuturor acestor pătrate. Vom avea $U(n) =$ aria F. Vom căuta să scriem $F \subset C \cup A$, $F \supset C \setminus B$, unde A și B sînt două figuri ce urmează a fi determinate, și va rezulta

$$\text{aria } C - \text{aria } B \leqslant \text{aria } F \leqslant \text{aria } C + \text{aria } A$$

sau

$$\pi n - \text{aria } B \leqslant \text{aria } F \leqslant \pi n + \text{aria } A.$$

a) Ce se poate spune despre punctele din F ce nu aparțin lui C? Situația este diferită după cadranul în care ne aflăm (fig. 118). În cadranul 3 nu există asemenea puncte (fig. 119). În cadranul 2 există asemenea puncte (fig. 119), dar toate, translatate cu 1 în jos,


Fig. 119

vin în puncte din C, deci porțiunea din A din cadranul 2 poate fi aleasă ca diferență dintre un sfert de cerc de rază $\sqrt{n}$, reunit cu un dreptunghi de dimensiuni $\sqrt{n}$ și 1, și un alt sfert de cerc de rază $\sqrt{n}$

(fig. 120). Aria acesteia este $\sqrt{n}$. În cadranul 4 situația este analoagă (vezi fig. 119, 120), dar „la stînga“ în loc de „în jos“.

În cadranul 1 există asemenea puncte; translatate la stînga cu 1 și apoi în jos cu 1, acestea vin în C (fig. 119). Deci porțiunea din A

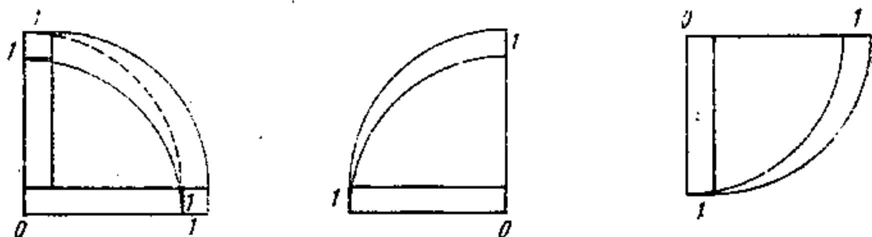


Fig. 120

din cadranul 1 va fi diferența dintre un sfert de cerc de rază $\sqrt{n}$, la care se adaugă două dreptunghiuri de dimensiuni $1 + \sqrt{n}$ și 1, respectiv $\sqrt{n}$ și 1, și un alt sfert de cerc de rază $\sqrt{n}$ (vezi fig. 120 în care am reprezentat punctat poziția intermediară a sfertului de cerc cu centrul în O în urma translației în sus cu 1). Aria ei este $2\sqrt{n} + 1$.

Din considerațiile de pînă acum a rezultat $U(n) =$ aria $F \leqslant \pi n + 4\sqrt{n} + 1$.

b) Ce se poate spune despre punctele din C care nu aparțin lui F? În cadranul 1 nu există asemenea puncte (fig. 121). În cadranul 2 există asemenea puncte (fig. 121), dar acestea, translatate la stînga

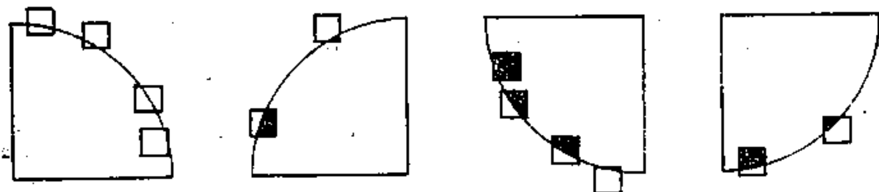


Fig. 121

cu 1, ies afară din C. Deci porțiunea din B din cadranul 2 se poate alege ca diferența dintre un sfert de cerc și alt sfert de cerc, ambele de rază $\sqrt{n}$. Aceasta este inclusă în diferența dintre primul sfert de cerc, reunit cu un dreptunghi de dimensiuni $\sqrt{n}$ și 1, și celălalt sfert de cerc (fig. 122). Aria ei nu depășește deci $\sqrt{n}$. Situația din cadranul 4 este asemănătoare.

În cadranul 3 există asemenea puncte (fig. 121). Translatate la stînga cu 1 şi apoi în jos cu 1, acestea ies afară din C. Deci porţiunea din B din cadranul 3 poate fi aleasă drept diferenţa a două sferturi de cerc, ambele de rază $\sqrt{n}$, care este inclusă în diferenţa dintre primul sfert de cerc, reunit cu două dreptunghiuri de dimensiuni $\sqrt{n}$ şi 1,

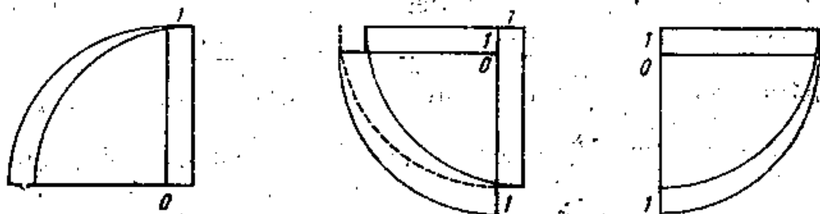


Fig. 122

respectiv $\sqrt{n}-1$ şi 1, şi celălalt sfert de cerc (fig. 122, cu acelaşi adaos ca şi la fig. 120). Aria ei nu depăşeşte deci $2\sqrt{n}-1$.

Cu aceasta problema este rezolvată; am obţinut chiar $U(n) \geqslant \pi n - 4\sqrt{n} + 1$, în loc de $\pi n - 5\sqrt{n} + 1$, cum cerea enunţul.

Soluţia problemei SE1 (vezi 8.4). Să scriem $2a^n b_n \geqslant a^{n-1}b_{n-1} + a^{n+1}b_{n+1}$, să împărţim cu a^n şi să alegem apoi a astfel încît membrul drept $(b_{n-1}/a) + ab_{n+1}$ să fie minim posibil; produsul fiind constant, suma este minimă cînd factorii sînt egali $b_{n-1}/a = ab_{n+1}$, deci $a = \sqrt{b_{n-1}/b_{n+1}}$. Se obţine $2b_n \geqslant 2\sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$, care, împărţită cu 2, logaritmată, înmulţită cu 2, conduce la inegalitatea cerută.

Soluţia problemei SE2 (vezi 8.4). a) Să considerăm întîi cazul $n = 2$. Avem, dacă f şi g sînt concave nenegative, $c \in [0, 1]$,

$$f(cx + (1-c)y)\,g(cx + (1-c)y) \geqslant$$

$$\geqslant (cf(x) + (1-c)f(y))(cg(x) + (1-c)\,g(y)) =$$

$$= c^2 f(x)\,g(x) + c(1-c)(f(y)\,g(x) + f(x)\,g(y)) + (1-c)^2 f(y)g(y).$$

Conform inegalităţii dintre media aritmetică şi cea geometrică, aplicată termenului al doilea, aceasta este mai mare sau egal cu

$$c^2 f(x)\,g(x) + 2c(1-c)\sqrt{f(y)g(x)f(x)g(y)} +$$

$$+ (1-c)^2 f(y)\,g(y) = (c\sqrt{f(x)g(x)} + (1-c)\sqrt{f(y)g(y)}\,)^2,$$

de unde rezultă inegalitatea ce rezolvă cazul $n = 2$.

b) Ţinînd seama de

$$(f_1 \dots f_{2^{k+1}})^{2^{-(k+1)}} = ((f_1 \dots f_{2^k})^{2^{-k}}(f_{2^k+1} \dots f_{2^k+2^k})^{2^{-k}})^{1/2},$$

se demonstrează imediat, prin inducţie faţă de k, pe baza a), valabilitatea afirmaţiei din enunţ pentru $n = 2^k$, oricare ar fi k.

c) Fie acum n oarecare. Să alegem k şi p astfel ca $np \leqslant 2^k$ şi să scriem $(f_1 \dots f_n)^{p \cdot 2^{-k}} = (\underbrace{f_1 \dots f_1}_{p \text{ ori}} \underbrace{f_2 \dots f_2}_{p \text{ ori}} \dots \underbrace{f_n \dots f_n}_{p \text{ ori}} \cdot 1 \dots 1)^{2^{-k}}$, unde numărul de factori egali cu 1 este $2^k - np$. Rezultă că $(f_1 \dots f_n)^{p \cdot 2^{-k}}$ este concavă, conform cu b).

Să alegem acum $p = p_k$ maxim posibil, să ţinem n fix şi să facem $k \to \infty$. Vom avea $np_k \leqslant 2^k < n(p_k + 1)$, deci $p_k 2^{-k} \leqslant 1/n < p_k 2^{-k} + 2^{-k}$, $\left|\frac{1}{n} - p_k 2^{-k}\right| \leqslant 2^{-k} \to 0$, adică $\lim p_k 2^{-k} = 1/n$.

Notînd $g_k = (f_1 \dots f_n)^{u_k}$, cu $u_k = p_k 2^{-k}$, dacă în inegalitatea $g_k(cx + (1 - c)y) \geqslant c g_k(x) + (1 - c) g_k(y)$, stabilită mai înainte, facem $k \to \infty$, obţinem concluzia dorită. Cu un mic efort se poate elimina „episodul cu limita".

Soluţia autorilor la problema SE2 (vezi 8.4). Să scriem

$$\prod_{i=1}^{n} f_i(cx + (1 - c)y) \geqslant \prod_{i=1}^{n} (cf_i(x) + (1 - c)f_i(y)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} c^k (1 - c)^{n-k} \Sigma_k f_{i_1}(x) \dots f_{i_k}(x) f_{i_{k+1}}(y) \dots f_{i_n}(y),$$

unde Σ_k este extinsă la toate combinările $\{i_1, \dots, i_k\}$ de n obiecte $\{1, \dots, n\}$ cîte k, deci are C_n^k termeni.

Sumei Σ_k îi aplicăm inegalitatea dintre media aritmetică şi cea geometrică. Aceasta rezultă mai mare sau egală cu C_n^k, înmulţit cu produsul tuturor termenilor, ridicat la puterea $1/C_n^k$. În acel produs un $f_i(x)$ apare la o putere egală cu numărul de combinări de n luate cîte k ce conţin pe i. Suprimînd pe i din fiecare, rămîn combinări de $n-1$ cîte $k-1$. Analog un $f_i(y)$ apare la puterea C_{n-1}^{n-k-1}. Observînd că

$$C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \frac{k}{n} C_n^k$$

şi

$$C_{n-1}^{n-k-1} = \frac{n-k}{n} C_n^{n-k} = \frac{n-k}{n} C_n^k,$$

inegalitatea stabilită înainte devine

$$\prod_{i=1}^{n} f_i(cx + (1-c)y) \geqslant \sum_{k=0}^{n} C_n^k c^k (1-c)^{n-k} \left(\prod_{i=1}^{n} f_i(x)\right)^{k/n} \left(\prod_{j=1}^{n} f_j(y)\right)^{(n-k)/n} =$$

$$= \left(c\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(x)\right)^{1/n} + (1-c)\left(\prod_{j=1}^{n} f_j(y)\right)^{1/n}\right)^n,$$

conform formulei binomului Newton. Cu aceasta, ridicînd la puterea $1/n$, se obține inegalitatea ce rezolvă problema.

Soluția problemei US5 (vezi 8.4). Căutăm întîi să reducem numărul de variabile. Prin împărțire cu c^{r+s} inegalitatea devine

$$(a/c)^r(b/c)^s + (b/c)^r + (a/c)^s \geqslant (a/c)^s(b/c)^r + (b/c)^s + (a/c)^r,$$

deci putem nota $x = a/c$, $y = b/c$, condițiile asupra lor fiind $x > y > 1$, și obținem $x^r y^s + y^r + x^s \geqslant x^s y^r + y^s + x^r$. Putem nota în continuare $x^s = u$, $y^s = v$ și $r/s = t$ și ajungem la $u^t v + v^t + u \geqslant uv^t + v + u^t$, în condițiile $u > v > 1$ și $t > 1$.

Inegalitatea obținută se poate scrie și $u^t v - u^t - v + 1 \geqslant uv^t - v^t - u + 1$, $(u^t - 1)(v - 1) \geqslant (u - 1)(v^t - 1)$, $(u^t - 1)/(u - 1) \geqslant (v^t - 1)/(v - 1)$ și aceasta revine la a arăta că $f(u) = (u^t - 1)/(u - 1)$ este nedescrescătoare pe $(1, \infty)$ pentru $t > 1$. Aceasta se poate stabili cu ajutorul derivatei, dar este mai simplu de observat că este o consecință a convexității pe $(1, \infty)$ a funcției $g(u) = u^t$ [fig. 123; $f(u)$ este coeficientul unghiular al coardei de la $(1, 1)$ la $(u, g(u))$], convexitate care se demonstrează cu ajutorul derivatei a doua $g''(u) = t(t-1)u^{t-2} > 0$.

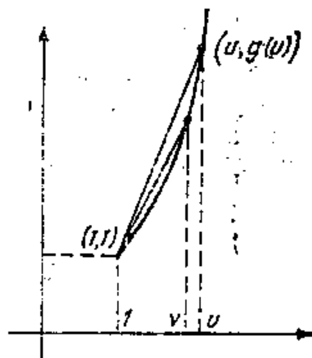


Fig. 123

Se pot evita cunoștințele asupra derivatelor, dacă de la $x^r y^s + y^r + x^s \geqslant x^s y^r + y^s + x^r$ trecem la $x^r y^s - y^s - x^r + 1 \geqslant x^s y^r - y^r - x^s + 1$, $(x^r - 1)(y^s - 1) \geqslant (x^s - 1)(y^r - 1)$, reducem la cazul r, s raționali, îi aducem la același numitor $r = m/p$, $s = n/p$, notăm $x^{1/p} = u$, $y^{1/p} = v$ și ajungem la $(u^m - 1)(v^n - 1) \geqslant (u^n - 1)(v^m - 1)$ pentru $u > v > 1$ și $m > n$, care, prin împărțire cu $(u - 1)(v - 1) > 0$, conduce la $(1 + \ldots + u^{m-1})(1 + \ldots + v^{n-1}) \geqslant (1 + \ldots + v^{m-1})(1 + \ldots + u^{n-1})$, apoi la $(u^n + \ldots + u^{m-1})(1 + \ldots + v^{n-1}) \geqslant (v^n + \ldots + v^{m-1})(1 + \ldots + u^{n-1})$, inegalitate care

se poate stabili prin comparaţie termen cu termen, deoarece pentru $i \geqslant n > n - 1 \geqslant j$ avem $u^i v^j = (v^i u^j)(u/v)^{i-j} \geqslant v^i u^j$.

Aproximarea unei puteri a^b cu a^r cu r raţional, apărută în prima soluţie la SE2 şi în a doua variantă a soluţiei lui US5 trebuie considerată ca materie de şcoală cîtă vreme se acceptă să se discute despre puteri cu exponent iraţional.

Comisia a inclus pe lista pentru juriu, dintre problemele ale căror soluţii au fost prezentate în acest paragraf, FR2 şi SE2. Există mai multe cărţi dedicate inegalităţilor şi despre toate aceste probleme a existat impresia a mai fi fost văzute „undeva", impresie ce era greu de verificat repede, de către comisie. Problema FR2 este conţinută practic în problema *1* (2-CS, vezi 5.2), ce a fost propusă concurenţilor la Olimpiada a 17-a.

8.11. Probleme de geometrie plană

Au fost 12 asemenea probleme în lista de la 8.4; lor li s-ar putea adăuga FI2 (vezi 8.8) şi FR4 (vezi 8.10). Problemele CS1, CS2, US4, dintre aceste 12, puteau fi considerate „cu inegalităţi". Prezentăm soluţiile celor 12 probleme.

Soluţia problemei BG4 (vezi 8.4). Vom utiliza transformări geometrice (vezi 5.17). Din N se ajunge în A' dacă aplicăm o omotetie de centru A şi raport 2 (ce duce N în B') şi apoi o rotaţie de 60° în jurul lui O, în sensul acelor de ceasornic (ce duce B' în A'). Aceste fapte se pot urmări pe fig. 124. Din fig. 125, în care $AS = 2SX$, se vede că în urma aplicării celor două transformări S vine în el însuşi. Deci compunerea celor două transformări revine (vezi 5.17) la o rotaţie de 60°

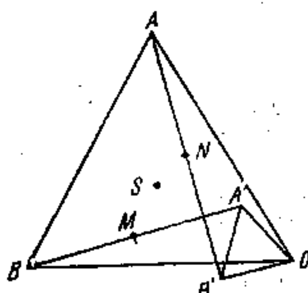


Fig. 124

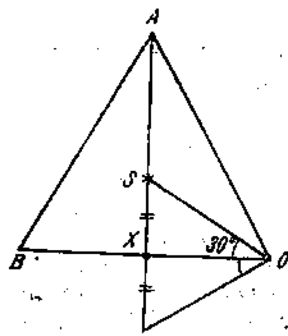


Fig. 125

în jurul lui S, urmată de o omotetie de raport 2 şi centru S, adică $\sphericalangle NSA' = 60°$, $SA'/SN = 2$.

Exact la fel se demonstrează că, $\sphericalangle MSB' = 60°$ şi $SB'/SM = 2$, deci triunghiurile din enunţ sînt asemenea conform unuia din cazurile de asemănare.

Se observă că, pentru a ajunge din M în B' se aplică o omotetie de raport 2 şi apoi o rotaţie de 60° în jurul lui O, în sens contrar acelor de ceasornic. Deci $\Delta SB'M$ şi $\Delta SA'N$ sînt asemenea, dar orientate contrar.

Există şi o soluţie prin numere complexe. Fie $w = \cos 60° + i \sin 60°$, deci $w^3 = -1$, $w^2 - w + 1 = 0$. Alegem originea în S şi fie z numărul complex ce reprezintă 0, $z + t$ cel ce reprezintă A'. Atunci $z + tw$ va reprezenta B', zw^2 pe A, $zw^4 = -zw$ pe B, $(z + t - zw)/2 = (t - zw^2)/2 = (-w^2/2)(z + tw)$ pe M, $(z + tw + zw^2)/2 = (tw + zw)/2 = (w/2)(z + t)$ pe N, relaţii din care rezultă, cum $|w| = 1$, $SM/SB' = 1/2$, $\sphericalangle MSB = |\arg(-w^2)| = 60°$, $SN/SA' = 1/2$, $\sphericalangle NSA' = |\arg w| = 60°$ etc.

Soluţia problemei CS1 (vezi 8.4). Triunghiul $A_1A_2A_3$ poate fi înlocuit cu unul asemenea cu el, mai mic, aşa încît una din laturile noului triunghi să fie egală cu cea corespunzătoare din $B_1B_2B_3$, iar celelalte două să fie respectiv mai mari sau egale cu cele corespunzătoare din $B_1B_2B_3$. Cu aceasta problema s-a redus la cazul $A_1A_2 = B_1B_2$, $A_1A_3 \geqslant B_1B_3$, $A_2A_3 \geqslant B_2B_3$. Putem presupune chiar că punctele A_1 şi B_1 coincid, la fel şi A_2, B_2, iar B_3 se află de aceeaşi parte a lui A_1A_2 ca şi A_3.

Să presupunem că aria $B_1B_2B_3 >$ aria $A_1A_2A_3$. Atunci înălţimea din B_3 a triunghiului $B_1B_2B_3$ ar fi mai mare decît înălţimea din A_3 a triunghiului $A_1A_2A_3$ şi ar rezulta, ca o primă condiţie asupra lui B_3, faptul că acesta se va afla de cealaltă parte a paralelei d la A_1A_2, duse prin A_3, decît A_1A_2. Am figurat situaţia în fig. 126 în care, unghiurile lui $A_1A_2A_3$ nefiind nici unul obtuz, unghiurile a şi b sînt $\leqslant 90°$.

Dar $B_1B_3 \leqslant A_1A_3$ cere ca B_3 să se afle de aceeaşi parte ca şi A_1 a perpendicularei în A_3 pe A_1A_3. Împreună cu prima condiţie, aceasta obligă pe B_3 să se afle în unghiul u din fig. 126, unghi u care este ascuţit; $u = 90° - a$.

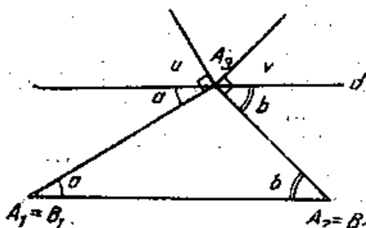


Fig. 126

La fel, condiţia $B_2B_3 \leqslant A_2A_3$, împreună cu prima, îl obligă pe B_3 să se afle în unghiul ascuţit v din fig. 126, $v = 90° - b$. Cum unghiurile u şi v au ca intersecţie numai punctul A_3, s-a ajuns la o contradicţie.

Observație. Există și căi mai complicate de a realiza primul pas, adică de a reduce problema la cazul $B_1B_2 = A_1A_2$. Există și alte căi de a demonstra afirmația din enunț în acest caz, de exemplu studiind intersecția cercurilor pline de centre A_1, A_2 și raze A_1A_3, A_2A_3, dificultatea fiind faptul că în această situație afirmația este „intuitiv evidentă".

Soluția problemei CS2 (vezi 8.4). Vom exprima laturile și aria fiecărui triunghi în funcție de trei elemente ce variază independent (prin formula Heron ar fi o cale dificilă). În cazul lui T_1 acestea vor fi a, b și unghiul cuprins x și u, v și unghiul cuprins y în cazul lui T_2.

Avem $P = (1/2)\, ab \sin x$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos x$, $Q = (1/2)\, uv \sin y$, $w^2 = u^2 + v^2 - 2\, uv \cos y$, și inegalitatea din enunț devine $4\, abuv \sin x \sin y \leqslant a^2 (2v^2 - 2\, uv \cos y) + b^2(2u^2 - 2\, uv \cos y) + (a^2 + b^2 - 2ab \cos x)\, 2\, uv \cos y$, apoi $4\, abuv\, (\cos x \cos y + \sin x \sin y) \leqslant 2(a^2v^2 + b^2u^2)$ și $(av - bu)^2 + 2\, abuv\, (-\cos(x - y) + 1) \geqslant 0$, inegalitat, evident adevărată și care devine egalitate dacă și numai dacă $av = bu$ $\cos (x - y) = 1$, condiții ce revin la $a/u = b/v$ și $x = y$, adică la asemănarea celor două triunghiuri, laturile omoloage fiind a cu u, b cu v, c cu w.

Observație. Inegalitatea din problemă se poate scrie, dacă U, V, W sînt unghiurile lui T_2 opuse laturilor u, v, w, sub forma $4P \leqslant a^2 \operatorname{ctg} U + b^2 \operatorname{ctg} V + c^2 \operatorname{ctg} W$; cu acest enunț problema apare însă mai dificilă.

Soluția problemei CU1 (vezi 8.4). Fie D piciorul perpendicularei din P pe BC și fie a un număr pozitiv. Atunci existența unui punct A' pe dreapta BC, așa încît $PA' \cdot BC = a$, este echivalentă cu $PD \cdot BC \leqslant a$ (trebuie ca $PA' = a/BC$ și această valoare trebuie să fie $\geqslant PD$), deci cu 2 aria $PBC \leqslant a$.

Rezultă că, pentru un P dat, existența punctelor A', B', C' pe dreptele BC, CA, AB, așa ca $PA' \cdot BC = PB' \cdot CA = PC' \cdot AB = a$, este echivalentă cu

$$a \geqslant 2 \max(\text{aria } PBC,\ \text{aria } PCA,\ \text{aria } PAB).$$

Să vedem acum cum trebuie ales P pentru ca membrul drept al ultimei inegalități să fie minim posibil. Cu ocazia rezolvării problemei 14 - FI (vezi 7.3), propusă juriului la Olimpiada a 19-a (vezi 7.2) s-a văzut, ca unul din momentele acelei rezolvări, că aria PBC + aria PCA + aria $PAB \geqslant$ aria ABC pentru orice P din plan, pentru P în interiorul triunghiului ABC avînd loc egalitate. Deci max (aria PBC, aria PCA, aria PAB) $\geqslant (1/3)$ aria ABC, egalitatea avînd loc cînd P coincide cu centrul de greutate al triunghiului ABC. Deci existența punctului P din plan și a punctelor A', B', C' pe dreptele BC, CA, AB, astfel ca $PA' \cdot BC = PB' \cdot CA = PC' \cdot AB = a$, este echivalentă cu $a \geqslant (2/3)$ aria ABC.

Rămîne de comparat aria ABC cu $m = \max (AB,\ BC,\ CA)$. Cel puțin unul din unghiurile triunghiului, de exemplu A, este

$\leqslant 60°$ şi se obţine aria $ABC = (1/2)AB \cdot AC \cdot \sin A \leqslant \sqrt{3}m^2/4$, cu egalitate în cazul triunghiului echilateral. Deci $a \geqslant \sqrt{3}\ m^2/6$ implică $a \geqslant (2/3)$ aria ABC şi, cum $\sqrt{3}/6 < 3/10$, ca urmare a inegalităţii $1/12 \leqslant 9/100$, $100 \leqslant 108$, problema este rezolvată.

Soluţia problemei FR5 (vezi 8.4). a) Să fixăm un punct A pe Ox şi să demonstrăm existenţa punctelor B pe Oy şi C pe Oz astfel ca perimetrele triunghiurilor OAB, OBC, OCA să fie egale; va rămîne numai de aplicat o omotetie de centru O pentru a obţine afirmaţia din enunţ relativă la existenţă.

b) Oricare ar fi B pe Oy, există un punct unic C pe Oz pentru care perimetrul triunghiului OAC să fie egal cu cel al lui OAB. Într-adevăr, dacă $OC < OC'$ (vezi fig. 127), atunci $AC < CC' + AC'$, deci $OA + AC + OC < OA + AC' + CC' + OC = OA + AC' + OC'$. Funcţia care ataşează fiecărui C perimetrul triunghiului OAC, pe lîngă faptul că este continuă, este deci şi strict crescătoare cînd C variază de la 0 la ∞, pe Oz. Valoarea ei în O este $2\,OA = OA + OA < OA + AB + OB =$ perimentrul OAB, iar cînd $C \to \infty$, aceasta tinde la ∞. Existenţa lui C este asigurată de teorema Darboux, iar unicitatea de stricta monotonie.

Să observăm şi că pentru $B = 0$ avem $C = 0$.

c) Să ataşăm acum fiecărui B de pe Oy diferenţa $f(B)$ dintre perimetrele triunghiurilor OAB şi OBC, unde C este punctul definit la b). Diferenţa $f(B)$ depinde continuu de B, deoarece acest fapt este valabil pentru perimetrul lui OAB, iar C apare drept compunerea dintre funcţia reprezentată de acest perimetru şi inversa funcţiei considerate la b) etc.

Valoarea lui f pentru $B = 0$ este $2\,OA > 0$; rămîne de dovedit că f tinde la $-\infty$ cînd B tinde la ∞ pentru ca teorema Darboux să asigure existenţa unui B, care, împreună cu C ce-i corespunde prin b), să aibă proprietatea cerută la a).

Cu acest scop să scriem $f(B) = ($perim. $OAB +$ perim. $OAC -$ $- 2$ perim. $OBC)/2 = (2\,OA + AB - OB + AC - OC - 2\,BC)/2$ şi să observăm că $AB - OB < OA$, $AC - OC < OA$, deci $f(B) < 2\,OA - BC$ şi $BC \geqslant OB \sin BOC \to +\infty$ pentru B tinzînd la infinit.

Cu aceasta afirmaţia relativă la existenţă, din enunţ, este dovedită.

d) Pentru a demonstra unicitatea punctelor A, B, C din enunţ vom părăsi calea indicată la a). Vom observa întîi că, dacă $OA < OA'$ şi $OB < OB'$, atunci, aplicînd de două ori unul din faptele stabilite la b), rezultă că perimetrul lui OAB este mai mic decît al lui $OA'B$, care la rîndul lui este mai mic decît al lui $OA'B'$ (fig. 128).

Dacă acum A, A' sînt pe Ox, B, B' pe Oy şi C, C' pe Oz şi perimetrele triunghiurilor OAB, OBC, OCA, $OA'B'$, $OB'C'$, $OC'A'$ sînt

toate egale cu $2p$ și dacă, de exemplu, $OA < OA'$, atunci din cele ce tocmai au fost stabilite rezultă $OB > OB'$, $OC < OC'$ și $OA > OA'$, contrazicere ce încheie demonstrația afirmației relative la unicitate și cu aceasta și soluția problemei.

Fig. 127

Fig. 128

Soluția autorilor la problema FR5 (vezi 8.4). Să notăm lungimile necunoscute $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$ și unghiurile date $\sphericalangle xOy = c$, $\sphericalangle yOz = a$, $\sphericalangle zOx = b$. Din $OA + OB + AB = 2p$ și $OA < OB + AB$ rezultă $x < p$; evident $x > 0$. Analog $0 < y < p$, $0 < z < p$.

Relația $OA + OB + AB = 2p$ devine $x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos c} = 2p$, ecuație echivalentă, în condițiile $x, y < p$, cu $x^2 + y^2 - 2xy\cos c = (2p - x - y)^2$, deci cu $4p^2 - 4px - 4py = -2xy(1 + \cos c)$; transformarea ce urmează a acestei ecuații în $(p - x)(p - y) = xy\sin^2(c/2)$ nu este singura posibilă, ea fiind însă cheia rezolvării. Aceasta se transcrie $\frac{p-x}{x}\,\frac{p-y}{y} = \sin^2\frac{c}{2}$.

Analog se obțin ecuațiile ce exprimă celelalte două condiții din enunț, anume $\frac{p-y}{y}\,\frac{p-z}{z} = \sin^2\frac{a}{2}$ și $\frac{p-z}{z}\,\frac{p-x}{x} = \sin^2\frac{b}{2}$; peste tot împărțirile au fost justificate de condițiile $x, y, z \neq 0$ impuse.

Sistemul obținut se rezolvă prin metoda obișnuită, înmulțind cele trei ecuații, extrăgînd rădăcina pătrată și apoi împărțind la cîte una din ele, ceea ce revine la a înmulți două, a împărți la a treia și apoi a scoate rădăcina pătrată. Rezultatul este, cum $(p - x)/x$, $(p - y)/y$, $(p - z)/z$ sînt pozitive, o soluție unică pentru aceste trei rapoarte. Cînd x variază de la 0 la p, raportul $(p - x)/x = (p/x) - 1$ scade de la $+\infty$ la 0 și deci acea soluție unică va corespunde la una unică pentru x, y, z, q.e.d.

Observație. Cele trei semidrepte puteau fi și în spațiu, cu origine comună, ambele soluții rămînînd aceleași. Se putea considera și un număr impar oarecare, dat, de semidrepte $Ox_1, \ldots, Ox_k$ și puncte $A_1, \ldots, A_k$ pe ele cu perimetrele triunghiu-

rilor OA_1A_2, OA_2A_3, ..., $OA_{k-1}A_k$, OA_kA_1 toate egale cu un $2p$ dat etc.; soluţia autorilor putea fi adaptată.

Soluţia problemei GB1 (vezi 8.4). Fie r raza cercului; rezultă imediat $UV = r\sqrt{2}$. Pentru a calcula MR, să utilizăm triunghiul MPR, deci $MR^2 = MP^2 + PR^2 - 2MP \cdot PR \cos P$, unghiurile fiind cele marcate în fig. 129. În triunghiul PQW avem $PM = PW$, deci $\sphericalangle P = 180° - 2\sphericalangle M$ şi relaţia obţinută devine, ţinînd seama şi de $PR = MQ$, $MR^2 = MP^2 + MQ^2 + 2MP \cdot MQ \cos 2M = (MP + MQ)^2 - 2MP \cdot MQ(1 - \cos 2M)$.

Acum $(MP + MQ)^2 = PQ^2 = 4(r^2 - ON^2)$, unde N este mijlocul lui PQ, iar $MP \cdot MQ = MU \cdot MV = r^2/2$. Din triunghiul OMN avem $\cos M = ON/OM = ON\sqrt{2}/r$, deci $\cos 2M = 2\cos^2 M - 1 =$

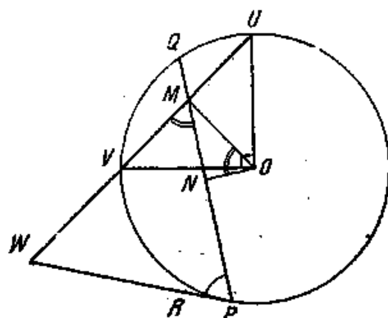


Fig. 129

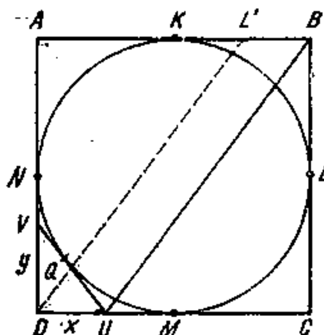


Fig. 130

$= (4ON^2 - r^2)/r^2$. Substituind în formula pentru MR^2, se obţine $MR^2 = 4(r^2 - ON^2) - r^2 + (4ON^2 - r^2) = 2r^2 = UV^2$, q.e.d.

Soluţia problemei GB2 (vezi 8.4). Vom duce tangenta din U la cerc, diferită de UM, care va intersecta AD într-un punct V de pe segmentul DN (vezi fig. 130) şi vom arăta că $KV \parallel BU$. Cu acest scop ducem $DL' \parallel BU$, L' fiind pe AB, notăm $DU = x$, deci $L'B = x$ (din paralelogramul $DUBL'$), $DV = y$ şi va trebui arătat (Thales) că $AK/AL' = AV/AD$, adică, a fiind latura pătratului, că $(a/2)/(a - x) = (a - y)/a$ sau $a^2 = 2(a - x)(a - y)$, $a^2 - 2ax - 2ay + 2xy = 0$.

Relaţia dintre x şi y se obţine notînd cu Q punctul de contact al lui UV cu cercul şi observînd că $x^2 + y^2 = UV^2 = (UQ + QV)^2 = (UM + VN)^2 = \left(\frac{a}{2} - x + \frac{a}{2} - y\right)^2$, deci $x^2 + y^2 = a^2 - 2ax - 2ay + 2xy + x^2 + y^2$, relaţie ce se transformă imediat în cea care trebuie demonstrată.

Soluția problemei TR3 (vezi 8.4). Fie O centrul cercului, OA, OB cele două raze și $XYZT$ coarda ce trebuie construită, unde X, T sînt pe cerc, Y pe OA, Z pe OB. Dacă M este piciorul perpendicularei din O pe coardă, atunci M este mijlocul lui XT, deci, cum $XY = ZT$, M va fi și mijlocul lui YZ, ΔOYZ rezultă isoscel, înălțimea din O fiind și mediană, deci OM va fi și bisectoarea unghiului AOB și coarda va fi perpendiculară pe aceasta, prin urmare, paralelă cu AB.

Presupunînd deci $XT \parallel AB$, dacă $A'A = AB = BB'$ (fig. 131), vom avea $OY/OA = YZ/AB = OZ/OB$ și $XY = YZ$ va fi echivalent cu egalitatea lui $XY/A'A$ cu cele trei rapoarte, iar $YZ = ZT$ cu

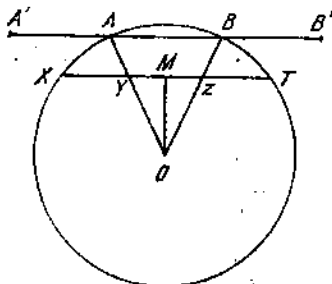


Fig. 131

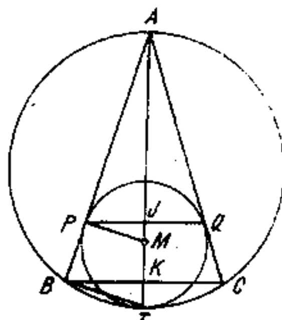


Fig. 132

egalitatea lui ZT/BB'. Dar $XY/A'A = OY/OA$ este echivalent cu coliniaritatea lui O, A', X, iar $ZT/BB' = OZ/OB$ cu cea a lui O, B', T.

Construcția constă deci în a uni O cu A' și B' introduse înainte și a uni intersecțiile X și T ale cercului cu OA', OB'.

Soluția problemei US1 (vezi 8.4). Fie J mijlocul lui PQ. Fie M centrul cercului tangent laturilor AB, AC și cercului circumscris triunghiului ABC.

Figura este simetrică relativ la bisectoarea unghiului BAC, dreaptă care trece deci și prin M și prin punctul de contact T al celor două cercuri considerate (fig. 132). Aceasta trece evident și prin J și prin mijlocul K al lui BC și este perpendiculară pe BC. Bisectoarea va fi perpendiculară în T pe tangenta comună a celor două cercuri.

O omotetie de centru A ce duce T în K va duce deci cercul de centru M din fig. 132 într-un cerc tangent la AB, AC și la BC în K, deci în cercul înscris triunghiului ABC; punctul M îl va duce în centrul I al cercului înscris.

Dar MP şi TB sînt paralele (perpendiculare pe AB). Rezultă $AJ/AK = AP/AB = AM/AT, AJ/AM = AK/AT$, deci J este imaginea lui M prin acea omotetie, adică $J = I$, q.e.d.

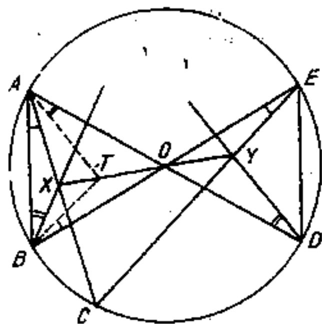


Fig. 133

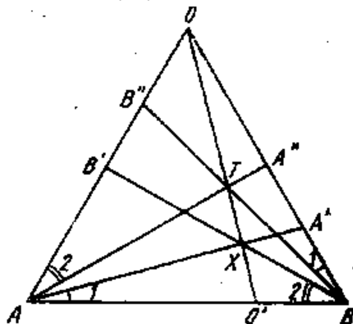


Fig. 134

Soluţia problemei US2 (vezi 8.4). Şi E rezultă diametral opus lui B, iar OAB şi ODE rezultă triunghiuri echilaterale. Apartenenţa lui C la cerc se traduce prin $\sphericalangle XAB = \sphericalangle YEO$, iar faptul că BX şi DY se intersectează pe cerc prin $\sphericalangle ABX = \sphericalangle ODY$ (fig. 133).

Să considerăm simetricul T al lui Y faţă de O; acesta se va afla pe OX. Simetricele lui DY şi EY faţă de O vor fi AT şi BT. Problema se reduce la următoarea (fig. 134).

Fie OAB un triunghi echilateral, X şi T două puncte coliniare cu O astfel ca $\sphericalangle BAX = \sphericalangle OBT$. Atunci $\sphericalangle ABX = \sphericalangle OAT$.

Această afirmaţie se demonstrează cu ajutorul teoremei Ceva, aplicate de două ori, în notaţiile figurii 134 : $(O'B/O'A)(B'A/B'O)\times\times(A'O/A'B)=1$ şi $(O'B/O'A)(B''A/B''O)(A''O/A''B)=1$. Ca urmare a egalităţii unghiurilor notate cu 1 din fig. 134 avem $A''O = B'A$, $A''B = B'O$ şi deci din cele două relaţii se obţine $A'O/A'B = B''A/B''O$; adunînd 1, rezultă $AB/A'B = OA/B''O$, deci $A'B = B''O$ şi, în fine, egalitatea unghiurilor marcate cu 2 din fig. 134. Exact la fel se tratează şi alte poziţii posibile ale punctelor din fig. 133.

Această problemă nu a reţinut atenţia comisiei din cauza existenţei unei soluţii imediate, bazate pe teorema Pascal. Anume, fie Z al doilea punct de intersecţie cu cercul al dreptei BX din fig. 133. Să considerăm hexagonul $ADZBECA$ înscris în cerc. Laturile sale opuse AD şi BE se intersectează în O, iar laturile opuse ZB şi CA în X. Conform teoremei Pascal perechea de laturi opuse rămasă DZ şi EC se va intersecta într-un punct coliniar cu O şi X, deci DZ, EC, OX vor fi concurente şi, cum EC şi OX se taie în Y, DY va trece prin Z, q.e.d.

Soluția problemei US4 (vezi 8.4). Există o soluție cu caracter algebric, care constă în a transforma inegalitatea în $c \geqslant 2ab/(a+b)$, unde $c = AB$, $a = BC$, $b = CA$, în a aplica teorema cosinusului $c^2 = a^2 + b^2 - ab$ și a reduce acea inegalitate la $a^2 + b^2 - ab \geqslant$ $\geqslant (2ab)^2/(a+b)^2$, deci la $(a+b)^4 - 3ab(a+b)^2 - 4(ab)^2 \geqslant 0$,

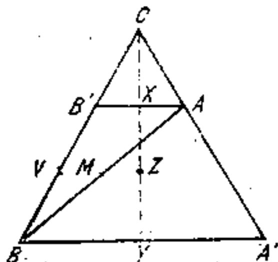


Fig. 135

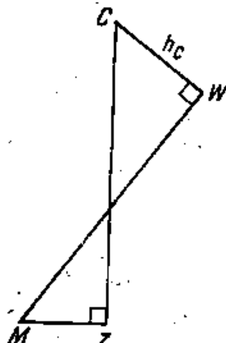


Fig. 136

$((a+b)^2 - 4ab)((a+b)^2 + ab) \geqslant 0$ și apoi la $(a+b)^2 - 4ab \geqslant 0$, ceea ce revine la $(a-b)^2 \geqslant 0$.

Există însă și o soluție cu caracter geometric, care constă în a considera înălțimile h_a, h_b, h_c ale triunghiului corespunzătoare laturilor a, b, c, a ține seama de $ah_a = bh_b = ch_c$ (= dublul ariei acelui triunghi) și a transforma pe această bază inegalitatea în $h_a + h_b \geqslant 2h_c$. Apoi se consideră triunghiurile echilaterale CAB' și CBA' în care B' este pe semidreapta CB și A' pe semidreapta CA (vezi fig. 135, în care am ales cazul $CA < CB$), fapt posibil deoarece $\sphericalangle C = 60°$. Rezultă $h_a = CX$, $h_b = CY$, deci $(h_a + h_b)/2 = CZ$, unde Z este mijlocul lui XY.

Continuăm prin a considera linia mijlocie a trapezului $BA'AB'$, care trece prin Z, prin mijlocul M al lui AB și prin mijlocul V al lui BB'. Avem $VZ = (B'X + BY)/2 = (AB' + BA')/4 > 2AB'/4 =$ $= VM$, deci M este la stînga lui Z. În plus $CZ \perp MZ$.

Considerînd numai partea din fig. 136 a figurii 135, vom avea $\sphericalangle CMW < \sphericalangle CMZ$, de unde, în triunghiurile dreptunghice CMZ, CMW, rezultă $h_c < CZ = (h_a + h_b)/2$, q.e.d.

Soluția problemei VN5 (vezi 8.4). Sînt două situații posibile. Prima corespunde la unghiuri B, C ascuțite (fig. 137). Condiția este, dacă $AH = a$, $BM = MC$, deci $HC - BH = 2HM$, $a \operatorname{tg}(x+y) -$ $- a \operatorname{tg} x = 2a \operatorname{tg} y$, $(\sin(x+y)\cos x - \cos(x+y)\sin x)/(\cos(x +$ $+ y)\cos x) = 2\sin y/\cos y$, $\sin y/(\cos(x+y)\cos x) = 2\sin y/\cos y$,

care echivalează cu $\sin y = 0$ sau $\cos y = 2\cos(x + y)\cos x$. Prima înseamnă $AB = AC$, deci triunghi isoscel, a doua $\cos y = \cos(2x + y) + \cos(x + y - x)$, deci $\cos(2x + y) = 0$, $2x + y = 90°$, adică $\sphericalangle A = 90°$.

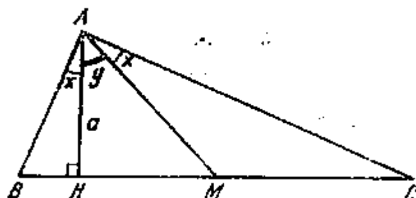


Fig. 137

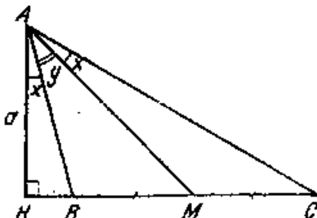


Fig. 138

În acest caz condiţia din enunţ este echivalentă cu $AB = AC$ sau $\sphericalangle A = 90°$.

A doua situaţie corespunde la unghiul B obtuz (fig. 138). Condiţia este $HC = 2HM - HB$, $\operatorname{tg}(2x + y) = 2\operatorname{tg}(x + y) - \operatorname{tg} x$ şi, avînd în vedere un episod din calculele de la prima situaţie, grupăm termenii sub forma $\operatorname{tg}(2x+y) - \operatorname{tg}(x+ y) = \operatorname{tg}(x+ y) - \operatorname{tg}x$, deci, lafel ca în calculul citat, $\sin x/(\cos(2x+y)\cos(x+y)) = \sin y/(\cos(x+y)\cos x)$, $2\sin x\cos x = 2\cos(2x + y)\sin y$, $\sin 2x = \sin(2x + 2y) - \sin 2x$, $2\sin 2x = \sin(2x + 2y)$.

Pentru $x > 15°$ avem $2\sin 2x > 1$ şi situaţia este imposibilă. Pentru $x = 15°$ rezultă $2x+2y = 90°$, $y = 30°$. Pentru orice $x \in (0°, 15°)$ se obţin două valori pentru $2x + 2y$, una $u \in (2x, 90°)$, cealaltă $180° - u$, care conduc la valorile $(u/2) - x$ şi $90° - (u/2) - x$ pentru y. Ambele sînt admisibile, fiind pozitive, a doua ca urmare a relaţiei $90° - (u/2) - x > 90° - 45° - 15°$, şi conducînd la sume $2x + y$ inferioare lui $90°$, prima ca urmare a relaţiei $2x + y = x + (u/2) < 15° + 45°$, a doua ca urmare a relaţiei $2x + y = 90° + x - (u/2) < 90°$.

Deci în acest caz, pentru orice $x \in (0°, 15°)$ există două triunghiuri neasemenea cu proprietatea din enunţ cu $\sphericalangle B = 90° + x$ şi, în plus, un astfel de triunghi de unghiuri $105°$, $45°$, $30°$.

După cum se vede, la acest capitol comisia a avut de unde alege, fără a trebui să procedeze prin eliminare succesivă. Au fost incluse pe lista pentru juriu BG4, CS2, FR5, US1, iar pe lista de rezerve GB1, părerile fiind practic unanime.

8.12. Probleme de algebră şi trigonometrie

Celor 11 probleme rămase li se potriveşte acest titlu. Urmează soluţiile lor.

Soluţia problemei BG2 (vezi 8.4). Să considerăm tabelul

$$\begin{array}{ccccc} n\cdot n & \ldots & n\cdot k & \ldots & n\cdot 1 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \\ (n+1-k)n & \ldots & (n+1-k)k & & \\ \vdots & \ldots & & & \\ n\cdot 1 & & & & \end{array}$$

Coeficientul a_{n+k} este suma elementelor din acest tabel, situate pe „diagonala" ce uneşte $k\cdot n$ cu $n\cdot k$, deci $a_{n+1}+\ldots+a_{2n}$ este suma tuturor elementelor din acest tabel. Pentru a o calcula, să începem prin a observa că suma elementelor de pe coloana ce conţine $n\cdot k$ este $k(2n+1-k)k/2$ şi apoi să determinăm $\sum_{k=1}^{n} k^2(2n+1-k)/2$, pe calea indicată la sfîrşitul soluţiei întîi a problemei 6-DD, propusă juriului la Olimpiada a 19-a, soluţie prezentată în 7.3. Aceasta constă în a scrie

$$\frac{1}{2}k^2(2n+1-k)=-\frac{1}{2}(k-1)k(k+1)+\frac{1}{2}(2n+1)(k-1)k+nk,$$

suma căutată rezultînd egală cu

$$-\frac{1}{8}(n-1)n(n+1)(n+2)+\frac{1}{6}(2n+1)(n-1)n(n+1)+\frac{1}{2}n^2(n+1),$$

care, după „scoaterea" factorilor $C_{n+1}^2=n(n+1)/2$ şi $1/12$, devine $-3(n^2+n-2)+4(2n^2-n-1)+12n=5n^2+5n+2$, conducînd la rezultatul cerut de enunţ.

Soluţia problemei BG3 (vezi 8.4). Vom începe prin a construi graficul funcţiei $f(x)=x^2-2x[x]+x$, definite pentru $x\in[0,\infty)$. Acesta este reuniunea graficelor restricţiilor acestei funcţii la $[n, n+1)$, pentru $n=0,1,\ldots$ Cînd $n\leqslant x<n+1$, avem $f(x)=$ $=x^2-(2n-1)x$, care este o funcţie de gradul doi; considerată pentru toţi x, aceasta are minimul pentru $x=n-(1/2)<n$. Deci $f(x)$ este strict crescătoare pentru $x\in[n, n+1)$, de la valoarea $f(n)=n^2-n(2n-1)=-n^2+n$ pînă la valoarea, pe care nu o atinge, $(n+1)^2-(n+1)(2n-1)=-n^2+n+2$.

Valorile $-n^2+n$, pentru $n=0, 1, \ldots$, conform studiului variației acestui trinom, sînt strict descrescătoare pentru $n=1, 2, \ldots$, iar pentru $n=0$ și $n=1$ coincid cu 0.

În fig. 139 este prezentată porțiunea din graficul funcției f ce corespunde intervalului $n-1 \leqslant x < n+1$. Ceea ce interesează esențial în rezolvarea acestei probleme este dacă D_n este mai sus sau mai jos decît C_{n-1}. Ordonata lui C_{n-1} este $f(n-1)=-(n-1)^2+n-1=-n^2+3n-2$, iar cea a lui D_n s-a văzut că este $-n^2+n+2$. Inegalitatea $-n^2+3n-2 \geqslant -n^2+n+2$ este echivalentă cu $2n \geqslant 4$, deci cu $n \geqslant 2$. Rezultă că pentru $n>2$ punctul D_n este mai jos decît C_{n-1}, pentru $n=2$ punctul D_2 se află pe paralela la Ox prin C_1. Ordonata lui D_1 este 2, la fel și cea a lui D_0.

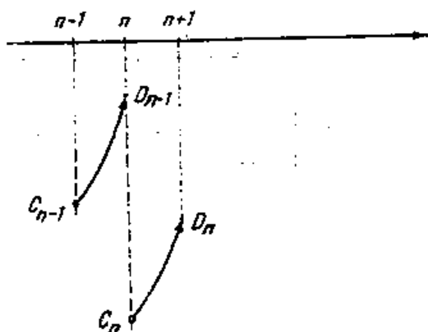


Fig. 139

Graficul funcției f arată deci ca în fig. 140. Se cere mulțimea acelor valori a pentru care dreapta $y=a$ intersectează acest grafic exact în două puncte. Este vizibil că aceasta este $[0, 2)$.

Soluția problemei CU2 (vezi 8.4). Avem

$$2x^3+x^2+2x+1=(2x+1)(x^2+1),\ x^4-1=(x^2-1)(x^2+1),$$

$$x^4+x^3+2x^2+x+1=(x^2+x+1)(x^2+1).$$

Cum $x>1$, cel mai mare dintre cele trei numere este ultimul și, cum factorul x^2+1 nu contează în problemă, corespunzînd înlocuirii triunghiului cu unul asemenea cu el, va trebui demonstrat întîi că $x^2+x+1<x^2-1+2x+1$, ceea ce revine tot la $x>1$. Apoi vom determina unghiul maxim al triunghiului, care se va opune laturii celei mai mari, prin teorema cosinusului

$$(x^2+x+1)^2=(x^2-1)^2+(2x+1)^2-2(x^2-1)(2x+1)\cos u,$$

$$(2x^2+x)(x+2)=(2x+1)(2x+1-2(x^2-1)\cos u),$$

$$x^2+2x=2x+1-2(x^2-1)\cos u,\ \cos u=-1/2,\ u=120°.$$

Soluția problemei DE1 (vezi 8.4). Fie $f(x)=ax^2+bx+c$. Condițiile $a+b+c \geqslant 0$, $a-b+c \geqslant 0$ și $a-c \geqslant 0$ se transcriu prin $f(1) \geqslant 0$, $f(-1) \geqslant 0$ și $x_1x_2 \leqslant 1$, ultima ca urmare a ipotezei $a>0$.

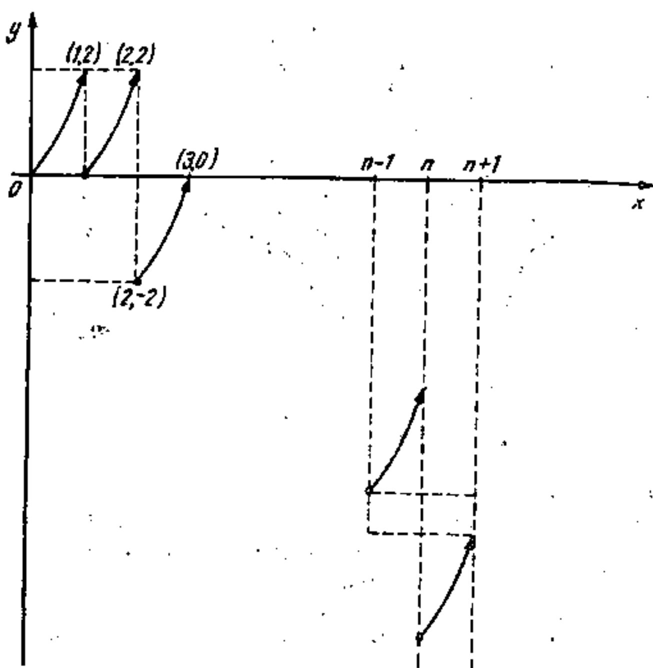


Fig. 140

Prima condiţie echivalează cu „1 nu se află între rădăcini", deci cu : x_1, $x_2 \in (-\infty, 1]$ sau x_1, $x_2 \in [1, \infty)$. Analog, a doua condiţie echivalează cu : x_1, $x_2 \in (-\infty, -1]$ sau $x_1, x_2 \in [-1, \infty)$. Împreună, acestea echivalează cu : x_1, $x_2 \in (-\infty, -1]$ sau x_1, $x_2 \in [-1,1]$ sau $x_1, x_2 \in [1, \infty)$. În cele trei alternative avem, respectiv, $x_1x_2 \geqslant 1$, $x_1x_2 \leqslant 1$, $x_1x_2 \geqslant 1$, egalităţile putînd avea loc respectiv în cazurile $x_1 = x_2 = -1$, $x_1 = x_2 = \pm 1$, $x_1 = x_2 = 1$. Cu aceasta se vede că, dacă primele două condiţii sînt îndeplinite, a treia este echivalentă cu valabilitatea celei de-a doua alternative, q.e.d.

Soluţia problemei DE3 (vezi 8.4). Avem $44^2 = 1936$, $45^2 = 2025$, deci $x = \sqrt{1978} + 44$.

Asemenea determinări nu reuşesc fără calcul, de regulă, decît în cazuri extreme. Aici numărul $(\sqrt{1978} + 44)^{20} + (\sqrt{1978} - 44)^{20}$ este întreg, conform formulei binomului Newton. Se va arăta că al doilea termen al sumei, care este pozitiv, este suficient de mic, mai precis că este mai mic decît 10^{-6}, adică de forma 0,000000... şi va rezulta că a şasea zecimală a lui x^{20}, deci răspunsul la problemă, este 9. Anume, $(44,5)^2 = 44 \cdot 45 + 0,25 = 1980,25 > 1978$, deci $\sqrt{1978} -$

$-44 < 44,5 - 44 = 1/2, (\sqrt{1978} - 44)^{20} < 1/2^{20}$. Dar $1/2^{10} = 1/1024 < < 10^{-3}$, $1/2^{20} < (10^{-3})^2 = 10^{-6}$.

Soluția problemei DE4 (vezi 8.4). a) Să înlocuim în relația din enunț x cu y și y cu x. Obținem $c(x/y) = c(y/x)$, ceea ce, pentru $y = 1$, conduce la $c(x) = c(1/x)$.

b) Să înlocuim, tot în relația din enunț, x cu $1/x$ și y cu $1/y$. Cum $(1/x)/(1/y) = y/x = 1/(x/y)$, rezultă, conform cu a), $s(x)\,s(y) = s(1/x)\,s(1/y)$.

Să alegem, conform ipotezei din enunț, un z cu $s(z) \neq 0$ și să notăm $a = s(1/z)/s(z)$. Rezultă $s(x) = as(1/x)$ și, înlocuind x cu $1/x$, $s(1/x) = as(x)$ pentru orice x. În plus, $s(z) = as(1/z) = a^2 s(z)$, ceea ce, întrucît $s(z) \neq 0$, conduce la $a = \pm 1$.

c) Să arătăm că $s(1/x) = s(x)$ pentru orice x conduce la o contradicție. Ar rezulta $c(x/y) = c(x)c(y) - s(x)\,s(y) = c(x)\,c(1/y) - s(x)\,s(1/y) = c(x/(1/y)) = c(xy)$ pentru orice x și y. Dar, dacă u și v sînt pozitivi, $x/y = u$, $xy = v$ este un sistem ce are soluție $x = \sqrt{uv}$, $y = \sqrt{v/u}$ și ar urma c constant pe $(0, \infty)$, contrar ipotezei. Cu aceasta s-a dovedit că $s(1/x) = -s(x)$ pentr orice x.

d) Din cele stabilite la c) rezultă, pentru $x = 1$, $s(1) = -s(1)$, deci $s(1) = 0$ și analog $s(-1) = 0$. Din relația din enunț, pentru $y = 1$, se obține $c(x) = c(x)c(1)$, deci $c(1) = 1$, conform ipotezei existenței unui x cu $c(x) \neq 0$.

e) Din relația din enunț, pentru $y = -1$, se obține $c(-x) = c(-1)\,c(x)$ și apoi $c(x) = c(-1)\,c(-x) = (c(-1))^2\,c(x)$, de unde, la fel ca la sfîrșitul lu d), $c(-1) = \pm 1$.

f) Tot din relația din enunț se obține, pentru $s(z) \neq 0$, $s(x) = (c(x)c(z) - c(x/z))/s(z)$, relație din care, pentru x înlocuit cu $-x$, rezultă $s(-x) = c(-1)\,s(x)$.

g) Condiția $c(x) + s(x) = x^n$ implică, pentru x înlocuit cu $1/x$, $c(x) - s(x) = x^{-n}$, deci două funcții c și s care satisfac relația din enunț și relația de aici, dacă există, sînt neapărat $c(x) = (x^n + x^{-n})/2$, $s(x) = (x^n - x^{-n})/2$. Aceste funcții nu sînt constante pe nici un interval și verifică relația din enunț:

$$c(x)\,c(y) - s(x)\,s(y) = (x^n y^n + x^n y^{-n} + x^{-n} y^n + x^{-n}y^{-n} - x^n y^n + x^n y^{-n} + x^{-n}y^n - x^{-n}y^{-n})/4 = (x^n y^{-n} + x^{-n}y^n)/2 = c(x/y).$$

Soluția problemei DE5 (vezi 8.4). a) Soluția începe cu punctul a) al soluției precedente, care conduce la $c(1/x) = c(x)$, și continuă cu stabilirea faptului că dacă s nu este identic 0, atunci $s(1/x) = as(x)$ pentru orice x, în care a nu depinde de x, $a = \pm 1$ (vezi b) din soluția problemei precedente).

Dacă $a = -1$, atunci, înlocuind în $c(x) + s(x) = f(x)$ argumentul x cu $1/x$, se obține $c(x) - s(x) = f(1/x)$, deci $c(x) = (f(x) + f(1/x))/2$, $s(x) = (f(x) - f(1/x))/2$ și o verificare analoagă cu cea de la sfîrșitul

soluţiei precedente, bazate pe $f(xy)=f(x)f(y)$, arată că funcţiile c şi s obţinute satisfac relaţia din enunţ.

b) Rămîne să considerăm cele două cazuri rămase. Cazul $s\equiv 0$ conduce la $c(x)=f(x)$, relaţiile din enunţ cer $f(x/y)=f(x)f(y)=f(xy)$ şi aceasta, la fel ca în c) din soluţia precedentă, reclamă f constant, contrar ipotezei. Deci în acest caz nu se obţine nici o pereche de funcţii c, s care să îndeplinească cele cerute de enunţ.

c) Cazul $a=1$ conduce la c constant, la fel ca în c) din soluţia precedentă. Cum cazul s identic nul s-a eliminat în b), obţinem din relaţia din enunţ, alegînd un y cu $s(y)\neq 0$, că şi s va fi constant, deci $f=c+s$ constant, caz exclus. Deci există o singură pereche de funcţii c, s, anume cea de la a), care îndeplineşte condiţiile cerute.

Observaţie. Autorii au indicat o soluţie independentă de cea a problemei precedente, în care f este mai mult antrenată. Anume, avem $f(1)=(f(1))^2$, deci $f(1)=1$, cazul $f(1)=0$ conducînd, prin $f(x)=f(1)f(x)$, la f identic nulă.

Din relaţia din enunţ rezultă $c(1)=(c(1))^2-(s(1))^2$, ceea ce, împreună cu $c(1)+s(1)=f(1)=1$, implică $c(1)=c(1)-s(1)$, $s(1)=0$ şi apoi $c(1)=1-s(1)=1$. Acum $1=(c(x))^2-(s(x))^2$, împreună cu $c(x)+s(x)=f(x)$, conduce la $c(x)-s(x)=1/f(x)$ etc.

Soluţia problemei FI1 (vezi 8.4). Conform relaţiilor Viète, problema revine la a determina condiţii necesare şi suficiente ca egalităţile $t+u+v=-a$, $tu+uv+vt=b$, $tuv=-c$ să implice $t^3+u^3+v^3=-a^3$, $t^3u^3+u^3v^3+v^3t^3=b^3$, $t^3u^3v^3=-c^3$.

Vom calcula întîi membrii stîngi ai celui de-al doilea grup de egalităţi în funcţie de cei ai primului grup. Anume

$$t^2+u^2+v^2=(t+u+v)^2-2(tu+uv+vt),$$

$$s=t^2u+tu^2+u^2v+uv^2+v^2t+tv^2=(t+u+v)(tu+uv+vt)-3tuv,$$

$$(t+u+v)(t^2+u^2+v^2)=t^3+u^3+v^3+s,$$

$$t^3+u^3+v^3=(t+u+v)((t+u+v)^2-2(tu+uv+vt))-s$$

şi ajungem, ca prim rezultat, la

$$t^3+u^3+v^3=(t+u+v)^3-3(t+u+v)(tu+uv+vt)+3tuv.$$

Evident $t^3u^3v^3=(tuv)^3$.

Pentru a calcula $t^3u^3+u^3v^3+v^3t^3$, o scriem sub forma $t^3u^3v^3((t^{-1})^3+(u^{-1})^3+(v^{-1})^3)$ şi aplicăm rezultatul obţinut relativ la $t^3+u^3+v^3$, pentru t^{-1}, u^{-1}, v^{-1} în loc de t, u, v; deci t, u, v sînt presupuse variabile, nu numere, pentru a evita considerarea separată

a cazului $tuv = 0$. Obţinem

$$t^3u^3 + u^3v^3 + v^3t^3 = t^3u^3v^3((t^{-1} + u^{-1} + v^{-1})^3 -$$

$$- 3(t^{-1} + u^{-1} + v^{-1})((tu)^{-1} + (uv)^{-1} + (vt)^{-1}) + 3(tuv)^{-1}) =$$

$$= (tu + uv + vt)^3 - 3(t + u + v)(tu + uv + vt)\,tuv + 3\,(tuv)^2.$$

Acum condiţiile cerute apar sub forma $-a^3 + 3ab - 3c = -a^3$, $b^3 - 3abc + 3c^2 = b^3$, $-c^3 = -c^3$ şi acestea revin la $ab = c$, $abc = c^2$; prima o implică pe a doua şi rămîne $ab = c$ drept condiţie necesară şi suficientă pentru valabilitatea situaţiei din enunţ, mai puţin realitatea rădăcinilor. Condiţia obţinută cere ca ecuaţia iniţială să fie de forma $x^3 + ax^2 + bx + ab = 0$, deci $(x + a)(x^2 + b) = 0$; aceasta are rădăcini reale dacă şi numai dacă, a şi b fiind reali, avem $b \leqslant 0$.

Se poate verifica imediat faptul că, în acest caz, ecuaţia $x^3 + a^3x^2 + b^3x + a^3b^3 = 0$ va avea ca rădăcini cuburile rădăcinilor $-a$, $\pm\sqrt{-b}$ ale ecuaţiei iniţiale.

Soluţia problemei TR2 (vezi 8.4). Deoarece $\log_a x = \log x/\log a$ expresia din enunţ rezultă egală cu $(\log a + \log b + \log c)/\log(abc) = 1$.

Soluţia problemei VN1 (vezi 8.4). $u_1 = x + \sqrt{x^2 - 1}$ şi $u_2 = x - \sqrt{x^2 - 1}$ satisfac ecuaţia $(u - x)^2 = x^2 - 1$, adică $u^2 - 2xu + 1 = 0$. Rezultă $u^n - 2xu^{n-1} + u^{n-2} = 0$ şi $(2^{-n}u^n) - x(2^{-(n-1)}u^{n-1}) + (2^{-(n-2)}u^{n-2})/4 = 0$ pentru $n \geqslant 2$, relaţie valabilă şi pentru u_1 şi pentru u_2, deci care, prin adunare, stabileşte egalitatea din punctul a) al enunţului. Avem $P_0(x) = 2$, $P_1(x) = x$ şi un raţionament imediat de inducţie conduce la concluzia că $P_n(x)$ este un polinom de gradul n al cărui coeficient al lui x^n, pentru $n \geqslant 1$, este 1.

Soluţia problemei YU2 (vezi 8.4). a) Condiţia de compatibilitate. Să considerăm vectorii $u = (ax, a\sqrt{1 - x^2})$, $v = (by, b\sqrt{1 - y^2})$ şi $w = (cz, c\sqrt{1 - z^2})$, într-un plan xOy. Sistemul revine la $u + v = w$, deci u, v, w vor forma un triunghi. Lungimile vectorilor u, v, w sînt respectiv a, b, c, deci o condiţie necesară de compatibilitate a sistemului este $|a - b| \leqslant c \leqslant a + b$.

Să arătăm că această condiţie este şi suficientă. Cu acest scop să construim triunghiul, eventual degenerat în trei puncte coliniare, OAC, de laturi $OA = a$, $AC = b$, $OC = c$, cu latura OA de-a lungul părţii pozitive a axei Ox şi situat în semiplanul $y \geqslant 0$ (fig. 141). Fie $u = OA$, $v = AC$ şi $w = OC$, consideraţi ca vectori şi ax, by, cz componentele lor pe Ox. Componentele lor pe Oy vor fi toate $\geqslant 0$,

egale respectiv cu $a\sqrt{1-x^2}$, $b\sqrt{1-y^2}$, $c\sqrt{1-z^2}$ şi sistemul va fi verificat de x, y, z, deoarece $u+v=w$.

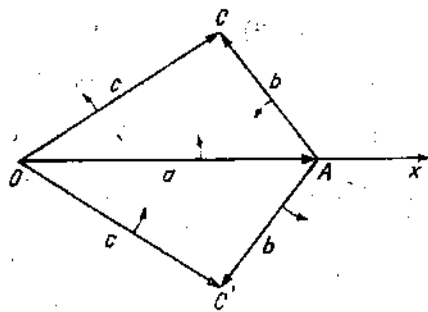


Fig. 141

b) Fie acum a, b, c trei numere pozitive, pentru care $|a-b|<$ $<c<a+b$ şi să determinăm toate soluţiile sistemului din enunţ. Dacă figurăm cei trei vectori u, v, w, ce corespund unei soluţii ca la punctul a), aşa încît u şi w să aibă ambii originea în O, atunci va rezulta un triunghi de laturi a, b, c, care va fi congruent cu OAC din fig. 141, deci care se va obţine printr-o rotaţie în jurul lui O din triunghiul OAC sau din simetricul său OAC' faţă de Ox. În ambele cazuri, să notăm cu p unghiul acelei rotaţii, considerat însă contrar acelor de ceasornic, deci $0 \leqslant p \leqslant 2\pi$.

Unghiul p nu poate fi însă oricum, trebuie ca vectorii u, v, w ce rezultă să aibă componente $\geqslant 0$ pe Oy. Relativ la vectorul u, care se obţine rotind OA, această condiţie cere $0 \leqslant p \leqslant \pi$.

În cazul în care triunghiul care se roteşte este OAC, aceeaşi condiţie relativă la v, care se obţine din AC, este, limitîndu-ne la $0 \leqslant p \leqslant$ $\leqslant \pi$, $p \leqslant \hat{A}$, iar cea relativă la w, ce se obţine rotind OC, este $p \leqslant \pi -$ $-\hat{O}$, dar, cum $\pi - \hat{O} \geqslant \hat{A}$, condiţia relativă la w este implicată de cea relativă la v. Am notat cu $\hat{O}, \hat{A}, \hat{C}$, unghiurile respective ale triunghiului OAC.

Cu aceasta am obţinut o familie de soluţii ale sistemului din enunţ, anume $x=\cos p$, $y=\cos(p+\pi-\hat{A})$, $z=\cos(p+\hat{O})$, unde p parcurge $[0, \hat{A}]$.

În cazul în care triunghiul care se roteşte este OAC', limitîndu-ne la $0 \leqslant p \leqslant \pi$, condiţia relativă la v, ce provine din AC', este $p \geqslant \pi -$ $-\hat{A}$, iar cea relativă la w, ce provine din OC', este $p \geqslant \hat{O}$ şi este implicată de $p \geqslant \pi - \hat{A}$, ca urmare a inegalităţii $\hat{O} \leqslant \pi - \hat{A}$. Se obţine astfel o a doua familie de soluţii, disjunctă de prima, ale sistemului din enunţ, anume $x=\cos p$, $y=\cos(p+\hat{A}-\pi)$, $z=$ $=\cos(p-\hat{O})$, unde p parcurge $[\pi-\hat{A}, \pi]$.

c) Considerăm acum cazul „degenerat" $c=a-b$, deci $a>b$. Triunghiul OAC va fi format din trei puncte coliniare, vectorii u,v, w vor fi proporţionali, dar u şi v vor avea sensuri opuse. Numai

necesitatea acestui moment apare și din alt punct de vedere. În fața unei liste de circa 16 probleme, cum au fost cele propuse juriilor la Olimpiadele 15—19, expuse în capitolele precedente, un matematician, șef de delegație, poate avea reacția de a adera la toate, sau la majoritatea, mergînd chiar pînă la un entuziasm pentru o bună parte din ele, aceasta ținînd seama și de diversitatea domeniilor de matematică, a gradelor de dificultate, ce trebuie reprezentate de aceste probleme.

Nu același lucru se întîmplă cu o listă de peste 50 probleme. Numărul lor determină aceasta, mai mult decît, de exemplu, faptul că, atîta vreme cît numai șase dintre ele se vor consacra, celelalte urmînd să rămînă „îngropate în documentele Olimpiadei", delegațiile nu trimit totdeauna chiar tot ce au mai bun. Așa încît a pune în fața juriului sarcina de a alege cele șase probleme de concurs din toată această listă ar insemna nu numai lungirea perioadei de rezolvare a problemelor și a lucrărilor juriului, nu numai micșorarea prerogativelor țării gazdă, dar, în primul rînd chiar, supunerea șefilor de delegații la un efort inițial și la o uzură prea mari, care ar putea compromite condițiile de desfășurare ale etapelor următoare ale lucrărilor.

Aceste constatări se adaugă la altele cu caracter cantitativ, care ne dau o imagine asupra unor caracteristici ale intelectului uman, constatări care apar și în legătură cu activitățile școlare etc. Presupunînd că am stabilit o idee exactă asupra a ceea ce este o problemă de Olimpiadă Internațională, faptul că sînt două zile de concurs, succesive, că se dau cîte trei probleme în fiecare zi, de dificultăți variate, și că se acordă patru ore de lucru, că șeful de delegație are de făcut cunoștință cu circa 16 probleme, că el are de corectat, împreună cu secundul său, opt lucrări a cîte șase probleme, că termenele pentru activitățile ce trebuie îndeplinite sînt cele din programul prezentat la 8.1 etc. sînt constatările la care ne-am referit.

Micșorarea sensibilă a acestor eforturi ar da impresia concurenților că nu li se dă posibilitatea să-și etaleze toate calitățile, șefilor de delegații că își pierd timpul, iar mărirea lor, la fel, ar baza rezultatele la Olimpiade mai mult pe capacitatea de efort prelungit sau intens decît pe talentul, respectiv competența matematică.

Deși există multe trăsături obiective în activitatea comisiei de selecție, această activitate se bazează esențial pe componente subiective, pe ceea ce s-ar numi gustul matematic al membrilor ei (vezi în acest sens și 2.3, 2.4). Într-adevăr, este imposibil de definit ce este o problemă potrivită Olimpiadei Internaționale, cu atît mai puțin de stabilit grade de comparație. Membrii comisiei se cunoșteau de mult din activitatea lor matematică, așa încît în discuțiile dintre ei

a existat posibilitatea de transmitere nemijlocită a unor păreri foarte precise, în măsură mult mai mare decît în discuțiile din juriul Olimpiadei. De aceea nu am intrat și nici nu vom intra în alte detalii asupra lucrărilor acestei comisii, asupra argumentelor prezentate. Ne mărginim a clasifica reacțiile în fața diferitelor probleme în „prea grea", „grea, dar merge", „depășește materia", „bună!", „mai ușoară, dar merge", „prea ușoară", „pare cunoscută". Unele din aceste impresii le-am dezvăluit în 8.6, 8.7; despre circa 20 dintre cele 54 s-a spus „prea ușoară". Nici una dintre cele 54 nu s-a apropiat de calificativul „negativ", posibil, exprimat prin „este legată de muncă prea multă, în mare parte brută, și oferă satisfacții prea mici".

Lista propusă juriului s-a decis deci să conțină 17 probleme, anume: BG1, BG4, CS2, CU3, DE2, FR2, FR3, FR5, GB4, GB5, NL1, SE2, US1, US6, VN2, YU1, YU2 (vezi 8.4 și 8.6—8.12).

Ținînd seama de faptul că soluția ce însoțește o astfel de problemă poate influența decisiv alegerea sau nealegerea ei pentru concurs, cel mai bun exemplu fiind problema *2* (15-VN, vezi 7.2) de la Olimpiada a 19-a (vezi soluțiile ei în 7.3), comisia a luat inițiativa de a nu reproduce pur și simplu formulările și soluțiile autorilor, ci a ajusta unele din acestea, avînd drept singur scop de a le face mai ușor de urmărit. Mai mult, a inclus în materialul prezentat juriului și soluții și observații ale comisiei. Este vorba de observația la BG1 (relativă la înlocuirea lui $k^3 + k$ cu $k^3 + 1$, vezi 8.9), de observația la FR5 (vezi 8.11), dar nu și de prima ei soluție, deoarece la acel moment nu fusese văzut cel mai simplu argument din acea soluție—demonstrația unicității, de prima soluție la problema GB5 (vezi 8.9), de prima soluție la problema SE2 (vezi 8.10), de prima soluție la problema VN2, însoțită de observația că s-ar putea cere numai demonstrația imposibilității așezării respective pentu orice $n > 3$ impar (vezi 8.6), de observația la YU2 (vezi 8.12). Această inițiativă, poate unică în felul ei, a însemnat compunerea și dactilografierea materialului respectiv, în cele patru limbi oficiale, de membrii comisiei, într-un timp foarte scurt.

De asemenea, ținînd seama de cererile juriului la Olimpiada a 18-a (vezi 6.4) și chiar la a 15-a (vezi 3.9), comisia a pregătit textele, în limba engleză, însoțite de soluții, ale cîtorva probleme în plus, așa-numita listă de rezervă (vezi 8.8—8.12), anume BG2, BG3, GB1, US3, YU3, pentru a le putea oferi, la cerere.

9

A 20-A OLIMPIADĂ INTERNAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

(București, Bușteni, România, 1978)

9.1. Organizare

La Olimpiada a 20-a au luat parte 17 țări, anume AT, BG, CS, CU, DE, FI, FR, GB, MN, NL, PL, RO, SE, TR, US, VN, YU, deci cu trei mai multe decît numărul celor ce trimiseseră probleme (vezi 8.4), plus țara gazdă. A participat și un observator din Ungaria. Turcia a participat pentru prima dată. Trei din țările ce participaseră la Olimpiada a 19-a, pentru prima dată sau după o absență mai lungă, nu au mai participat la cea de a 20-a.

București-Bușteni sînt circa 130 km, în comparație cu Beograd-Arandjelovac circa 80 și Lienz-Heiligenblut circa 40 la cele două Olimpiade anterioare, deci distanța între locul de desfășurare a concursului și cel de activitate a juriului creștea mereu.

Președintele juriului participase la Olimpiadele 15—19, în calitate de șef de delegație. Următoarea statistică arată de cîte ori participase fiecare din cei 16 șefi de delegație prezenți la Olimpiada a 20-a, în afară de cel al României, la aceste cinci Olimpiade, în calitate de șef sau secund al delegației respective. Anume, trei din ei participaseră la toate cinci, alți cinci la cîte patru, alți patru la cîte trei, doi la cîte una și doi la nici una. Din „absențe", 15 erau „motivate" prin neparticiparea țării respective. Din aceste date rezultă clar că, prin componența sa, juriul prezintă o mare stabilitate. Lucrările juriului nu necesită o perioadă de luare de contact, de cunoaștere reciprocă, fapt ce facilitează sarcina președintelui.

În conducerea juriului este necesar a asigura luarea în considerație a părerilor tuturor membrilor săi, problemă a cărei dificultate crește o dată cu numărul de delegații participante. Dar cea mai mare răspundere a președintelui juriului este de a fi gata, înainte de zilele de concurs, cu plicurile cu listele de cîte trei probleme, ce vor fi înmînate concurenților, în limbile lor materne. O amînare ar însemna o mare cheltuială, amînarea și a rezervărilor de bilete

pentru întoarcerea delegaţiilor în ţările lor etc. De aceea în conducerea juriului este necesar a trece cu hotărîre, neîntîrziat, la vot, imediat ce se constată că nu mai apar păreri noi în legătură cu problema în discuţie. De asemenea, este necesar a organiza îndeplinirea sarcinilor juriului într-un mod cît mai expeditiv.

Există multe momente în activitatea juriului ce nu se bazează pe o regulă, ci pe părerile personale ale membrilor săi. Este bine deci ca atît şefii de delegaţii cît şi preşedintele să manifeste consideraţie faţă de părerile celorlalţi, chiar cînd acestea nu coincid sau nu corespund cu părerea lor. Susţinerea părerilor proprii prin argumente, care uneori au putut fi pierdute din vedere de ceilalţi participanţi, contribuie la succesul activităţii juriului, dar încăpăţînarea, într-o situaţie de minoritate, are ca prim efect negativ lungirea lucrărilor.

9.2. Prima fază a lucrărilor

Lista de probleme propuse juriului figurează în 8.13, enunţurile lor fiind date în 8.4.

Din start s-au eliminat problemele FR3 (este cunoscută chiar drept consecinţă a unei teoreme), SE2 (cunoscută) şi CS2 (la fel). Această eventualitate în legătură cu primele două fusese prevăzută de o parte din comisia de selecţie (vezi 8.9 şi 8.10).

În cursul discuţiilor s-a dat o nouă soluţie problemei GB5, ce o vom prezenta în 9.5.

Procedura de selecţie a celor şase probleme de concurs din cele 14 rămase a fost aceeaşi ca şi la Olimpiada a 19-a (vezi 7.4), procedură ce s-a aplicat şi în legătură cu alte decizii cu mai multe alternative, în lucrările Olimpiadei a 20-a. Şi pe această cale se poate ajunge, şi chiar s-a ajuns în unele cazuri, la balotaje, situaţii rezolvate prin apelul „dacă vreuna din delegaţii consideră că, totuşi, îşi poate modifica opţiunea pentru a evita impasul, este invitată s-o facă", apel la care s-a răspuns de fiecare dată cu promptitudine.

Aspectul iniţial al diagramei respective este redat în fig. 143.

Fiecare coloană corespunde uneia din delegaţii. Primul rezultat a fost deci eliminarea problemelor FR5, GB4, YU1 şi apoi VN2. În momentul următor a existat o situaţie de balotaj, DE2 primind trei din voturile „mutate" de la cele patru probleme eliminate, FR2 şi YU2 cîte două şi astfel şase probleme fiind la „minimum" cu cîte nouă voturi (GB5 primise şi ea încă două voturi). Printre acestea erau probleme unice ca domeniu ce-l reprezentau, anume FR2, US6, YU2. Rezultatul apelului amintit a fost eliminarea problemelor BG4, ca urmare a acordării de şanse mai mari celeilalte probleme, US1, de geometrie plană, şi aceasta soluţionată prin transformări

BG1		×	×	×	×			×	×	×		×		×				9	voturi
BG4	×					×	×	×			×		×		×	×	×	9	„
CU3	×	×	×			×	×	×		×	×		×	×	×	×	×	13	„
DE2				×	×	×			×		×	×						6	„
FR2	×	×	×		×				×			×				×		7	„
FR5										×	×			×				3	„
GB4		×		×								×						3	„
GB5			×	×	×		×	×					×		×	×	×	9	„
NL1	×	×		×	×	×	×				×		×	×			×	10	„
US1		×	×	×	×		×	×	×			×	×			×		10	„
US6	×					×	×		×	×				×	×	×	×	9	„
VN2			×							×				×	×			4	„
YU1	×							×			×							3	„
YU2						×			×	×		×	×		×		×	7	„

Fig. 143

geometrice (vezi 8.11) şi DE2, fiind cam din acelaşi domeniu cu GB5, CU3. În urma mutării voturilor, tabelul a arătat ca în fig. 144.

BG1		×	×	×	×	×	×	×	×	×		×		×				11	voturi
CU3	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	17	„
FR2	×	×	×	×	×			×	×		×	×		×		×		11	„
GB5	×	×	×	×	×	×	×	×		×	×		×		×	×	×	14	„
NL1	×	×		×	×	×	×				×		×	×	×	×	×	12	„
US1	×	×	×	×	×		×	×	×	×	×	×	×		×	×	×	15	„
US6	×					×	×		×	×		×	×	×	×	×	×	11	„
YU2			×			×		×	×	×	×	×	×	×	×		×	11	„

Fig. 144

A urmat un nou balotaj, pe care „unicitatea“ nu-l mai rezolva, FR2, US6, YU2 fiind în această situaţie. S-au mutat, în final, doar opt voturi în loc de 22, toate de la BG1 şi YU2, ajungîndu-se la a se alege CU3 şi US1 cu cîte 17 voturi, NL1 cu 16, GB5 cu 15, US6 cu 12 şi FR2 cu 11.

Comisia de selecţie, văzînd modul cum i-a fost continuată activitatea, a constatat o identitate între concepţiile sale şi cele ale juriului ce a depăşit aşteptările ! Problema favorită GB5 (vezi soluţia ei în 8.9) fusese aleasă. Problema NL1, de dragul căreia se consumase multă energie (vezi soluţia ei în 8.6) — pînă şi enunţul ei trebuise puţin modificat, dar nu am mai dat aceste detalii—fusese aleasă; după 5 ani, în fine, o problemă de geometrie în spaţiu, domeniu în legătură cu care, se prelungiseră multe controverse în comisie (vezi 8.8). CU3, care, dintre cele mai simple, fusese considerată printre cele mai potrivite (vezi soluţia ei în 8.9), fusese aleasă. De asemenea, printre problemele de geometrie plană (vezi 8.4, 8.11), US1 primise poate cele mai multe semne de exclamare împreună cu calificativul „bună“ (vezi 8.13). Mai puţine satisfacţii a trezit alegerea lui FR2 (vezi 8.10), în comparaţie în special cu YU2 (vezi 8.12), dar trebuia totuşi ţinut seama că ea

echilibra dificultatea de ansamblu a setului, mărită în special prin alegerea lui NL1.

Lista de rezerve, de a cărei existență juriul fusese anunțat (vezi 8.13), nu a fost solicitată niciodată.

În plus, lucru îmbucurător, juriul era în avans față de programul său de activitate.

În acest moment însă, din partea delegației țării noastre, s-a comunicat faptul că NL1 figurează, ca o consecință a unei leme a lui Schur, într-o carte de specialitate. Sînt matematicieni care prin preocupările lor științifice sau didactice sînt departe de domeniile de matematică ce sînt de bază pentru Olimpiadă, care sînt mereu gata să creadă că o problemă propusă este complet originală, și care, într-o situație cum este cea în care se găsea acum NL1, sînt categoric pentru eliminarea ei de pe lista de concurs. Sînt alții însă care sînt foarte aproape de acele domenii și care recunosc mereu în problemele ce se propun elemente din raționamente mai sofisticate, apărute în lucrări de matematică dificile de urmărit chiar pentru specialiști și care sînt gata să nu țină seama de astfel de situații.

În juriu erau prezenți, cum era și normal, matematicieni care reprezentau aceste două extreme și multe situații intermediare. Mulți dintre ei au luat cuvîntul, argumentînd pentru și contra menținerii listei votate de probleme de concurs, și toți aveau dreptate. Numai votul putea hotărî cine avea în acel moment mai multă dreptate și acel vot a decis menținerea listei, președintelui juriului rămînîndu-i cel mult să-și exprime regretul de a fi fost obligat să treacă peste unele păreri, dar și hotărîrea de a trece mai departe, deoarece timpul era prețios.

Balotaje de mai mică importanță au apărut și în legătură cu hotărîrile asupra ordinii și punctajelor, care au fost următoarele: *1* (CU3) — — 6 puncte, *2* (US6) — 7 puncte, *3* (GB5) — 8 puncte; *4* (US1) — 5 puncte, *5* (FR2) — 6 puncte, *6* (NL1) — 8 puncte.

În momentul următor a fost luată, de conducerea juriului, o inițiativă care a scurtat lucrările. Este vorba de organizarea redactării listei de șase probleme de concurs în cele patru limbi oficiale. De obicei se constituia cîte o comisie pentru fiecare din acele limbi, dar formulările ce rezultau difereau, evident nu în aspectele esențiale, și juriului îi revenea apoi misiunea de a le egala. La Olimpiada a 20-a s-a procedat altfel. S-a cerut de la fiecare membru al juriului o notă cu limbile, din cele patru, în care ar putea lucra la o astfel de redactare, și s-au constituit comisii pe probleme, ajutate și de cei patru translatori ai comitetului de organizare.

La fiecare Olimpiadă Internațională au existat cîte patru translatori, care de regulă nu au fost matematicieni, pentru cele patru

limbi oficiale. Nu am insistat asupra acestui aspect, deoarece posibilitatea organizării în modul indicat a activității menționate înainte corespunde faptului că fiecare delegat cunoaște, în cele mai multe cazuri, cel puțin două din cele patru limbi; traducerea nu ridică probleme deosebite la Olimpiada Internațională de Matematică.

9.3. Probleme în legătură cu regulamentul Olimpiadei

Am prezentat acest regulament în paragrafele 2.1 și 2.2 și am adăugat alte aspecte pe parcursul acestei lucrări (2.7, 3.11, 4.1, 4.5, 5.1, 5.16, 6.1, 7.4, 8.1, 8.3), unele reprezentînd nu prevederi obligatorii, ci simple recomandări, principii sau proceduri. Multe din aceste aspecte sînt foarte speciale, rezolvă unele probleme delicate și astfel apare uneori impresia că prin perfecționarea acestui regulament se pot rezolva și altele. Aceasta conduce la apariția, la unele Olimpiade, a unor propuneri de a introduce în acest regulament o clauză sau alta, care par judicioase la prima vedere, dar care apar imposibile chiar privite numai cu ochiul juristului.

Conducerea juriului, evident, nu putea urma exemplul unora din delegații cu mai multă experiență, care tratau cu indiferență asemenea episoade. Vom discuta, pe scurt, trei astfel de clauze, propuse nu o dată a fi introduse ca obligatorii.

Prima clauză ar cere ca un concurent să nu poată participa la mai mult de o Olimpiadă Internațională. Ideea corespunde în special existenței unor țări ce nu organizează concursuri naționale la toate clasele și care nu pot deci prezenta concurenți decît din ultima clasă de liceu.

Din punctul de vedere al unui concurent, aceasta ar putea conduce la îndoieli de felul următor: „M-am calificat în lotul național, după multă luptă, dar nu este mai bine să cedez locul unuia din ultima clasă, contînd pe faptul că anul viitor voi fi mai puternic?". Chiar un profesor ar putea insista pe lîngă el s-o facă. „Pe de altă parte, dacă nu mă calific anul următor?". „Am obținut, să zicem, premiul 3 anul acesta. Nu sînt la nivelul însă de a deveni student. Îmi place matematica, dar mobilul cel mai puternic nu mai funcționează".

Din partea conducerii juriului, aceasta ar însemna să strîngă toate listele de concurenți de la ultimile, să zicem, trei Olimpiade Internaționale și să le compare cu cele din anul respectiv. S-ar putea vedea ajunsă în situația de a se întreba dacă John Smith, sau Jean Dupont, sau Ivan Ivanov de anul acesta nu este același cu cel de acum trei ani și, în caz de îndoială, să ceară, la sosire, șefului de delegație respectiv ca, în loc să se preocupe de activitatea în juriu, s-o dovedească. Este, credem, mai bine ca aceasta să constituie

o problemă internă a fiecărei ţări participante şi să se rămînă la prevederile din 2.1 şi 4.5.

O a doua clauză ar cere ca în lista de probleme de concurs să nu poată figura mai mult de una propusă de aceeaşi delegaţie. Ca recomandare, de aceasta s-a ţinut totdeauna seamă (vezi şi 8.5). Situaţii în care s-au propus în concurs două probleme ale aceleiaşi ţări, la Olimpiadele 15—20, au fost PL şi SE la Olimpiada a 15-a, GB şi SU la Olimpiada a 17-a, NL la a 18-a şi a 19-a, US la a 20-a. Evident că nu se poate spune că în toate aceste cazuri au lipsit probleme bune ce ar fi putut evita încălcarea acelei recomandări. Dar dacă ne reamintim dificultăţile, descrise în 3.9, de alegere a problemelor la Olimpiada a 15-a şi faptul că US1 şi US6, la a 20-a, au obţinut un acord aproape unanim în comparaţiile cu cele din acelaşi domeniu cu ele, ajungem la concluzia că o prevedere categorică în acest sens ar face mai mult rău decît bine Olimpiadei.

În plus, pentru a putea fi create condiţiile, de conducerea juriului, pentru punerea ei în aplicare, o astfel de prevedere ar trebui completată cu obligativitatea, pentru toate delegaţiile, de a trimite comitetului de organizare ...probleme potrivite, noţiune ce am menţionat deja în 8.13 că nu apare a putea fi definită nici chiar în condiţii de consens.

O a treia clauză ar cere ca programa analitică a Olimpiadei Internaţionale să fie precizată în scris. Unele principii există (vezi 2.7). Dar a întocmi un material în acest sens ar însemna convocarea a cîte cel puţin un reprezentant din fiecare ţară participantă (inclusiv cheltuielile respective) la lucrările unei comisii care ar produce o listă de capitole, teoreme etc. de matematică elementară, care s-ar dovedi cunoscute tuturor, neaducînd nimic nou prin aceasta. În plus, nu este greu, din punct de vedere formal, a eluda o astfel de clauză, după cum se poate vedea examinînd, de exemplu, soluţiile problemelor NL2 (vezi 8.4 şi 8.7) şi US5 (vezi 8.4 şi 8.10). Nici a abuza de o astfel de clauză nu este greu. De exemplu, în ce măsură problemele, date la Olimpiada a 19-a cu numerele *2* (15—VN, vezi 7.2 şi 7.3) şi *3* (10—NL, vezi 7.2 şi 7.3), se încadrează sau nu în vreo programă analitică detailată? Dar NL1, de la 8.4, 8.6? Este bine ca activitatea comisiei de selecţie şi a juriului să aibă în primul rînd caracter matematic (vezi şi 8.13).

Aşa apar aceste probleme, privite cu ochii conducerii juriului. De pe aceeaşi poziţie, altă dificultate apare mult mai serioasă, fără a i se întrezări o rezolvare. Cum se poate dovedi că o problemă este sau nu „cunoscută"? În ce măsură se poate evita folosirea abuzivă a unor astfel de argumente pentru eliminarea unor probleme? În ce măsură poate fi organizată o evidenţă a problemisticii internaţionale,

pentru a evita pierderea unor probleme propuse juriului de comisia de selecție, ca urmare a faptului că sînt „cunoscute"? O asemenea evidență ar putea feri și concursurile interne de probleme, cum sînt cele organizate de Gazeta Matematică, de probleme servite în mod cu totul nejustificat drept originale. Dar și a abuza de asemenea evidențe poate conduce la inhibarea propunătorilor de probleme.

Propunerile discutate în acest paragraf nu au creat probleme activității juriului; acestea au condus, cel mult, la precizarea unor aspecte organizatorice.

9.4. Coordonare și premii

Toți coordonatorii propuși erau angrenați în activități la locurile lor de muncă, așa cum este normal. De aceea, numai după ce au fost văzuți adunați la Bușteni, a dispărut grija ca obligații neprevăzute să nu-i rețină.

În ședința de organizare a coordonării s-au constituit cele șase echipe de cîte trei coordonatori, corespunzătoare celor șase probleme de concurs, avînd grijă ca în fiecare echipă să existe, pentru fiecare din cele patru limbi oficiale, cel puțin un coordonator care să poată discuta liber cu delegații în acea limbă.

S-a convenit ca, în cazul unor divergențe cu o delegație, să nu se prelungească eventuala controversă și să se lase decizia pe seama juriului, la ultima sa adunare.

La prima ședință comună a juriului și a coordonatorilor s-au votat, așa cum s-a făcut și la celelalte Olimpiade, cîteva reguli privind coordonarea, deși, după cum s-a explicat și exemplificat la 5.16, niciodată nu pot fi prevăzute, nici pe departe, toate situațiile ce pot apărea. Iată aceste reguli.

La problema *1* (CU3, vezi 8.4, soluția în 8.9) se va da un punct pentru concluzia $m \geqslant 3$, un punct pentru concluzia $n - m = 4k$, două puncte pentru utilizarea efectivă a teoremei Euler, adică pentru $1978^{100} - 1 = 125\,r$ sau pentru o concluzie asemănătoare, punctaje ce se vor aduna.

La problema *2* (US6, vezi 8.4, soluția în 8.8) se vor da 4 puncte pentru demonstrația faptului că locul geometric este inclus într-o sferă, cu condiția ca sfera să fie determinată precis.

La problema *3* (GB5, vezi 8.4, soluția în 8.9) se vor da 4 puncte pentru concluzia că al n-lea număr ce lipsește din șir este $f(n) + n$, demonstrată însă complet (vezi soluția acestei probleme din 9.5, prezentată în juriu).

La problemele *4* (US1, vezi 8.4, soluția în 8.11) și *5* (FR2, vezi 8.4, soluția în 8.10) nici o regulă.

La problema *6* (NL1, vezi 8.4, soluţia în 8.6) se dă un punct pentru considerarea de diferenţe între numerele membrilor din aceeaşi ţară, încă un punct pentru considerarea numai a diferenţelor $a_{330} - a_i$, încă 3 puncte pentru stabilirea faptului că diferenţele dintre doi $a_{330} - a_i$ ce sînt în B nu sînt nici în A nici în B şi încă 3 puncte pentru rest; pentru a înţelege aceste reguli, trebuie urmărită în detaliu soluţia, de la 8.6, a acestei probleme.

Coordonarea a decurs perfect: nici o controversă nu a antrenat în ea conducerea juriului.

La şedinţa finală au trebuit luate decizii în două cazuri. Unul era în legătură cu o lucrare în care la problema *6* (NL1, vezi 8.4), în afară de cîteva observaţii simple, era scris că afirmaţia rezultă din lema lui Schur, care era enunţată; delegaţia respectivă solicita 4 puncte, iar coordonatorii ofereau un punct. Juriul a dat cîştig de cauză coordonatorilor, repetînd o replică din 5.16, citînd chiar şi pe autorul ei. Celălalt era în legătură cu o lucrare la care, la problema *2* (US6, vezi 8.4) delegaţia respectivă solicita toate cele 4 puncte oferite de regula de coordonare votată, iar coordonatorii propuneau numai 3 puncte. Lucrarea nu abordase acea problemă pe căile uzuale, dar, analizînd-o mai îndeaproape, juriul a ajuns la o decizie ca în cunoscuta povestire „Cinci pîini" a lui Ion Creangă, anume 2 puncte.

La propunerile coordonatorilor au fost acordate două premii speciale pentru soluţii deosebite la problema *3* (GB5, vezi 8.4) şi două la problema *6* (NL1, vezi 8.4). Un acelaşi concurent a obţinut două din aceste premii speciale, evident cîte unul la fiecare problemă. Soluţiile respective le vom prezenta în 9.5.

Primul tabel de rezultate, de felul celor prezentate în 6.5, 7.6, arăta ca în fig. 145.

a	Problemă	*1* (CU3)	*2* (US6)	*3* (GB5)	*4* (US1)	*5* (FR2)	*6* (NL1)
b	Punctaj	6	7	8	5	6	8
c	Punctaj total obţinut de	587	346	405	526	667	160
	concurenţi *c/b*	97	49	50	105	111	20

Fig. 145

În total au fost 132 de concurenţi; deci problema *6* a bătut recordul de dificultate, deţinut de problema *5* de la Olimpiada a 18-a (vezi 6.5) cu 21,7 puncte, la 139 de concurenţi. Ca întotdeauna, ordinea dificultăţii problemelor oferă surprize: *2* ceva mai grea decît *3*, problema *5* mai uşoară şi decît *1* şi decît *4*.

Celălalt tabel de rezultate (6.6, 7.6) este dat în fig. 146.

Fiind 132 concurenţi, ar fi trebuit decise coloanele care să aproximeze pe 11, 33, 66, corespunzătoare numerelor din paranteze. Aşa se procedase la ultimele patru Olimpiade. Dar se pare că se ignorase

un alt principiu (vezi 3.11), care cerea să se acorde premiul 1 numai celor ce nu rataseră nici o problemă etc. La cele patru Olimpiade barierele pentru acordarea premiului 1 fuseseră 38, 39, 34, 34

40/1 (1)	39/1 (2)	38/–	37/1 (3)	36/1 (4)	35/1 (5)	34/2 (7)	33/2 (9)	32/2 (11)	31/2 (13)	30/3 (16)
29/3 (19)	28/3 (22)	27/3 (25)	26/6 (31)	25/3 (34)	24/12 (46)	23/9 (55)	22/8 (63)	21/14 (77)	20/3 (80)	19/4 (84)
18/8	17/4	16/3	15/3	14/6	13/–	12/3	11/1	10/–	9/4	8/3
7/–	6/2	5/1	4/4	3/2	2/1	1/1				

Fig. 146

puncte. Au apărut astfel în juriu păreri care erau contra coborîrii atît de mult a acestei bariere. Și astfel, cu o majoritate nu mult peste 50%, la Olimpiada a 20-a s-a votat acordarea numai a 5 premii 1, pentru punctaje între 35 și 40, a 20 premii 2, pentru punctaje între 27 și 34 (deci și aici un pas la stînga față de coloana ce ar fi aproximat prin lipsă pe 33) și a 38 premii 3 pentru punctaje între 22 și 26 (a fost normal să se aproximeze 66 cu 63 și nu cu 77).

Concurentul ce obținuse două premii speciale a luat premiul 2 cu 33 puncte, cel premiat pentru problema *3* — premiul 3 cu 24 puncte, cel premiat pentru problema *6* — premiul 1 cu 39 puncte.

Votul în legătură cu premiul 1 a avut o motivație, în spiritul Olimpiadei. Dar se putea obiecta că juriul s-a orientat mult diferit în comparație cu Olimpiada a 19-a și chiar cu a 18-a. Premii se acordă multe, așa încît un premiu 3 în plus sau în minus afectează în mai mică măsură. Însă premii 1 se acordă puține și deci ratarea unuia este resimțită de delegația respectivă.

La Olimpiadele 15—19 se acordaseră în total 45 premii 1, dar numai 14 țări avuseseră premianți 1. Mai precis, o țară obținuse 11, două cîte șase, două cîte patru, o țară — trei, trei cîte două și cinci cîte unul. S-a aflat, după încheierea lucrărilor juriului, că unul din cei doi concurenți ce obținuseră aici 34 puncte, deci care fuseseră la un pas de premiul 1, avea în față încă trei ani de liceu, deci în țara noastră ar fi fost în clasa a 9-a. El ar fi constituit un exemplu deosebit. Conducerea juriului a ajuns să considere că el, și deci și celălalt concurent cu 34 puncte, ar fi meritat premiul 1. Viitorul

avea să confirme această părere, Jan Nekovář, din Cehoslovacia, obţinînd atît la a 21-a cît şi la a 22-a Olimpiadă, în 1979 şi 1981, premiul 1.

9.5. Alte soluţii date unor probleme de concurs

Vom începe cu cea apărută în cursul lucrărilor juriului (vezi 9.2).

Soluţie a problemei 3 (GB5, vezi 8.4). a) Al n-lea număr ce lipseşte din şirul $(f(n))$ este $f(f(n)) + 1$, deci $f(f(n))$ are înaintea sa $n - 1$ numere lipsă şi, acesta fiind al $f(n)$-lea termen al şirului, rezultă $f(f(n)) = f(n) + n - 1$. În consecinţă, al n-lea număr ce lipseşte din şir este $f(f(n)) + 1 = f(n) + n$.

Să observăm că $f(1) = 1$ şi faptul, dovedit înainte, că $f(n) + n$ este al n-lea număr lipsă din şir determină complet şirul $(f(n))$. Într-adevăr, dacă $f(1),\ldots,f(n - 1)$ au fost deja determinaţi, iar $n \geqslant 2$, primele $n - 1$ numere lipsă se ştie că sînt $f(1) + 1,\ldots,f(n - 1) + n - 1 \geqslant f(n - 1) + 1$, deci despre $f(n - 1) + 1$ se ştie dacă este în şir sau nu. Dacă este, acesta va fi $f(n)$. Dacă nu este, sînt două posibilităţi : sau $f(n - 1) + 1,\ldots,f(n - 1) + n - 1$ nu lipsesc cu toţii din şir şi atunci $f(n)$ va fi primul dintre ei care nu lipseşte, sau ei lipsesc cu toţii şi atunci $f(n) = f(n - 1) + n$, deoarece altfel al n-lea ce va lipsi ar fi, pe de o parte, $f(n - 1) + n < f(n) + n$ şi, pe de altă parte, $f(n) + n$, conform celor stabilite, deci ar apărea o contradicţie.

b) Să arătăm că funcţia $f(n) = [an]$ cu $a = (1 + \sqrt{5})/2$ satisface cele două condiţii de la a) ce caracterizează şirul $(f(n))$. Prima revine la $1 \leqslant a < 2$ şi se verifică imediat.

Pentru a o dovedi pe cealaltă vom observa întîi că $[an] + n = [(a + 1)n]$ şi vom arăta că, oricare ar fi $m = 1, 2, \ldots$, avem $\operatorname{card}\{n \mid n \geqslant 1, [an] \leqslant m\} + \operatorname{card}\{n \mid n \geqslant 1, [(a + 1)n] \leqslant m\} = m$. De aici va rezulta că, prin trecerea de la m la $m + 1$, exact unul din cei doi termeni din membrul stîng va creşte cu o unitate, deci va avea loc exact una din alternativele : există n cu $[an] = m + 1$ sau există n cu $[(a + 1)n] = m + 1$, ceea ce înseamnă că şirurile $([an])$ şi $([an] + n)$ umplu, fără repetiţie, şirul 1,2,..., deci exact ceea ce exprimă a doua condiţie de la a).

c) Să dovedim relaţia de la b) : $[an] \leqslant m$ este echivalent cu $an < m + 1$, deci cu $n < (m + 1)/a$; rezultă $(m + 1)a^{-1} - 1 < \operatorname{card}\{n \mid n \geqslant 1, [an] \leqslant m\} < (m + 1)a^{-1}$, inegalitatea din stînga fiind strictă ca urmare a faptului că a este iraţional, deci $(m + 1)a^{-1} - 1$ nu poate fi întreg. Analog

$$(m+1)(a+1)^{-1} - 1 < \operatorname{card}\{n \mid n \geqslant 1, [(a+1)n] \leqslant m\} < (m+1)(a+1)^{-1}.$$

Adunînd cele două duble inegalități și observînd că a a fost de fapt ales așa încît $a^{-1} + (a + 1)^{-1} = 1$ (aceasta este echivalent cu $2a + 1 = a^2 + a$, $a^2 - a + 1 = 0$, ce are ca soluții $a = (1 \pm \sqrt{5})/2$ etc.), obținem $m - 1 = (m + 1) - 2 < \text{card}\,\{n \mid n \geqslant 1, [an] \leqslant m\} + \text{card}\,\{n \mid n \geqslant 1, [(a + 1)n] \leqslant m\} \lhd m + 1$, de unde rezultă imediat relația de la b).

d) Deci $f(n) = [an]$, $f(240) = [120(1 + \sqrt{5})] = 120 + [\sqrt{72000}]$,
$$270^2 = 72900, 269^2 = 72900 - 539 = 72361, 268^2 = 72361 - 537 = 71814, f(240) = 120 + 268 = 388.$$

Vom prezenta acum soluțiile premiate cu premii speciale.

Soluția concurentului ce a obținut un premiu special pentru problema *3* (GB5, vezi 8.4) este o soluție scurtă, complet argumentată, bazată pe ultima observație ce însoțea cele două soluții ale acestei probleme în 8.9, pe prima parte a punctului a) din soluția precedentă etc. Nu o reproducem, pentru a evita repetiții, ținînd seama și de stilul soluției autorilor din 8.9. Nu trebuie însă uitat că toate cele trei soluții prezentate pînă acum nu au provenit de la concurenți.

Soluție a problemei 3 (GB5, vezi 8.4), *aparținînd concurentului distins cu două premii speciale.* a) Fie $g(n)$ al n-lea număr ce lipsește din șirul $(f(r))$, deci $g(n) = f(f(n)) + 1$. La fel ca la a) din soluția precedentă se arată că $g(n) = f(n) + n$. În particular $g(n + 1) = f(n + 1) + n + 1 \geqslant f(n) + 1 + n + 1 = g(n) + 2$, iar $g(1) \geqslant 2$, deci $f(1) = 1$.

b) Dacă există m cu $g(m) = n$, atunci $f(n + 1) = f(n) + 1$. Într-adevăr, $n \neq f(k)$ pentru orice k, deci $f(n) + 1 \neq f(f(k)) + 1$, $f(n) + 1$ nu lipsește din șirul $(f(r))$.

Dacă există m cu $f(m) = n$, atunci $f(n + 1) = f(n) + 2$, deoarece $f(n) + 1 = f(f(m)) + 1$ lipsește din $(f(r))$, dar $f(n) + 2$ nu poate lipsi conform $g(m + 1) \geqslant g(m) + 2$ (vezi a)).

c) Condițiile din enunț determină perfect șirul $(f(n))$, deoarece $f(1) = 1$ și, cunoscînd $f(1), \ldots, f(n) \geqslant n$, se cunosc și (vezi a)) $g(1), \ldots, g(n) = f(n) + n \geqslant n$, deci se știe în care din cele două cazuri de la b) este n și $f(n + 1)$ rezultă.

d) Fie $k(n) = 2n - f(n)$. Conform cu b) rezultă $k(n + 1) = k(n)$ dacă $n = f(m)$ și $k(n + 1) = k(n) + 1$ dacă $n = g(m)$.

e) Dacă $g(m - 1) \lhd n \leqslant g(m)$, rezultă $k(n) = m$ prin inducție, conform cu d).

f) Deci pentru $g(m - 1) \lhd n \leqslant g(m)$ avem $f(n) = 2n - m$, $g(n) = f(n) + n = 3n - m$.

g) Acum se poate completa, succesiv, tabelul

m		1	2		3		5		6	13		14	35		36	92
$g(m) = n$	1	2	5	3	7	6	13	14	15	34	35	36	91	92	94	240
$f(n)$	1	3	8	4		9										388
$g(n)$	2	5	13	7		15	34	36			91	94		240		

În cursul discuțiilor din juriu, se propusese să se mărească, în enunțul acestei probleme, 240 pînă la, de exemplu, 1978, dar nu s-a ajuns să se ia această hotărîre.

Autorul soluției de mai înainte a primit al doilea premiu special pentru o generalizare a problemei 6 (NL1, vezi 8.4), care afirmă că enunțul acestei probleme rămîne valabil, dacă se consideră n țări și N membri, cu $N > n!\sum_{k=0}^{n-1} 1/k!$; se observă că numărul $f(n)$ din membrul drept este întreg.

Demonstrația se face prin aceeași metodă ca și în soluția din 8.6, se va găsi o țară cu mai ult de

$$\left(n!\sum_{k=0}^{n-1} 1/k!\right)/n=(n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}1/k! = 1 + (n-1)!\sum_{k=0}^{n-2}1/k!=1+f(n-1)$$

membri. Numărul de diferențe, analoage cu $a_{330} - a_i$ din acea soluție, va fi mai mare decît $f(n-1)$. După $n-2$ pași se ajunge la penultima țară, ce va conține mai mult de $f(1)+1=2$ diferențe analoage cu e_1, e_2, e_3 din soluția citată și demonstrația se încheie la fel ca în 8.6. Pentru $n = 6$ se obține $f(n) = 6 + 30 + 120+360+720+720=1956$.

Al doilea premiu special la această problemă a fost acordat pentru *Generalizare și soluție la problema* 6(NL1, vezi 8.4). Se consideră $g(1) = 2$, $g(n) = ng(n-1) + 1$.

a) Demonstrăm întîi, prin inducție.

Lemă. *Se consideră un număr de puncte mai mare ca $g(n)$, toate segmentele ce le unesc cîte două și n culori. Se colorează fiecare din aceste segmente în cîte una din culori. Atunci există un triunghi cu laturile identic colorate.*

Demonstrație. Pentru $n = 1$ sînt cel puțin trei puncte etc. Presupunînd-o adevărată pentru $n-1$, se alege un punct A oarecare, dintre cele considerate. Din acesta pleacă mai mult de $ng(n-1)$ segmente și vom putea alege mai mult de $g(n-1)$ puncte care să fie unite cu A toate prin segmente de aceeași culoare. Sau două din acele puncte, B și C, sînt unite printr-un segment de aceeași culoare cu cele precedente și atunci ABC este „monocolor", sau orice segment ce unește două din aceste puncte este de altă culoare decît cele precedente, deci aceste segmente sînt colorate cu $n-1$ culori și se aplică ipoteza de inducție, rezultînd existența unui triunghi monocolor cu vîrfurile în acele puncte.

b) Să demonstrăm acum că afirmația din problema NL1 rămîne valabilă, considerînd n țări și un număr de cel puțin $g(n)$ membri, reprezentanți prin numerele 1, 2,... Va exista o țară A cu mai mult de $g(n-1)$ membri. Să presupunem că nu există în A două numere

a căror diferență să fie tot în A, altfel afirmația ar fi demonstrată. Să privim fiecare membru din A ca un punct și fiecare din celelalte țări ca o culoare. Să colorăm segmentul ce unește două puncte din A cu culoarea ce corespunde țării, în care se află valoarea absolută a diferenței lor. Se aplică lema de la a) pentru $n - 1$ și rezultă existența a trei numere a, b, c în A, așa încît diferențele $a - b$, $b - c$, $a - c$ să fie în aceeași țară; ca urmare a relației $a - c = (a - b) + (b - c)$ demonstrația este terminată.

Observație. $g(n) - 1$ satisface $g(1) - 1 = 1$, $g(n) - 1 = n((g(n-1)-1)+1)$, deci $g(n) - 1$ este $f(n)$ din cealaltă generalizare, adică acestea dau același rezultat.

Din lucrările concurenților au mai fost scoase în evidență următoarele.

Soluție a problemei 4 (US1, vezi 8.4). Să reconsiderăm fig. 132 și să-i adăugăm (vezi 8.11) piciorul L al perpendicularei din J pe AB (fig. 147). Se cere să se dovedească faptul că $JK = JL$. Cum triunghiul MPT este prin ipoteză isoscel ($MP = MT$), ceea ce trebuie demonstrat va rezulta dacă vom arăta că triunghiurile JLK și MPT au laturile respectiv paralele (ele vor fi deci asemenea); $MP \parallel JL$ și $MT \parallel JK$ sînt evidente, iar din patrulaterele inscriptibile $JLBK$, $JPBT$ (ce au cîte două unghiuri opuse drepte) deducem $\sphericalangle JKL = \sphericalangle JBA = \sphericalangle JTP$, deci $TP \parallel KL$, q.e.d.

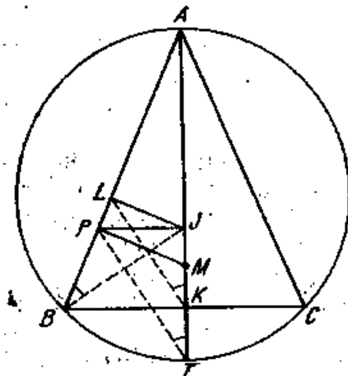


Fig. 147

Soluție a problemei 5 (FR2, vezi 8.4). Rezultă, pentru orice k, $S_k = \sum_{i=1}^{k}(f(i)-i) = (f(1) + \ldots + f(k)) - (1 + \ldots + k) \geq 0$, apoi $f(k) - k = S_k - S_{k-1}$ și $\sum_{k=1}^{n}(f(k) - k)k^{-2} = \sum_{k=1}^{n}(S_k - S_{k-1})k^{-2} = \sum_{k=1}^{n} S_k k^{-2} - \sum_{k=1}^{n-1} S_k(k+1)^{-2} = S_n n^{-2} + \sum_{k=1}^{n-1} S_k(k^{-2} - (k+1)^{-2}) \geq 0$, unde S_0 este considerat 0 iar, la un moment dat, am înlocuit într-una din sume indicele k de sumare cu $k + 1$.

Toate soluțiile prezentate în acest paragraf 9.5 au fost expuse de autorii lor, în afară de prima, în cadrul unui simpozion organizat de comitetul Olimpiadei, pentru toți participanții, după încheierea lucrărilor juriului.

10

A 21-A OLIMPIADĂ INTERNAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ (Londra, Bristol, Anglia, 1979)

10.1. Organizare

La această Olimpiadă au luat parte 23 țări. În comparație cu Olimpiada a 19-a au lipsit Algeria, Italia și Mongolia și au fost prezente Grecia, Vietnam, și, pentru prima dată, Brazilia, Israel și Luxemburg, ultima numai prin concurenți, fără delegație. A participat un observator din Australia.

De la Bristol la Londra sînt aproape 200 km. Juriul a lucrat la Bristol numai în prima fază, pînă la încheierea probelor de concurs, după care s-a mutat în apropierea concurenților, la Londra; la fel s-a procedat și la următoarele două Olimpiade ce le descriem.

10.2. Problemele propuse juriului

Au fost marcate cu (*) problemele ce nu corespundeau domeniilor uzuale.

BE1. *Este adevărat că orice poligon regulat plan cu un număr par de laturi se poate descompune într-un număr finit de romburi?*

BE4(*). *Un sac conține 5 perechi de ciorapi, de 5 culori diferite. Se extrag la întîmplare 4 ciorapi din sac. Dintre acești 4 se elimină toate perechile apărute. Se completează apoi cei rămași din cei 4 printr-o nouă extracție la întîmplare, din sac, pînă la alți 4. Se continuă astfel pînă cînd sau se golește sacul, sau se obțin 4 ciorapi de culori diferite. Care este probabilitatea ca extracțiile să se încheie în al doilea mod?*

BG1. *Să se determine toate polinoamele f cu coeficienți reali pentru care $f(x)\cdot f(2x^2) = f(2x^3 + x)$.*

BG3. *Se consideră o prismă ce are ca baze, superioară și inferioară, pentagoanele $A_1A_2A_3A_4A_5$ și $B_1B_2B_3B_4B_5$. Fiecare din laturile celor două pentagoane și fiecare din segmentele A_iB_j cu $i, j = 1, \ldots, 5$ este colorat în roșu sau albastru. În fiecare triunghi ce are toate cele trei laturi colorate există atît o latură roșie, cît și una albastră. Să se demonstreze că toate cele 10 laturi ale celor două baze sînt colorate în aceeași culoare.*

CS2. *Fie $n \geq 2$ întreg. Să se determine numărul maxim de elemente ce-l poate avea o mulțime M de perechi (j, k) de numere întregi, cu $1 \leq j < k \leq n$, pentru care, dacă $(j, k) \in M$, atunci $(k, m) \notin M$ pentru orice m.*

DD1. *Să se determine, dacă există, valoarea maximă și cea minimă a produsului $x_1 \ldots x_n$, cînd $x_1, \ldots, x_n$ iau toate valorile posibile, pentru care $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$ și $x_i \geq 1/n$ pentru orice $i = 1, \ldots, n$.*

DD3. *Fie R o mulțime de 6 elemente. Să se determine numărul maxim de elemente dintr-o familie F de submulțimi ale lui R cu proprietățile:*

a) $X \subset Y$ *este fals pentru* $X, Y \in F, X \neq Y$;

b) $X \cup Y \cup Z \neq R$ *pentru orice* X, Y, Z *din* F;

c) $\bigcup_{X \in F} X = R$.

DE1. *Dacă p și q sînt numere naturale astfel încît $p/q = 1 - (1/2) + (1/3) - (1/4) + \ldots - (1/1318) + (1/1319)$, să se dovedească faptul că p este divizibil cu 1979.*

DE3. *O funcție f, definită pentru orice x rațional cu $0 \leq x < 1$, are proprietățile $f(x) = f(2x)/4$ pentru $0 \leq x < 1/2$ și $f(x) = (3 + f(2x - 1))/4$ pentru $1/2 \leq x < 1$. Să se determine expresia lui $f(x)$ pentru x scris în dezvoltarea binară $x = 0,b_1b_2b_3\ldots$*

DE4. *Fie A și E două vîrfuri opuse ale unui octogon. Fie a_n numărul de șiruri $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$, în care $P_0 = A$, $P_n = E$, $P_i \neq E$ pentru $i = 1, \ldots, n - 1$ și, oricare ar fi $i = 0, 1, \ldots, n - 1$, P_i și P_{i+1} sînt vîrfuri alăturate ale octogonului. Să se demonstreze că $a_{2n-1} = 0$, $a_{2n} = (x^{n-1} - y^{n-1})/\sqrt{2}$ pentru $n = 1, 2, 3, \ldots$, unde $x = 2 + \sqrt{2}$, $y = 2 - \sqrt{2}$.*

FI3(*). *Să se demonstreze că $|a \times b|^3 \leq (3\sqrt{3}/8)|a|^2|b|^2|a - b|^2$, oricare ar fi vectorii a, b. Altfel spus, dacă S este aria paralelogramului $OABC$, să se demonstreze că $S^3 \leq (3\sqrt{3}/8)OA^2\,OB^2\,OC^2$.*

GR1(*). *Să se demonstreze că $20/60 < \sin 20° < 21/60$.*

GR5(*). *Să se determine, dacă există, toate sistemele de logaritmi în care se poate întîmpla ca un număr real pozitiv să fie egal cu logaritmul său.*

IL2. *Să se determine toate numerele reale a pentru care există numere reale nenegative $x_1, \ldots, x_5$ ce satisfac relațiile* $\sum_{k=1}^{5} kx_k = a$, $\sum_{k=1}^{5} k^3x_k = a^2$, $\sum_{k=1}^{5} k^5x_k = a^3$.

IL4. *Fie F o familie formată din 16 submulțimi diferite ale unei mulțimi K, unde K are 5 elemente. Oricum am alege 3 submulțimi din F, intersecția lor nu este vidă. Să se demonstreze că există exact un element din K ce aparține tuturor mulțimilor din F.*

NL1. *În interiorul unui triunghi echilateral ABC se construiesc punctele P, Q, R determinate prin* $\measuredangle QAB = \measuredangle PBA = 15°$, $\measuredangle RBC = \measuredangle QCB = 20°$, $\measuredangle PCA = \measuredangle RAC = 25°$. *Să se determine unghiurile triunghiului PQR.*

PL1. *Se consideră m întregi pozitivi $a_1, \ldots, a_m$. Să se demonstreze că există întregii pozitivi $b_1, \ldots, b_n$, unde $n < 2^m$, astfel ca $\sum_{k\in I} b_k$ să fie distincte pentru $I \subset \{1, \ldots, n\}$ distincte și astfel ca orice a_i să se poată reprezenta printr-o astfel de sumă.*

RO1. *Se consideră șirurile (a_n), (b_n) definite prin* $a_1 = 3$, $b_1 = 100$, $a_{n+1} = 3^{a_n}$, $b_{n+1} = 100^{b_n}$. *Să se determine cel mai mic întreg m pentru care $b_m > a_{100}$.*

SE2. *Se consideră un întreg $n > 1$ și un număr real $a > 0$. Să se determine maximul lui* $\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$, *cînd x_i, $i = 1, \ldots, n$, iau toate valorile nenegative de sumă a.*

SU1. *Fie N numărul soluțiilor întregi ale ecuației $x^2 - y^2 = z^3 - t^3$, cu proprietatea $0 \leq x, y, z, t \leq 10^6$ și M numărul soluțiilor întregi ale ecuației $x^2 - y^2 = z^3 - t^3 + 1$, cu aceeași proprietate. Să se demonstreze că $N > M$.*

SU3. *Fie A unul din punctele comune a două cercuri secante. Din A pleacă simultan, în același sens, cîte un mobil pe fiecare din cercuri, cu viteze unghiulare constante, egale. Să se demonstreze că există în planul celor două cercuri un punct P astfel încît, la orice moment, dacă M și N sînt pozițiile celor două puncte, să avem $PM = PN$.*

US4. *Să se determine toate numerele naturale n pentru care $2^8 + 2^{11} + 2^n$ este un pătrat perfect.*

US5. *Se consideră un cerc al cărui centru O se află pe baza BC a triunghiului isoscel ABC, tangent laturilor AB = AC. Fie P şi Q două puncte ce aparţin respectiv segmentelor AB, AC. Atunci $PB \cdot CQ = (BC/2)^2$ este echivalent cu faptul că PQ este tangentă la cerc.*

US6. *Se consideră un punct P într-un plan p şi un punct $Q \notin p$. Să se determine toate punctele R din p pentru care $(QP + PR)/QR$ este maxim posibil.*

YU4. *Să se demonstreze că ecuaţia funcţională $f(x + y) = f(x) + f(y)$ este echivalentă cu $f(x + y + xy) = f(x) + f(y) + f(xy)$; ambele sînt considerate cu x, y parcurgînd R.*

10.3. Soluţii ale problemelor marcate cu *

Soluţia problemei BE4 (vezi 10.2). Fie A_0 evenimentul ca în prima extracţie să nu se obţină nici o pereche, deci 4 ciorapi de culori diferite, A_1 evenimentul ca în prima extracţie să se obţină exact o pereche, deci 2 ciorapi de o culoare şi alţi 2 de culori diferite şi A_2 evenimentul ca în prima extracţie să se obţină două perechi. Evenimentul A_0 corespunde finalului dorit, în cazul realizării lui extracţiile terminîndu-se la prima. Evenimentul A_2 corespunde finalului nedorit, în cazul realizării lui rămînînd ciorapi doar de 3 culori. În cazul realizării evenimentului A_1, finalul dorit corespunde evenimentului B ca în a doua extracţie să apară cîte un ciorap din cele două culori neapărute în prima extracţie; se observă că, dacă se ajunge să se elimine a doua pereche, vom fi în situaţia, descrisă înainte, din cazul A_2 şi finalul dorit este imposibil.

În prima extracţie sînt C_{10}^4 cazuri posibile, în a doua, dacă s-a realizat A_1, sînt C_6^2.

Cazurile favorabile lui A_0 se obţin alegînd culoarea ce nu va apărea (5 posibilităţi) şi apoi cîte un ciorap din fiecare din celelalte 4 culori ($2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ posibilităţi), deci $P(A_0) = 5 \cdot 2^4/C_{10}^4$.

Cazurile favorabile lui A_1 se obţin alegînd culoarea perechii ce apare (5 posibilităţi), culorile celorlalţi doi ciorapi ce apar (C_4^2 posibilităţi) şi cîte un ciorap din cele 2 culori ($2 \cdot 2$ posibilităţi). Cazurile favorabile lui B, în ipoteza că s-a realizat A_1, se obţin alegînd cîte un ciorap din cele două culori ce nu au apărut ($2 \cdot 2$ posibilităţi).

Deci $P(A_1 \cap B) = P(A_1)P_{A_1}(B) = (5 \cdot C_4^2 \cdot 2^2/C_{10}^4)(2^2/C_6^2)$ şi probabilitatea cerută de problemă este $P(A_0) + P(A_1 \cap B) = (80/C_{10}^4) + (120/C_{10}^4)(4/15) = 112/C_{10}^4 = 112/210 = 8/15$.

S-ar fi putut rămîne la nivelul elementar al cazurilor posibile şi favorabile, presupunînd că, indiferent de situaţie, se face o a doua

extracție a 2 ciorapi, sînt $C_{10}^4 C_6^2$ posibilități, $5\cdot 2^4 C_6^2 + (5\cdot C_4^2\cdot 2^2)2^2$ favorabile etc. Și în soluția prezentată, și în această variantă, se ignoră posibilități care nu conduc, evident, la finalul dorit, legate de ce se poate întîmpla dacă se ajunge la a treia extracție.

Soluția problemei FI3 (vezi 10.2). Există două soluții care „șterg asteriscul" și nu apar mai dificile decît soluția „vectorială" a autorilor.

Pentru ambele, observăm că problema revine la a dovedi, într-un triunghi de laturi a, b, c și arie S, că $S^3 \leqslant (3\sqrt{3}/64)a^2b^2c^2$.

Prima soluție. Se știe că $4SR = abc$, unde R este raza cercului circumscris (de exemplu $a = 2R \sin A$, $S = (bc \sin a)/2$ etc.), deci $a^2b^2c^2 = 16R^2S^2$ și inegalitatea revine la $S \leqslant (3\sqrt{3}/4)R^2$.

Dacă în triunghiul considerat ABC avem, de exemplu, $\sphericalangle A \leqslant \sphericalangle B \leqslant \sphericalangle C$, atunci $\sphericalangle A \leqslant 60° \leqslant \sphericalangle C$ și putem înlocui triunghiul cu altul $AB'C$ (fig. 148), înscris în același cerc, avînd un unghi de 60°, cu aria $AB'C \geqslant$ $\geqslant$ aria ABC. Înlocuirea următoare de acest fel ne aduce la un triunghi $A'B'C$ echilateral, de arie $(3R\sqrt{3}(R/2))/2 = (3\sqrt{3}/4)R^2 \geqslant$ $\geqslant S$, q.e.d.

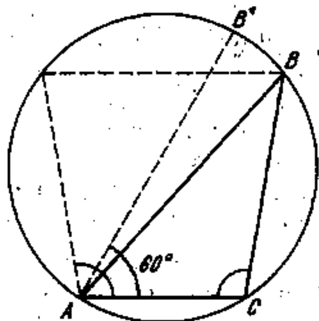


Fig. 148

A doua soluție. Inegalitatea revine la $(ab \sin C)^3 \leqslant (3\sqrt{3}/8)\, a^2b^2(a^2 + b^2 - 2ab \cos C)$, deci la $ab \sin^3 C \leqslant (3\sqrt{3}/8)(a^2 + b^2 - 2ab\cos C)$, $(a-b)^2 + 2ab(1 - \cos C - (4/3\sqrt{3}) \sin^3 C) \geqslant$ $\geqslant 0$ și, cum aceasta trebuie să fie valabilă pentru orice $a, b > 0$ și $C \in [0°, 180°]$, la

$$\cos C + (4/3\sqrt{3})\sin^3 C \leqslant 1.$$

Putem acum studia variația membrului stîng $f(C)$, derivîndu-l în raport cu C, ajungînd la

$$f'(C) = -\sin C + (4/\sqrt{3}) \sin^2 C \cos C = \sin C((2/\sqrt{3}) \sin 2C - 1).$$

Derivata este nulă pentru $\sin 2C = \sqrt{3}/2$, deci $2C = 60°$ și $120°$ (în interiorul intervalului), deci f scade pe $[0°, 30°]$, crește pe $[30°, 60°]$ și apoi scade pe $[60°, 180°]$. Pentru $C = 0°$ avem $f(C) = 1$, iar pentru $C = 60°$ avem $f(C) = (1/2) + (4/3\sqrt{3})(3\sqrt{3}/8) = 1$, deci $f(C) \leqslant 1$ pentru orice $C \in [0°, 180°]$.

Se pot însă evita derivatele, transformînd $\cos C + (4/3\sqrt{3}) \sin^3 C \leqslant 1$ în $(4/3\sqrt{3}) \sin^3 C \leqslant 2 \sin^2(C/2)$, $(8/3\sqrt{3}) \sin C \cos^2(C/2) \leqslant 1$, $(64/27)(1 -$ $- \cos^2 C) \cos^4(C/2) \leqslant 1$, și, notînd $x = \cos^2(C/2)$, deci $0 \leqslant x \leqslant 1$,

în $(64/27)(1-(2x-1)^2)x^2 \leq 1$, $(256/27)x^3(1-x) \leq 1$, $(4/3)^4 x \cdot x \cdot x(3-3x) \leq 1$. Cînd suma a patru numere pozitive $x + x + x + (3-3x) = 3$ este constantă, produsul lor este maxim. cînd numerele sînt egale, deci cînd $x = 3 - 3x$, $x = 3/4$, caz în care avem egalitate în relația la care s-a ajuns.

Această ultimă metodă, față de cea cu derivata, permite și „determinarea" factorului $3\sqrt{3}/8$ din enunț.

Soluția problemei GR1(vezi 10.2). Autorii au avut în vedere utilizarea inegalităților $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, deducerea apoi a inegalității $\sin x = 2\sin(x/2)\cos(x/2) = 2\operatorname{tg}(x/2)(1-\sin^2(x/2)) > x(1-(x/2)^2)$ și aplicarea relațiilor obținute $x - (x^3/4) < \sin x < x$ pentru $x = \pi/9$ etc.

Dar valoarea specială de 20° permite și altă soluție. Fie $\sin y = 20/60 = 1/3$ și $\sin z = 21/60 = 7/20$. Pe baza formulei $\sin 3u = 3\sin u - 4\sin^3 u$ vom arăta că $\sin 3y < \sqrt{3}/2 = \sin 60° < \sin 3z$ și va rezulta $y < 20° < z$, $20/60 = \sin y < \sin 20° < \sin z = 21/60$.

Avem într-adevăr $\sin 3y = 3 \cdot (1/3) - 4 \cdot (1/27) = 23/27$ și $4 \cdot 23^2 < 3 \cdot 27^2$ revine la $2116 < 2187$, iar $\sin 3z = 3 \cdot (7/20) - 4 \cdot (7/20)^3 = (21/20) - (343/2000) = 1757/2000 > 1750/2000 = 7/8$ și $7/8 > \sqrt{3}/2$, deoarece $7^2 > 3 \cdot 4^2$, adică $49 > 48$.

Soluția problemei GR5 (vezi 10.2). Se pune problema pentru ce valori $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ ecuația, în x, $\log_a x = x$ are soluții în $(0, \infty)$ și dacă are, cîte are. Ecuația se scrie $\ln x / \ln a = x$.

Pentru $a \in (0,1)$, membrul stîng scade de la $+\infty$ la $-\infty$ pentru $x \in (0, \infty)$, iar cel drept crește de la 0 la $+\infty$, deci ecuația are exact o soluție.

Nu la fel de simplă este situația pentru $a > 1$. Vom aplica „șirul lui Role" ecuației $(\ln x/\ln a) - x = 0$. Derivata membrului stîng este $(1/x \ln a) - 1$ și are ca rădăcină unică $x = 1/\ln a$. Valoarea membrului sting al ecuației pentru $x = 1/\ln a$ este $-(1 + \ln\ln a)/\ln a$ și aceasta este pozitivă pentru $\ln\ln a < -1$, deci pentru $\ln a < 1/e$, $a < e^{1/e}$, nulă pentru $a = e^{1/e}$ și negativă pentru $a > e^{1/e}$. Cum $(\ln x/\ln a) - x$ tinde la $-\infty$ pentru $x \to 0+$ și la $-\infty$ și pentru $x \to +\infty$, obținem răspunsul următor.

Pentru orice $a \in (0,1)$ există exact un $x \in (0, \infty)$ așa ca $\log_a x = x$ (anume $x < 1$), pentru orice $a \in (1, e^{1/e})$ există exact două valori $x \in (0, \infty)$ cu $\log_a x = x$, pentru $a = e^{1/e}$ există exact una (anume $x = 1/\ln a = e$, corespunzînd relației $[(e^{1/e})^e = e)$, iar pentru $a > e^{1/e}$ nu există nici una.

Această problemă merită, într-adevăr, asteriscul.

10.4. Soluţiile problemelor de geometrie

Soluţia problemei BE1 (vezi 10.2). Răspunsul este da. Vom dovedi prin inducţie o afirmaţie mai generală, anume că dacă un poligon convex cu un număr par $2n$ de laturi are toate aceste laturi congruente şi laturile opuse paralele, atunci acesta se poate descompune într-un număr finit de romburi. Cazul $n = 2$ este banal — rombul însuşi. Trecerea de la cazul n la $n + 1$ este ilustrată în fig. 149, în care segmentele $A_{n+3}B_{n+2}, \ldots, A_{2n}B_{2n-1}, A_{2n+1}B_{2n}$ au fost construite congruente şi paralele cu $A_{n+2}A_{n+1}$ şi $A_{2n+2}A_1$ şi deci patrulaterele ce apar sînt romburi.

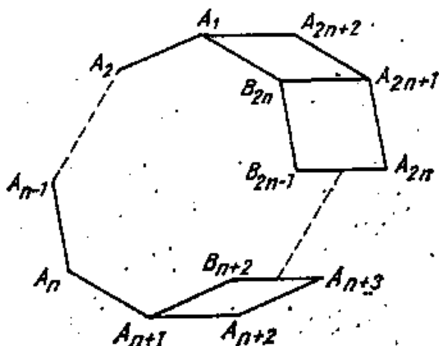
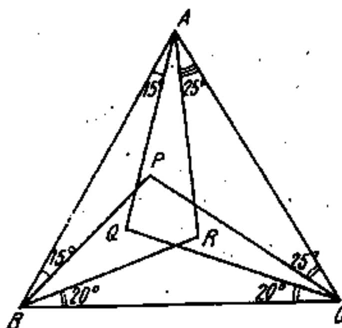


Fig. 149

Soluţia problemei NL1 (vezi 10.2). Unghiurile din hexagonul din fig. 150, desenat mărit în dreapta acelei figuri, se calculează cel mai repede considerînd suma unghiurilor din fiecare din patrulaterele concave *ABPC*, *BCQA*, *CARB*.



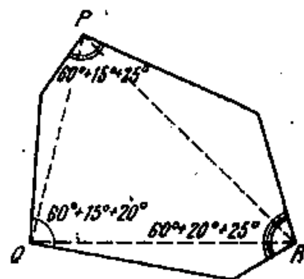


Fig. 150

Să considerăm acum situaţia din fig. 151, în care triunghiul $A'B'C'$ este echilateral. Unghiurile marcate cu cîte două linii din B' şi C' au aceeaşi mărime şi, din patrulaterele $A'B'Q''R'$, $A'C'R''Q'$, inscriptibile ca urmare a egalităţii unghiurilor x, rezultă egalitatea unghiurilor marcate cu cîte două linii din Q'' şi R'', deci inscriptibili-

tatea patrulaterului $Q'R'R''Q''$. De aici deducem, relativ la mărimea unghiurilor marcate cu cîte trei linii, $\sphericalangle Q' = 60° + z$ (via R'') și $\sphericalangle R' = 60° + y$ (via Q''). Acum problema se rezolvă cu ușurință,

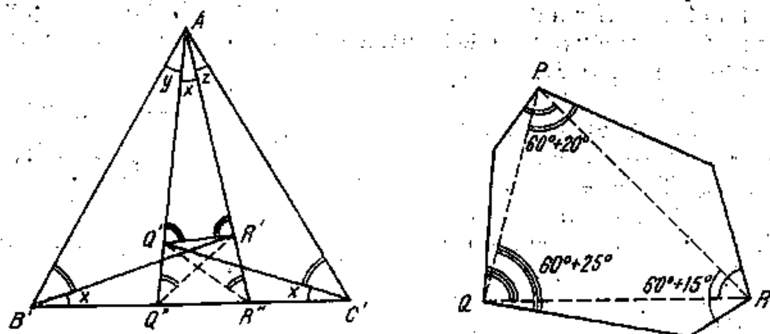


Fig. 151

unghiurile din P, Q, R ale triunghiului PQR vor avea ca măsuri, respectiv, $2(60° + 20°) - (60° + 15° + 25°) = 60°$, $2(60° + 25°) - (60° + 15° + 20°) = 60° + 15° = 75°$ și $2(60° + 15°) - (60° + 20° + 25°) = 60° - 15° = 45°$.

Proprietățile patrulaterelor inscriptibile s-au dovedit și pe figura, destul de complicată, din această problemă, a fi un mijloc puternic de investigație, ceea ce nu este de mirare, dacă ne reamintim demonstrațiile lor, care, efectuate pe această figură, ar fi introdus o mulțime de elemente în plus.

Soluția problemei SU3(vezi 10.2). Vom prezenta o soluție analitică, ce începe cu fig. 152, în care C și D sînt centrele celor două cercuri, iar $u \in (0°, 180°)$, deci C s-ar putea afla și la dreapta lui O.

Coordonatele punctelor M și N se obțin fără dificultate, anume $M(a \operatorname{ctg} v - (a \cos(v - t))/\sin v,\ a \sin(v - t)/\sin v)$ și $N(-a \operatorname{ctg} u + (a \cos(u + t))/\sin u,\ a \sin(u + t)/\sin u)$, adică $M(a \operatorname{ctg} v(1 - \cos t) - a \sin t,\ a \cos t - a \operatorname{ctg} v \sin t)$ și $N(-a \operatorname{ctg} u(1 - \cos t) + a \sin t,\ a \cos t + a \operatorname{ctg} u \sin t)$. Coordonatele mijlocului Q al lui MN sînt

$$x = (a/2)(\operatorname{ctg} v - \operatorname{ctg} u)(1 - \cos t) - a \sin t,$$
$$y = a \cos t - (a/2)(\operatorname{ctg} v - \operatorname{ctg} u) \sin t,$$

iar direcția MN este caracterizată de componentele

$$a(\operatorname{ctg} v + \operatorname{ctg} u)(1 - \cos t) \quad \text{și} \quad -a(\operatorname{ctg} v + \operatorname{ctg} u) \sin t,$$

deci de $1 - \cos t$ și $-\sin t$.

În cele ce urmează vom avea mereu în minte relațiile $1 - \cos t = 2 \sin^2(t/2)$, $1 + \cos t = 2 \cos^2(t/2)$ și $\sin t = 2 \sin(t/2) \cos(t/2)$. În particular, direcția MN este caracterizată de $\sin(t/2)$ și $-\cos(t/2)$.

Căutăm un punct fix $P(x_0, y_0)$ așa încît $(x_0 - x)\sin(t/2) - (y_0 - y)\cos(t/2) = 0$ pentru orice t. Deci „ar fi bine" ca din $y_0 - y$ să se poată da factor comun $\sin(t/2)$, ceea ce sugerează $y_0 = a$, iar din $x_0 - x$ analog $\cos(t/2)$, ceea ce sugerează $x_0 = a(\text{ctg} v - \text{ctg} u)$.

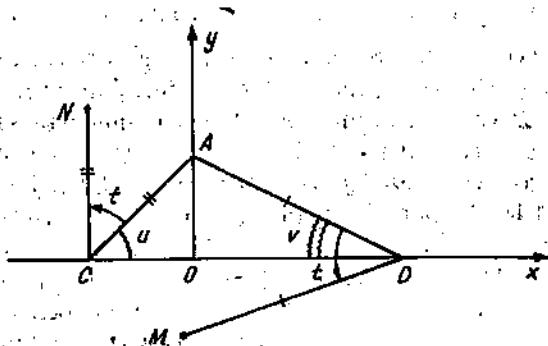


Fig. 152

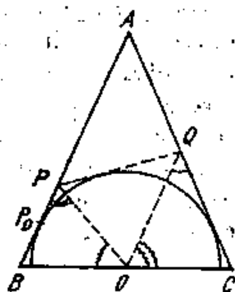


Fig. 153

Rezultă $x_0 - x = (a/2)(\text{ctg}\, v - \text{ctg}\, u)(1 + \cos t) + a \sin t = a \cos(t/2)((\text{ctg}\, v - \text{ctg}\, u) \cos(t/2) + 2 \sin(t/2))$ și $y_0 - y = a(1 - \cos t) + (a/2)(\text{ctg}\, v - \text{ctg}\, u) \sin t = a \sin(t/2)(2 \sin(t/2) + (\text{ctg}\, v - \text{ctg}\, u) \cos(t/2))$ și relația $(x_0 - x)\sin(t/2) - (y_0 - y)\cos(t/2) = 0$ se verifică.

Punctul fix $P(x_0, y_0)$ se află pe paralela prin A la linia centrelor. Mai mult, acesta este simetricul celuilalt punct comun $(0, -a)$ al celor două cercuri față de mijlocul $(0, (a/2)(\text{ctg}\, v - \text{ctg}\, u))$ al liniei centrelor CD.

Soluția problemei US5 (vezi 10.2). Fiind dat P, există un punct unic Q pe AC așa încît PQ să fie tangentă la cerc, dacă P este în interiorul segmentului AP_0 (fig. 153). Și relația din enunț determină unic Q fiind dat P, în condiții ce le vom preciza. Deci va fi suficient de arătat că punctul Q din prima determinare verifică relația din enunț.

Să unim P și Q cu O. Dreapta PO va bisecta $\sphericalangle BPQ$, iar QO unghiul CQP. Rezultă $\sphericalangle BPO + \sphericalangle CQO = (\sphericalangle BPQ + \sphericalangle CQP)/2 = (360° - \sphericalangle B - \sphericalangle C)/2$, din patrulaterul $BCQP$, deci $\sphericalangle BPO + \sphericalangle CQO = 180° - \sphericalangle B = 180° - \sphericalangle C$. În triunghiurile OBP, OCP rezultă acum $\sphericalangle BPO = \sphericalangle COQ$ și $\sphericalangle CQO = \sphericalangle BOP$ și deci cele două triunghiuri sînt asemenea, $BP/CO = BO/CQ$, și, cum $BO = CO = BC/2$, relația din enunț este dovedită.

Mai trebuie observat și că, pentru $P = P_0$ și $Q = A$, asemănarea celor două triunghiuri rămîne valabilă (motiv evident), deci

18 — c. 647

$BP_0 \cdot CA = (BC/2)^2$ şi se vede că, pentru un punct P de pe AB, lungimea CQ determinată prin relaţia din enunţ este $< CA$ dacă şi numai dacă P este pe AP_0, în particular că relaţia din enunţ interzice situarea lui P pe P_0B.

Şi, în sfîrşit, singura problemă de geometrie în spaţiu din listă.

Soluţia problemei US6 (vezi 10.2). Să considerăm o semidreaptă s de origine P situată în p şi să determinăm, deocamdată, maximul raportului din enunţ cînd R variază numai pe s. Pentru aceasta să alegem un punct S pe prelungirea lui s astfel ca $PS = PQ$, punct S care este deci fix, şi să observăm că $(QP + PR)/QR = SR/RQ =$ $= (\sin \sphericalangle SQR)/\sin S$ (fig. 154). Raportul este deci maxim cînd $\sphericalangle SQR$ este de 90°, ceea ce corespunde la o poziţie a lui R pe s (şi nu pe prelungirea ei), anume la $PR = PQ$ (se consideră cercul de rază $PQ = PS$ şi de centru P etc.). Valoarea acelui maxim este $1/\sin S =$ $= 1/\sin(\sphericalangle (PQ, s)/2)$.

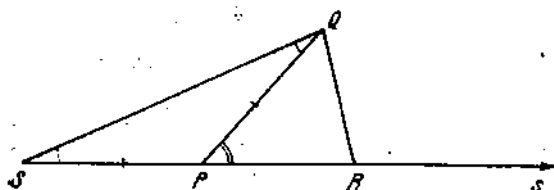


Fig. 154

Dacă acum semidreapta s, de origine P, variază parcurgînd planul p, sînt două posibilităţi. Dacă QP nu este perpendiculară pe p, atunci maximul căutat se atinge o singură dată, anume cînd $\sphericalangle(PQ, s)$ este minim posibil, deci cînd s este proiecţia semidreptei PQ pe p (şi R este punctul de pe această proiecţie în care $PR = PQ$). Dacă $PQ \perp p$, atunci totdeauna $PQ \perp s$, deci $\sphericalangle (PQ, s)$ este constant şi raportul este maxim pentru orice R de pe cercul de centru P, de rază PQ, situat în p, şi numai pentru asemenea R.

10.5. Soluţii ale problemelor relative la mulţimi

Soluţia problemei BG3 (vezi 10.2). Să observăm că din cele $C_{10}^2 = 45$ segmente existente sînt colorate numai $5 + 5 + 25 = 35$.

Nu ar fi lipsit de speranţă a se considera toate colorările posibile ale celor două baze; între vîrfurile lor nu este fixată nici o correspon-

dență (ca la prismele veritabile), deci sînt multe situații ce apar drept echivalente. Este interesantă însă (vezi 4.3) o soluție economică.

a) Să presupunem că ar exista o bază „bicoloră". Vom putea găsi două laturi consecutive ale ei de culori diferite.

Considerînd vîrful comun celor două laturi și segmentele ce-l unesc cu vîrfurile bazei opuse, vom putea găsi două astfel de segmente colorate la fel, ce conduc la două vîrfuri alăturate, ca urmare a numărului impar de vîrfuri ale bazei. Situația este redată în fig. 155.

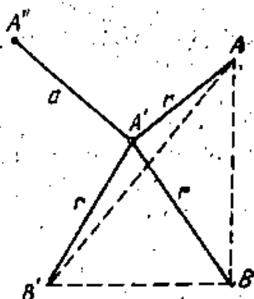


Fig. 155

Din condiția din enunț rezultă că BB', AB, AB' sînt albastre, contrazicînd, prin triunghiul monocolor ABB', acea condiție.

b) Să presupunem acum că ambele baze sînt monocolore, dar colorate diferit. Dintr-un vîrf al bazei roșii vor pleca, la fel ca la a), două segmente la fel colorate către două vîrfuri alăturate ale bazei albastre. Condiția din enunț afirmă că acele două segmente vor fi roșii și nu albastre și se ajunge în situația vîrfurilor A, A', B, B' din fig. 155, deci la o contradicție.

Soluția problemei CS2 (vezi 10.2). a) Condiția $j < k$ din enunț implică $k \geqslant 2$, $j \leqslant n-1$ (împreună cu $1 \leqslant j,\ k \leqslant n$), iar, grafic, faptul că M este inclusă în triunghiul dreptunghic isoscel de vîrfuri $(1, 2)$, $(1, n)$ și $(n-1, n)$.

Să considerăm, pentru o mulțime oarecare M de perechi de numere întregi (j, k) cu $1 \leqslant j < k \leqslant n$, mulțimea $A_M = \{k \mid \text{există } j$ cu $(j, k) \in M\}$, deci mulțimea tuturor „liniilor" în care M are elemente și $B_M = \{k \mid \text{există } m \text{ cu } (k, m) \in M\}$, deci mulțimea tuturor „coloanelor" în care M are elemente. Avem, evident, $A_M \subset \{2, \ldots, n\}$ și $B_M \subset \{1, \ldots, n-1\}$.

A doua condiție din enunț asupra lui M se exprimă deci prin: $k \in A_M$ implică $k \notin B_M$. Este preferabil să nu scriem $A_M \subset \complement B_M$, deoarece A_M și B_M le-am inclus în mulțimi diferite.

b) Să observăm că, dacă adăugăm lui M toate perechile (j, k) cu $1 \leqslant j < k \leqslant n$, $j \in B_M$ sau $j = 1$, și $k \notin B_M$, se obține o mulțime $N \supset M$ pentru care $B_N = B_M \cup \{1\}$ și $A_N = \{k \mid k \notin B_M, 2 \leqslant k \leqslant n\} = \{k \mid k \notin B_N, 2 \leqslant k \leqslant n\}$, adică $A_N = P \setminus B_N$, unde $P = \{1, \ldots, n\}$.

Mulțimea N satisface evident condițiile din enunț și ea se poate scrie $N = (B_N \times (P \setminus B_N)) \cap T$, unde $T = \{(j, k) \mid 1 \leqslant j < k \leqslant n;$ j și k întregi$\}$.

c) Construcţia de la b) arată că în rezolvarea problemei va fi suficient să considerăm numai mulţimi M de forma $(B\times(P\setminus B))\cap T$, cu $1\in B\subset\{1,\ldots,n-1\}$; pentru o astfel de mulţime $A_M=P\setminus B$, $B_M=B$.

Numărul de elemente din $B\times(P\setminus B)$ este $p(n-p)$, unde p este numărul de elemente din B, şi este maxim cînd $p=[n/2]$ şi $p=n-[n/2]$ (numere diferite pentru n impar). Se observă însă că, alegînd $B=\{1,\ldots,p\}$, rezultă $P\setminus B=\{p+1,\ldots,n\}$ şi deci $B\times(P\setminus B)\subset T$ şi $M=(B\times(P\setminus B))\cap T=B\times(P\setminus B)$ va avea $p(n-p)$ elemente, maxim posibil pentru cele două valori p indicate înainte. Incluziunea $B\times(P\setminus B)\subset T$ nu este valabilă pentru altfel de alegeri ale lui B.

Răspunsul este deci următorul. Pentru $n=2p$ numărul maxim este p^2, realizat pe o singură mulţime, anume $\{1,\ldots,p\}\times\{p+1,\ldots,2p\}$. Pentru $n=2p+1$ numărul maxim este $p(p+1)$, realizat pe două mulţimi, anume $\{1,\ldots,p\}\times\{p+1,\ldots,2p+1\}$ şi $\{1,\ldots,p+1\}\times\times\{p+2,\ldots,2p+1\}$.

Soluţia problemei DD3 (vezi 10.2). 1) Să observăm întîi că într-o familie F nu pot exista mulţimi cu mai mult de 3 elemente. Într-adevăr, dacă $X\in F$ şi $\text{card}X\geqslant 4$, atunci $R\setminus X$ ar consta din cel mult două elemente y, z, conform cu c) ar exista $Y, Z\in F$ cu $y\in Y$, $z\in Z$ şi am avea $X\cup Y\cup Z=R$ contrar cu b).

2) Să trecem acum în extrema cealaltă şi să presupunem că F conţine o mulţime $X=\{x\}$ formată dintr-un singur element. Conform cu a) rezultă că $x\notin Y$, pentru orice $Y\in F$, $Y\neq X$, deci $F\setminus\{X\}$ este o familie de submulţimi ale lui $R\setminus\{x\}$ ce are proprietăţile a) şi c) din enunţ, iar în loc de b) proprietatea $Y\cup Z\neq R\setminus\{x\}$ pentru orice $Y, Z\in F\setminus\{X\}$.

O astfel de familie este cea a tuturor combinărilor de 5 obiecte (elementele din $R\setminus\{x\}$) cîte 2, în număr de $C_5^2=10$. Adăugîndu-i pe X, obţinem o familie F cu 11 mulţimi.

3) Din nou în extrema cealaltă arătăm că maximul cerut de problemă nu se poate atinge pe familii F în care există o mulţime X cu 3 elemente. Fie $R\setminus X=\{y,z,u\}$. Nici un $Y\in F$ nu poate conţine două dintre elementele din $R\setminus X$, ca urmare a unui raţionament la fel ca în 1). În plus, conform cu a), familia F nu conţine submulţimi ale lui X. Deci F se compune, în afară de X, din 3 subfamilii F_y, F_z, F_u, unde, de exemplu, $F_y=\{Y\mid Y\in F,\ y\in Y\}$.

Vom arăta că, de exemplu, F_y are cel mult trei elemente şi va rezulta $\text{card}F\leqslant 10<11$, valoare realizată la 2).

Subfamilia F_y este în corespondenţă bijectivă, prin $Y\to X\cap Y$, cu o familie G_y de submulţimi ale lui X ce nu conţine două mulţimi $V\neq W$ cu $V\subset W$. Deci dacă G_y conţine $\emptyset$ sau X, aceasta are un

singur element. Sînt trei submulţimi ale lui X cu cîte 2 elemente. Deci card$G_y > 3$ ar cere ca G_y să conţină un $\{x\}$ cu $x \in X$, dar, dacă $X = \{x, x_1, x_2\}$, numai $\{x_1\}, \{x_2\}$ şi $\{x_1, x_2\}$ ar mai putea fi în G_y şi nici toate deodată, deci ar rezulta card$G_y \leq 3$. Cu aceasta s-a arătat că card $F_y =$ card$G_y \leq 3$.

4) Din nou în cealaltă extremă, observăm că maximul din problemă nu se poate atinge pe o familie F ce conţine $m > 1$ mulţimi de un singur element, deoarece (vezi şi 2)) rămîn $C^2_{6-m} \leq C^2_4 = 6$ mulţimi posibile a fi în F de cîte 2 elemente (cazul $m = 5$ este imposibil, $m = 6$ conduce la card$F = 6$).

În fine, să dovedim că maximul din problemă nu se atinge pe familii F formate numai din submulţimi de cîte două elemente. În total sînt $C^2_6 = 15 > 11$ (vezi 2)) asemenea submulţimi, dar reuniunea a trei din ele poate fi R şi astfel condiţia b) ne obligă să eliminăm cîteva. Trebuie eliminate cel puţin 5, ceea ce se vede considerînd un turneu cu 6 echipe, cu 5 etape, fiecare partidă jucîndu-se exact o dată şi fiecare etapă reprezentînd o scriere a lui R ca reuniunea a trei submulţimi de cîte două elemente. De exemplu (12, 34, 56), (13, 25, 46), (14, 26, 35), (15, 24, 36), (16, 23, 45).

A fost nevoie de mai multe idei pentru a face ca această soluţie să fie „economică".

Soluţia problemei II.4 (vezi 10.2). O mulţime de n elemente are 2^n submulţimi, deci o mulţime de 5 elemente are $2^4 = 16$ submulţimi ce conţin un element dat al ei, cu alte cuvinte, situaţia din problemă este posibilă.

O mulţime de 5 elemente are o submulţime de 5 elemente, $C^4_5 = 5$ de cîte 4 şi $C^3_5 = 10$ de cîte 3, pînă aici în total 16 submulţimi. Dar acestea nu pot reprezenta cele 16 submulţimi din enunţ, deoarece, dacă $K = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, atunci de exemplu $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}$ şi $\{3, 4, 5\}$ au intersecţia vidă.

Deci familia de mulţimi din enunţ conţine cel puţin o mulţime $\{a\}$ cu un element sau $\{a, b\}$ cu două elemente. În primul caz, pe baza condiţiei din enunţ, orice mulţime a familiei va conţine pe a şi problema ar fi rezolvată. În al doilea caz orice altă mulţime din familie va conţine, tot pe baza condiţiei din enunţ, sau pe a şi b, sau pe a dar nu pe b, sau pe b dar nu pe a. Una din ultimele două situaţii nu se va realiza, deoarece dacă $A \cap \{a, b\} = \{a\}$ şi $B \cap \{a, b\} = \{b\}$, atunci $A \cap B \cap \{a, b\} = \emptyset$. Să presupunem că ultima nu se realizează. Cum există $2^3 = 8$ submulţimi ale lui K ce conţin a şi b, nu pot fi toate celelalte 15 din familie în prima situaţie, deci se va realiza şi a doua situaţie şi a va fi elementul cerut de problemă.

Observaţie. Afirmaţia din enunţ este valabilă şi cu 11 în loc de 16. Pentru a demonstra aceasta să considerăm o familie G de submulţimi ale lui K, pentru care

$X \cap Y \cap Z \neq \emptyset$, oricare ar fi X, Y, Z din G, şi astfel ca intersecţia tuturor mulţimilor din G să fie vidă şi să demonstrăm că avem card $G \leqslant 10$. Vom considera familia H a tuturor complementarelor de mulţimi din G; aceasta va avea proprietatea că $X \cup Y \cup Z \neq K$ pentru orice X, Y, Z din H şi că $\bigcup_{X \in H} X = K$.

La fel ca la punctul 1) din soluţia lui DD3 rezultă că avem card $X \leqslant 2$ şi card $(X \cup Y) \leqslant 3$ pentru orice X, Y din H. Din ultima rezultă că, dacă adăugăm la H mulţimea vidă şi toate $\{x\}$ cu $x \in K$, familia H îşi păstrează proprietăţile menţionate. Va trebui deci arătat că în H nu pot fi mai mult de patru mulţimi de cîte două elemente.

Fie $\{1, 2\} \in H$. Cum două mulţimi de cîte două elemente din H nu pot fi disjuncte, o a doua mulţime de două elemente din H se va putea nota $\{1, 3\}$. O a treia, dacă va conţine 1, se va nota $\{1, 4\}$ şi în această situaţie o a patra va trebui să conţină 1, altfel ar conţine şi 2 şi 3 şi 4; deci în total nu ar putea fi mai mult de 4, anume $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$ şi $\{1, 5\}$. Dacă acea a treia mulţime ar conţine 2, aceasta ar trebui să conţină şi 3, iar a patra nu ar mai putea exista.

Afirmaţia este dovedită.

10.6. Soluţiile a două probleme de maxim şi minim

Soluţia problemei DD1 (vezi 10.2). Cum $x_i > 0$, avem $x_1 \ldots x_n = (x_1^2 \ldots x_n^2)^{1/2}$, produsul de numere pozitive cu sumă constantă este maxim cînd acestea sînt egale, deci, în cazul de aici, cînd $x_1^2 = \ldots = x_n^2 = 1/n$, $x_1 = \ldots = x_n = 1/\sqrt{n}$, situaţie în care $x_i \geqslant 1/n$ pentru $i = 1, \ldots, n$ sînt satisfăcute. Deci maximul produsului din enunţ se atinge pentru $x_1 = \ldots = x_n = 1/\sqrt{n}$ şi valoarea sa este $n^{-n/2}$.

Din studiul funcţiei $x(a - x)$ cu $a > 0$ se deduce că, dacă $u + v = u_1 + v_1$ şi $\min(u, v) \geqslant u_1 > 0$, atunci $uv \geqslant u_1 v_1$. Aceasta ne permite, de fiecare dată fără a mări produsul, să înlocuim, succesiv, pentru $i = 1, \ldots, n - 1$, x_i^2 cu $1/n^2$, simultan cu o înlocuire de fiecare dată a lui x_n^2 pentru a păstra valabilitatea lui $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Prin aceasta ajungem la concluzia $x_1^2 \ldots x_n^2 \geqslant n^{-2(n-1)}(1 - (n - 1)n^{-2})$, egalitatea fiind realizată dacă toţi x_i sînt egali cu $1/n$ cu excepţia unuia, egal cu $(1 - (n - 1)^{n-2})^{1/2} \geqslant 1/n$. Deci valoarea minimă a produsului din enunţ este $n^{-(n-1)}(1 - (n - 1)n^{-2})^{1/2} = n^{-n}\sqrt{n^2 - n + 1}$.

Soluţia problemei SE2 (vezi 10.2). În cazul $n = 2$ este vorba de $x_1 x_2$, este o problemă cunoscută şi maximul este $a^2/4$, atins numai pentru $x_1 = x_2 = a/2$. Pentru $n = 3$ este vorba de $(x_1 + x_3)x_2$, maximul este $a^2/4$, dar este atins pentru o familie întreagă de situaţii, anume $x_2 = a/2$, $x_1 + x_3 = a/2$, x_1, $x_3 \geqslant 0$.

Pasul esenţial apare la $n = 4$, unde este vorba de $(x_1 + x_3)(x_2 + x_4) - x_1 x_4$; primul termen este maxim pentru $x_1 + x_3 = x_2 + x_4 = a/2$, al doilea este minim pentru $x_1 = 0$ şi $x_4 = 0$; maximul este deci tot $a^2/4$, atins pentru $x_1 = 0$, $x_2 + x_4 = x_3 = a/2$ şi pentru $x_2 = x_1 + x_3 = a/2$, $x_4 = 0$.

Apare ideea că am putea elimina x_1. Într-adevăr, dacă în $\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} =$ $= (x_1 + x_3)(x_2 + x_4) - x_1 x_4 + \sum_{i=4}^{n-1} x_i x_{i+1}$ lăsăm toţi $x_2, x_4, \ldots, x_n$ neschimbaţi şi înlocuim x_1 cu 0 şi x_3 cu $x_1 + x_3$, numai termenul $x_1 x_4$ se modifică şi întreaga expresie nu scade, acel termen devenind 0; suma $\sum_{i=1}^{n} x_i$ rămîne aceeaşi. Deci maximul din enunţ nu se schimbă dacă se cere în plus $x_1 = 0$. În acelaşi mod se elimină succesiv x_2, $x_3, \ldots$, şi se ajunge la concluzia că maximul cerut este tot $a^2/4$, realizat în mai multe moduri, anume $x_i + x_{i+2} = x_{i+1} = a/2$ şi restul nuli, oricare ar fi i ales.

Observaţie. Din raţionamentul de mai înainte rezultă că maximul nu este atins dacă $x_1 x_4 \neq 0$, ceea ce ne arată că acel maxim se atinge numai în situaţii în care, după renunţarea la toţi x_i care nu influenţează, fiind nuli, chiar cu nimic, suma se descompune sub forma $(x_1 + x_3)x_2 + (x_5 + x_7)x_6 + \ldots$ sau, mai bine $x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots$ cu $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + \ldots = a$. Pentru $x_1 + y_1$ şi $x_2 + y_2$ daţi maximul se atinge dacă $x_1 = y_1$ şi $x_2 = y_2$ şi se obţine $u_1^2 + u_2^2 + \ldots$ cu $u_1 + u_2 + \ldots = a/2$, dar $u_1^2 + u_2^2 = (u_1 + u_2)^2 - 2u_1 u_2$, deci, pentru $u_1 + u_2$ dat, $u_1^2 + u_2^2$ este maxim numai dacă unul dintre ei este nul. Cu aceasta s-a dovedit că situaţiile descrise la sfîrşitul soluţiei în care $\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$ îşi atinge maximul sînt singurele.

Soluţia autorilor. Fie $x = \max x_i$; obţinem $\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \leqslant x(a - x) \leqslant$ $\leqslant a^2/4$ şi se atinge pentru $x = a/2$, deci cînd un x_i este $a/2$; în afară de $x_{i-1} x_i$ şi $x_i x_{i+1}$, ceilalţi termeni $x_j x_{j+1}$ trebuie să fie nuli, altfel $\max_k x_k$ s-ar atinge încă o dată într-un x_j, ca urmare a modului cum s-a obţinut majorarea cu $x(a - x)$, dar pentru $|j - i| > 1$ suma ar rezulta nulă.

10.7. Soluţiile problemelor privind numere întregi

Soluţia problemei DE1 (vezi 10.2). Este suficient de demonstrat afirmaţia în cazul unei fracţii p/q ireductibile. Se verifică faptul că 1979 este un număr prim. De asemenea, dacă avem două fracţii ireductibile a/b şi c/d, în care a şi c se divid cu numărul prim u, atunci $(a/b) + (c/d) = (ad + bc)/bd$ şi prin simplificarea ei factorul prim u de la numărător nu se poate reduce, acesta neapărînd nici în b nici în d. Deci dacă afirmaţia din enunţ este valabilă pentru a/b şi c/d, ea va fi valabilă şi pentru fracţia ireductibilă egală cu $(a/b) + (c/d)$.

Pentru a scurta expunerea să notăm $S_n = 1 - (1/2) + (1/3) - \ldots$ $\ldots + (-1)^{n-1}(1/n)$.

Ţinînd seama de ideea de mai înainte, să scriem $S_{1319} = S_{1318} + \left(\frac{1}{1319} + \frac{1}{660}\right) - \frac{1}{660} = S_{1317} + \left(\frac{1}{1318} + \frac{1}{661}\right) + \left(\frac{1}{1319} + \frac{1}{660}\right) - \left(\frac{1}{660} + \frac{1}{661}\right) - \frac{2}{1318} = \ldots = S_{659} + \left(\frac{1}{990} + \frac{1}{989}\right) + \ldots$

$$\ldots + \left(\frac{1}{1318} + \frac{1}{661}\right) + \left(\frac{1}{1319} + \frac{1}{660}\right) - \left(\frac{1}{660} + \frac{1}{661} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{1}{989}\right) - \left(\frac{2}{1318} + \frac{2}{1316} + \ldots + \frac{2}{990}\right) =$$

$$= S_{659} + \left(\frac{1}{990} + \frac{1}{989}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{1318} + \frac{1}{661}\right) + \left(\frac{1}{1319} + \frac{1}{660}\right) -$$

$$- \left(\frac{2}{660} + \frac{2}{662} + \ldots + \frac{2}{1318}\right).$$

Parantezele ce conţin sume de doi termeni rezultă de forma $1979/uv$ cu $u, v < 1979$, deci sînt ireductibile. Conform observaţiei de la începutul soluţiei va fi suficient de demonstrat afirmaţia din enunţ pentru $S_{659} - \frac{1}{330} - \frac{1}{331} - \ldots - \frac{1}{659} = S_{658} - \frac{1}{330} - \frac{1}{331} - \ldots - \frac{1}{658}$. Aceasta se poate transforma în continuare în

$$S_{329} - \frac{2}{330} - \frac{2}{332} - \ldots - \frac{2}{658} = S_{329} - \frac{1}{165} - \frac{1}{166} - \ldots$$

$$\ldots - \frac{1}{329} = S_{328} - \frac{1}{165} - \frac{1}{166} - \ldots - \frac{1}{328}$$

şi, după cîţiva paşi, se va ajunge la rezultatul dorit.

Există însă o cale mai rapidă ce constă în a nota $T_n = S_{2n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \ldots - \frac{1}{2n}$ (deci „un pas" în raţionamentul precedent consta în a trece de la T_n la $T_{n/2}$), a calcula

$$T_{n+1} - T_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2},$$

a constata că este 0 şi deci $T_n = T_1 = 1 - (1/2) - (1/2) = 0$ şi cu aceasta afirmaţia este demonstrată; expresia din enunţ este chiar egală cu suma fracţiilor $1979/(uv)$ considerate.

Soluția problemei PL1 (vezi 10.2). Un exemplu de numere $b_1, \ldots, b_n$ ce satisfac prima condiție din enunț (ca sumele respective să fie distincte) îl constituie $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$. Dar a_i pot fi „puțini" și „mari".

Ideea de bază constă în a căuta numerele $b_1, \ldots, b_n$ de forma $b_i = \sum_{k \in A_i} 2^k$, unde $A_1, \ldots, A_n$ sînt submulțimi disjuncte ale lui $\{0, 1, 2, \ldots\}$; asemenea b_i satisfac condiția $\sum_{i \in I} b_i \neq \sum_{i \in J} b_i$ pentru $I \neq J$, ea revenind la o condiție analoagă, cu $\bigcup_{i \in I} A_i$ și $\bigcup_{i \in J} A_i$ în loc de I și J, pentru 2^k, $k = 0,1, \ldots$

Dacă scriem numerele $a_1, \ldots, a_m$ sub forma $a_j = \sum_{k \in M_j} 2^k$ (unde M_j este mulțimea pozițiilor în care se află cifra 1 din scrierea lui a_j în baza 2), atunci problema va fi rezolvată dacă vom putea alege mulțimile disjuncte $A_1, \ldots, A_n$, cu $n < 2^m$, așa încît orice M_j să fie reuniunea unor A_i, adică $M_j = \bigcup_{i \in I_j} A_i$ pentru anumiți $I_j \subset \{1, \ldots, n\}$.

Demonstrația posibilității alegerii mulțimilor $A_1, \ldots, A_n$ se face prin inducție față de m. Dacă $m = 1$, alegem $A_1 = M_1$ și $n = 1 < 2^1$. Dacă alegerea se poate face pentru m și considerăm încă un număr a_{m+1} și mulțimea corespunzătoare M_{m+1}, atunci vom avea, reluînd notațiile de mai înainte, $M_{m+1} = (M_{m+1} \cap A_1) \cup \ldots \cup (M_{m+1} \cap A_n) \cup \cup (M_{m+1} \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n))$ și, dacă vom nota $A_i' = A_i \cap M_{m+1}$, $A_i'' = A_i \setminus M_{m+1}$ pentru $i = 1, \ldots, n$ și $A_0' = M_{m+1} \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)$, vom obține $2n + 1$ mulțimi disjuncte și vom avea $M_{m+1} = \bigcup_{i=0}^{n} A_i'$, $M_j = \bigcup_{i \in I_j} A_i = \bigcup_{i \in I_j} (A_i' \cup A_i'')$ pentru $1 \leqslant j \leqslant m$; cum $n \leqslant 2^m - 1$, rezultă $2n + 1 \leqslant 2^{m+1} - 2 + 1 = 2^{m+1} - 1$.

Se observă că ultima parte a soluției reprezintă de fapt o demonstrație a teoremei care afirmă că o algebră de submulțimi ale unei mulțimi date N, generată de un număr finit de submulțimi, este algebra generată de o partiție finită a lui N.

Soluția problemei RO1 (vezi 10.2). Pentru un n dat ($n = 100$) va trebui determinat m astfel ca $b_m > a_n > b_{m-1}$.

Partea mai dificilă apare a deduce o inegalitate de forma $a_n > b_m$, care revine la $3^{a_{n-1}} > 100^{b_{m-1}}$, $a_{n-1} > (\log_3 100) b_{m-1}$, $3^{a_{n-2}} > (\log_3 100)\, 100^{b_{m-2}}$, deci la $a_{n-2} > \log_3 \log_3 100 + (\log_3 100) b_{m-2}$.

De aici se vede importanța pentru problemă a unor inegalități de tipul $a_n > u + v b_m$, cu $u, v > 0$ fixați. Dintr-o astfel de inegali-

tate se deduce $a_{n+1} = 3^{a_n} > 3^u (3^v)^{b_m}$. Dacă $3^v > 100$, se obţine $a_{n+1} > 3^u b_{m+1}$, iar dacă şi $3^u > u + v$, atunci se obţine în continuare $a_{n+1} > u + vb_{m+1}$, deci inegalitatea de la care am plecat, cu $n + 1$, $m + 1$ în loc de n, respectiv m.

Inegalitatea $3^v > 100$ este valabilă pentru $v = 5$, iar $3^u > u + 5$ este valabilă pentru $u = 2$. Deci $a_n > 2 + 5b_m$ implică $a_{n+1} > 2 + 5b_{m+1}$. Avem $b_1 = 100$, $a_1 = 3$, $a_2 = 3^3 = 27$, $a_3 = 3^{27}$ şi $2 + 5b_1 = 502 < < 729 = 3^6$, deci $a_3 > 2 + 5b_1$; obţinem $a_n > 2 + 5b_{n-2}$ pentru orice $n \geqslant 3$, în particular $a_n > b_{n-2}$.

Pe de altă parte (partea simplă a soluţiei) $a_n < b_m$ implică $a_{n+1} = = 3^{a_n} < 100^{b_m} = b_{m+1}$, ceea ce, împreună cu $a_3 < b_1$, conduce la $a_n < b_{n-1}$ pentru orice $n \geqslant 2$.

În concluzie, $b_{n-1} > a_n > b_{n-2}$, deci $m = n - 1$; pentru $n = 100$ avem $m = 99$.

Această problemă scoate în evidenţă un fapt interesant, anume că, dacă în construcţia şirului a_n se înlocuieşte 3 cu 100, atunci, de la un rang încolo, comportarea noului şir se aseamănă cu cea a lui a_n, termenii lor apărind alternativ în şirul obţinut reunindu-le. La prima vedere, nu era de aşteptat aşa ceva.

Soluţia problemei SU1 (vezi 10.2). Se scriu cele două ecuaţii sub forma $x^2 + t^3 = y^2 + z^3$ şi $x^2 + t^3 = y^2 + z^3 + 1$, se notează, pentru fiecare i, cu n_i numărul de elemente din mulţimea $\{(y, z) \mid 0 \leqslant \leqslant y, z \leqslant 10^6, y^2 + z^3 = i\}$ şi se observă că $n_i = 0$ dacă $0 \leqslant i \leqslant k$ este fals, unde $k = (10^6)^2 + (10^6)^3$. Avem $N = n_0^2 + n_1^2 + \ldots + n_k^2$ şi $M = n_0 n_1 + n_1 n_2 + \ldots + n_{k-1} n_k$, deci $N - M = (n_0^2 + (n_1 - n_0)^2 + + (n_2 - n_1)^2 + \ldots + (n_k - n_{k-1})^2 + n_k^2)/2 > 0$ ca urmare a faptului că $n_0 > 0$; mai precis $n_0 = 1$.

Soluţie simplă, dar surprinzătoare ! Multe căi de abordare ce duc la complicaţii, fără a conduce la rezultat. Problemă ce poate consuma timpul şi forţele rezolvitorului mai mult decît lasă să se întrevadă prin rapiditatea soluţiei.

Soluţia problemei US4 (vezi 10.2). a) Cazul 1, $n < 8$. Puterea maximă a lui 2 la care se divide numărul din enunţ va fi n. Pentru ca numărul să fie pătrat perfect este necesar ca acea putere să fie pară şi ca $1 + 2^{8-n}(1 + 2^3) = 1 + 9 \cdot 2^{8-n}$ să fie un pătrat perfect u^2. Rezultă $(u + 1)(u - 1) = 9 \cdot 2^{8-n}$, deci $u + 1$ şi $u - 1$ sînt divizori ai lui $9 \cdot 2^{8-n}$. Diferenţa între ei fiind 2, nu se poate ca ambii să se dividă cu 3, deci unul se va divide cu 9 şi celălalt va fi o putere a lui 2. Acea putere poate fi $2^0 = 1$ sau 2^{7-n}, celălalt factor rezultînd $9 \cdot 2^{8-n}$, respectiv $9 \cdot 2 = 18$ Diferenţa 2 se realizează numai pentru 18 şi $2^4 = 16$, adica $n = 3$ impar.

Deci pentru $n < 8$ numărul din enunţ nu poate fi pătrat perfect.

b) Cazul 2, $n \geqslant 8$. Notînd $n = 8 + k$, va trebui ca $1 + 2^3 + 2^k = 9 + 2^k$ să fie un pătrat perfect u^2, deci $(u + 3)(u - 3) = 2^k$, $u + 3 = 2^r$, $u - 3 = 2^s$ cu $r > s$ şi $r + s = k$. Rezultă $6 = 2^r - 2^s = (2^{r-s} - 1)2^s$, de unde, din $6 = 3 \cdot 2$, rezultă $s = 1$, $r - s = 2$, $r = 3$, $k = r + s = 4$; în acest caz $1 + 2^3 + 2^4 = 25$ este pătrat perfect.

Răspunsul este deci: singurul număr natural n pentru care $2^8 + 2^{11} + 2^n$ este pătrat perfect este $n = 8 + k = 12$, caz în care $2^8 + 2^{11} + 2^{12} = (2^4 5)^2 = 80^2$.

10.8. O problemă în care intervin numere complexe

Soluţia problemei BG1 (vezi 10.2). a) Dacă z este o rădăcină, în general complexă, a lui $f(x)$, atunci relaţia din enunţ arată că şi $2z^3 + z$ va fi o rădăcină a lui $f(x)$.

Să observăm că, dacă $|z| > 1$, atunci

$$|2z^3 + z| = |z||2z^2 + 1| \geqslant |z|(|2z^2| - 1) > |z|.$$

Dacă $f(x)$ ar avea o rădăcină z_1 cu $|z_1| > 1$, ar rezulta că $f(x)$ ar avea o altă rădăcină z_2 cu $|z_2| > |z_1|$, deci un şir z_n de rădăcini cu $|z_{n+1}| > |z_n|$ pentru orice n. Aceasta nu este posibil; pentru toate rădăcinile z ale lui $f(x)$ avem $|z| \leqslant 1$.

b) Dacă $f(x)$ s-ar divide cu x şi dacă x^k, cu $k > 1$, ar fi cea mai mare putere a lui x ce ar divide $f(x)$, am avea $f(x) = x^k(a + xq(x))$ cu $a \neq 0$, $f(2x^2) = x^{2k}(a_1 + 2^{k+1}x^2q(2x^2)) = x^{2k}(a_1 + xq_1(x))$ şi $f(2x^3 + x) = x^k(2x^2 + 1)^k(a + (2x^2 + 1)xq(x)) = x^k(a + xq_2(x))$, cu q, q_1, q_2 polinoame şi $a_1 \neq 0$ şi relaţia din enunţ ar cere $x^k(a + xq(x))x^{2k}(a_1 + xq_1(x)) = x^k(a + xq_2(x))$, imposibil pentru $a \neq 0$ şi $k > 0$.

Deci $f(x)$ are termenul liber diferit de 0. Conform raţionamentului dinainte, cu $k = 0$, acel termen liber a satisface $a^2 = a$, deci $a = 1$.

c) Fie m gradul lui $f(x)$. Gradele lui $f(2x^2)$ şi $f(2x^3 + x)$ vor fi $2m$, respectiv $3m$ şi vom avea $f(x) = bx^m + \ldots$, $f(2x^2) = 2^m bx^{2m} + \ldots$, $f(2x^3 + x) = 2^m bx^{3m} + \ldots$ şi relaţia din enunţ conduce la $b \cdot 2^m b = 2^m b$, $b = 1$.

Deci, ţinînd seama şi de concluzia de la b), produsul rădăcinilor lui $F(x)$ rezultă egal cu ± 1 şi, pe baza concluziei de la a), modulele tuturor rădăcinilor lui $f(x)$ rezultă egale cu 1.

d) Să reluăm raţionamentul de la a). Dacă z este o rădăcină a lui $f(x)$, atunci $|z| = 1$ şi $1 = |2z^3 + z| = |2z^2 + 1| \geqslant |2z^2| - 1 = 1$, deci are loc semnul $=$, ceea ce este posibil numai cînd $2z^2$ şi -1 au acelaşi argument; împreună cu $|z| = 1$ aceasta implică $z = \pm i$.

Singurele rădăcini posibile pentru $f(x)$ sînt în consecinţă $\pm i$. Cum $f(x)$ a fost presupus a avea coeficienţi reali, aceasta înseamnă că (x) trebuie să fie de forma $(x^2 + 1)^n$ (vezi şi c)).

Pentru orice n, polinomul $(x^2+1)^n$ satisface relaţia din enunţ, ca urmare a egalităţii $(x^2+1)(4x^4+1)=(2x^3+x)^2+1$, ce se verifică fără dificultate.

S-a apreciat că şi această problemă merita un asterisc (vezi 10.2).

10.9. Soluţiile celorlalte probleme; lista de probleme de concurs

Soluţia problemei DE3 (vezi 10.2). Presupunem că x nu este scris sub forma $x=0,b_1\ldots b_k1111\ldots$; în particular $x<1/2$ este echivalent cu $b_1=0$. Rezultă $2x=b_1,b_2b_3\ldots$ şi avem $2x=0,b_2b_3\ldots$ dacă $x<1/2$ şi $2x-1=0,b_2b_3\ldots$ dacă $x\geqslant 1/2$ (şi deci $b_1=1$). Se obţine

$$f(x)=(3b_1+f(0,b_2b_3\ldots))/4=(3/4)b_1+(1/4)f(0,b_2b_3\ldots)$$

şi, din aproape în aproape sau, mai precis, prin inducţie după k,

$$f(x)=(3/4)b_1+(1/4)(3/4)b_2+\ldots+(1/4)^{k-1}(3/4)b_k+$$
$$+(1/4)^k f(0,b_{k+1}b_{k+2}\ldots).$$

Nu s-a afirmat că f ar fi mărginită pentru a putea deduce un rezultat făcînd $k\to\infty$. Este însă important că f este definită numai pentru x raţional, deci că fracţia $0,b_1b_2\ldots$ este periodică, simplă sau mixtă.

Dacă fracţia este periodică simplă, adică $b_{k+1}=b_1$, $b_{k+2}=b_2,\ldots$ pentru un $k\geqslant 1$, atunci $0,b_{k+1}b_{k+2}\ldots=x$ şi relaţia obţinută se transformă într-o ecuaţie în $f(x)$, ce are soluţie unică. Deci o funcţie $f(x)$ cu proprietăţile din enunţ are valori unic determinate pe fracţiile periodice simple. Dacă pentru un anumit k fracţia $0,b_{k+1}b_{k+2}\ldots$ este periodică simplă, ceea ce se întîmplă cînd x este periodică mixtă, atunci relaţia obţinută va arăta că valorile lui $f(x)$ sînt unic determinate pentru orice x raţional. Cu alte cuvinte, dacă există o funcţie f cu proprietăţile din enunţ, aceasta este unică.

Funcţia f, definită prin $f(0,b_1,b_2\ldots)=(3/4)\,b_1+(1/4)\,(3/4)b_2+\ldots$

$$\ldots+(1/4)^{k-1}(3/4)b_k+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}((1/2^{2k-1})b_k+(1/2^{2k})b_k)=0,b_1b_1b_2b_2\ldots b_kb_k\ldots$$

(am înlocuit 3 cu 2 + 1 etc.), satisface ipotezele din enunţ, ceea ce se verifică prin raţionamentul de la începutul soluţiei. Deci, ea este funcţia despre care este vorba.

Să observăm şi că formula obţinută nu este valabilă pentru fracţii de forma $0,b_1\ldots b_k111\ldots$ De exemplu, $0,0111\ldots=0,1000\ldots$ şi valoarea lui f în acest număr este $0,11000\ldots$ şi nu $0,00111\ldots$

Soluţia problemei DE4 (vezi 10.2). Într-un şir $(P_0,\ldots,P_n)$ cu proprietăţile din enunţ, pentru $i<n$, dacă $P_i=A_j$ sau A'_j (vezi

fig. 156), atunci j este de aceeași paritate cu i (inducție față de i) și, cum $P_{n-1} = A_3$ sau A'_3, $n - 1$ rezultă impar, deci n este par, ceea ce arată că $a_{2n-1} = 0$.

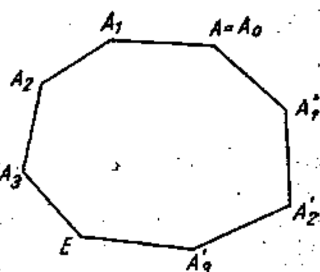


Fig. 156

Formula indicată în enunț pentru a_{2n} sugerează faptul că $b_n = a_{2n}$ se va obține ca soluție a unei ecuații de forma $b_n = ub_{n-1} + vb_{n-2}$, cu u și v constanți (vezi 6.3, soluția problemei GB1 propusă juriului la Olimpiada a 18-a).

Fie, pentru $n \geqslant 0$, c_n numărul de șiruri $(P_0, \ldots, P_{2n})$ ce au proprietățile din enunț, însă cu $P_{2n} = A_2$ sau A'_2 în loc de $P_{2n} = E$, și d_n numărul analog de șiruri cu $P_{2n} = A$. Avem, pentru $n \geqslant 1$, $d_n = 2d_{n-1} + c_{n-1}$, cele $2d_{n-1}$ corespunzînd șirurilor cu $P_{2n-2} = A$, $P_{2n-1} = A_1$ sau A'_1, iar cele c_{n-1} corespunzînd șirurilor cu $P_{2n-2} = A_2$, $P_{2n-1} = A_1$ sau $P_{2n-2} = A'_2$, $P_{2n-1} = A'_1$. La fel, $c_n = 2c_{n-1} + 2d_{n-1}$, cele $2d_{n-1}$ corespunzînd șirurilor cu $P_{2n-2} = A$, $P_{2n-1} = A_1$ sau A'_1. De asemenea, $b_n = c_{n-1}$.

Vor trebui deci eliminați d_n din $d_n = 2d_{n-1} + c_{n-1}$, $c_n = 2c_{n-1} + 2d_{n-1}$; din a doua relație rezultă $d_{n-1} = (c_n/2) - c_{n-1}$, ceea ce, introdus în prima, conduce la $(c_{n+1}/2) - c_n = c_n - 2c_{n-1} + c_{n-1}$, deci la $c_{n+1} = 4c_n - 2c_{n-1}$, pentru $n \geqslant 1$ și, în fine, la $b_n = 4b_{n-1} - 2b_{n-2}$, valabil pentru $n \geqslant 3$.

Ca în soluția problemei citate din 6.3 se formează ecuația $z^2 - 4z + 2 = 0$; aceasta are ca rădăcini $z = 2 \pm \sqrt{2}$ și se obține $b_n = p(2+\sqrt{2})^{n-1} + q(2-\sqrt{2})^{n-1}$, unde s-a pus $n-1$ și nu n, pe de o parte, pentru a se ajunge la relația din enunț și, pe de alta, pentru că b_n sînt definiți numai pentru $n \geqslant 1$. Cum, evident, $b_1 = 0$ și $b_2 = 2$, rezultă $p + q = 0$, deci $q = -p$ și apoi $2p\sqrt{2} = 2$, $p = 1/\sqrt{2}$, $q = -1/\sqrt{2}$, deci, formula din enunț.

Precauțiile relative la nedefinirea lui b_0 nu au fost inutile : pentru $n = 0$ formula obținută dă $b_0 = -1$, contrar valorii 0 ce ar fi rezultat dacă se definea b_0 în același mod ca și b_1, $b_2 \ldots$

Observație. Nu era necesar să se rezolve ecuația în b_n, era suficient să se verifice faptul că formula din enunț este valabilă pentru $n = 1$ și 2 și că expresia din enunț verifică acea ecuație ; un raționament prin inducție conducea la concluzia cerută.

Soluția problemei IL2 (vezi 10.2). Să presupunem că relațiile din enunț au loc. Rezultă $\Sigma(ak - k^3)x_k = 0$ și $\Sigma(ak^3 - k^5)x_k = 0$, egalități ce se pot transcrie

$$\sum_{k^2<a}(a - k^2)\,kx_k = \sum_{k^2>a}(k^2 - a)kx_k,\ \sum_{k^2<a}(a - k^2)k^3x_k = \sum_{k^2>a}(k^2 - a)k^3x_k.$$

Dar $\sum\limits_{k^2 \leq a} (a - k^2)k^3x_k \leq a \sum\limits_{k^2 \leq a} (a - k^2)kx_k = a \sum\limits_{k^2 > a} (k^2 - a)kx_k \leq$

$$\leq \sum_{k^2 > a} (k^2 - a)\, k^3x_k$$

şi, cum extremii sînt egali, rezultă că ambele semne $\leq$ sînt de fapt egalităţi.

Din a doua din cele două egalităţi astfel stabilite rezultă că avem $x_k = 0$ pentru $k^2 > a$ (s-au adunat inegalităţile $a(k^2 - a)\, kx_k \leq \leq k^2(k^2 - a)\, kx_k$, în care $(k^2 - a)k \neq 0$), iar din prima, analog, $x_k = 0$ imediat ce $k^2 < a$.

Cum nu toţi x_k sînt nuli, rezultă $a = k^2$ pentru un k, deci a are una din valorile 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2. Toate aceste valori sînt posibile, ceea ce se vede, în cazul valorii m^2, alegînd $x_k = 0$ pentru $k \neq m$ şi $x_m = m$.

Soluţia problemei YU4 (vezi 10.2). Din prima relaţie cea de-a doua se deduce cu uşurinţă. Să presupunem că a doua, $f(x + y + xy) = f(x) + f(y) + f(xy)$, este valabilă pentru orice x,y şi să deducem valabilitatea primei, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Pentru $x = y = 0$ se obţine $f(0) = 3f(0)$, deci $f(0) = 0$. Pentru $y = -1$ se obţine $f(-1) = f(x) + f(-1) + f(-x)$, deci $f(-x) = -f(x)$.

Acum să înlocuim x cu $-x$ şi y cu $-y$ în relaţia $f(x + y + xy) = f(x) + f(y) + f(xy)$. Se obţine $f(xy - (x + y)) = f(xy) - (f(x) + f(y))$, ţinînd seama de concluzia precedentă. Adunînd cele două relaţii, rezultă $2f(xy) = f(xy + (x + y)) + f(xy - (x + y))$.

Să observăm acum că dacă $xy = a \leq 0$ este fixat şi x,y parcurg R, $x + y$ parcurge întregul R, deoarece ecuaţia $z^2 - bz + a = 0$ are discriminantul $b^2 - 4a \geq 0$, deci are soluţii reale, pentru orice $b \in R$. Cu aceasta s-a demonstrat că $2f(a) = f(a + b) + f(a - b)$ pentru orice $b \in R$ şi $a \leq 0$, dar, în virtutea proprietăţii $f(-x) = -f(x)$, valabilitatea ei se extinde şi la $a > 0$.

Pentru $a = b$ se obţine $2f(b) = f(2b)$, deoarece $f(0) = 0$, şi apoi $f(2a) = f(a + b) + f(a - b)$. Notînd $a + b = x$, $a - b = y$, aceasta se scrie $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Nu avem alte informaţii asupra modului în care s-a desfăşurat alegerea celor şase probleme de concurs, în afara faptului că problema RO1 a „rezistat" mult timp, renunţîndu-se la ea abia într-unul din ultimii paşi ai procedurii. Cele şase probleme ce au fost propuse concurenţilor au fost următoarele (vezi enunţurile în 10.2) : *1* (DE1) — 6 puncte, *2* (BG3) — 7 puncte, *3* (SU3) — 7 puncte ; *4* (US6) — 6 puncte, *5* (IL2) — 7 puncte, *6* (DE4) — 7 puncte. Deci la lista de la 9.3 de Olimpiade la care s-au dat două probleme propuse de aceeaşi ţară se adaugă : DE la Olimpiada a 21-a.

10.10. Soluţii ale concurenţilor, rezultate, premii

Începem cu singura soluţie pentru care un concurent a obţinut premiu special (acel concurent a obţinut şi premiul 1 cu punctaj maxim — 40 puncte).

Soluţie a problemei 3 (SU3, vezi 10.2). Fie B al doilea punct comun al celor două cercuri. În fig. 157 stînga avem $\sphericalangle ABM = \text{arc}AM/2 = \text{arc}AN/2 = \sphericalangle ABN$, deci B, M, N sînt coliniare. Analog se stabileşte aceasta cînd M şi N au alte poziţii pe cele două cercuri, de exemplu în fig. 157, dreapta, $\sphericalangle ABM = \text{arc}AXM/2 = (360° - \text{arc}\,ABM)/2 = 180° - (\text{arc}\,AN/2) = 180° - \sphericalangle ABN$.

Dacă se consideră acum punctele U şi V diametral opuse lui B în cele două cercuri, puncte care sînt fixe, atunci $UN \perp NBM \perp MV$, $UN \parallel MV$, deci $UNMV$ este un trapez dreptunghic, linia sa mijlo-

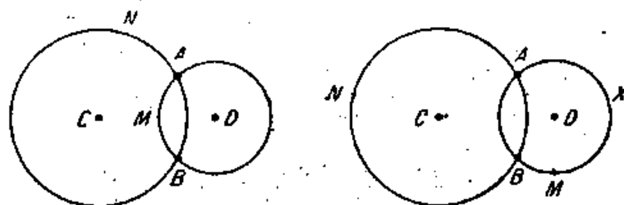


Fig. 157

cie este mediatoarea lui MN, ea trece prin mijlocul P al lui UV care este fix (fig. 158), deci $PM = PN$.

Există şi o altă soluţie geometrică simplă, descoperită de mai mulţi concurenţi.

Altă soluţie a problemei 3 (SU3, vezi 10.2). Vom construi un punct P fix aşa ca $\Delta PCN = \Delta PDM$, şi deci $PN = PM$, unde (vezi fig. 159) C şi D sînt centrele celor două cercuri, ca urmare a relaţiilor $CN = DP$, $CP = DM$, $\sphericalangle PCN = \sphericalangle PDM$. Primele două se transcriu $CA = DP$, $CP = DA$ şi sînt două puncte ce le satisfac, ambele fixe, unul din acestea fiind simetricul P al lui A faţă de mediatoarea lui CD. Avèm $\sphericalangle PCN = \sphericalangle PCA + \sphericalangle ACN$, $\sphericalangle PDM = \sphericalangle PDA + \sphericalangle ADM$; $\sphericalangle ACN = \sphericalangle ADM$ conform ipotezei, iar $\sphericalangle PDA = \sphericalangle PCA$ ca urmare a simetriei faţă de mediatoarea lui CD.

Observaţie. Dacă în enunţ am cere ca M şi N să se mişte în sensuri contrare (pe fig. 159 punctul N a fost lăsat acelaşi, iar M' reprezintă noua poziţie a lui M), afirmaţia din enunţ ar rămîne adevărată, însă relativ la celălalt punct P' pentru care

$CA = DP'$, $CP' = DA$, care este simetricul lui A față de mijlocul lui CD. Într-adevăr, avem $\sphericalangle\, P'CN = \sphericalangle\, P'CA + \sphericalangle\, ACN$, $\sphericalangle\, P'DM' = \sphericalangle\, P'DA + \sphericalangle\, ADM'$, $\sphericalangle\, ACN = \sphericalangle\, ADM'$ ca urmare a noii ipoteze și $\sphericalangle\, P'CA = \sphericalangle\, P'DA$ pe baza simetriei față de mijlocul lui CD.

Fig. 158

Fig. 159

Și soluția analitică din 10.4 a acestei probleme poate fi adaptată pentru cazul descris aici. Dar cele mai mari șanse de a descoperi faptul menționat le oferă soluția ce tocmai a fost prezentată.

Soluție a problemei 5 (IL2, vezi 10.2). Din relațiile din enunț rezultă $(\Sigma k^3 x_k)^2 = (\Sigma k x_k)(\Sigma k^5 x_k)$. Inegalitatea lui Schwartz aplicată șirurilor $(\sqrt{k x_k})_{k=1,\ldots,5}$ și $(\sqrt{k^5 x_k})_{k=1,\ldots,5}$ conduce la $(\Sigma k^3 x_k)^2 \leqslant (\Sigma k x_k)(\Sigma k^5 x_k)$. Se știe că în inegalitatea lui Schwartz are loc egalitate dacă și numai dacă șirurile sînt proporționale. Pentru $x_k \neq 0$ avem $\sqrt{k^5 x_k}/\sqrt{k x_k} = k^2$ și aceste valori sînt distincte, deci proporționalitatea este echivalentă cu $x_k = 0$ pentru $k \neq m$ pentru un anumit m. În această situație relațiile din enunț se scriu $m x_m = a$, $m^3 x_m = a^2$, $m^5 x_m = a^3$ și ele sînt satisfăcute de $a = m^2$ și $x_m = m$. Deci valorile posibile pentru a sînt $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2$.

Soluția prezentată poate fi transformată într-una elementară înglobînd în ea demonstrația inegalității lui Schwartz, cu precizarea relativă la egalitate. Anume, fie $F(y) = \sum_{k=1}^{5} k x_k (y - k^2)^2$; aceasta este egală, conform relațiilor din enunț, cu $(\Sigma k x_k) y^2 - 2(\Sigma k^3 x_k) y + \Sigma k^5 x_k = a y^2 - 2a^2 y + a^3 = a(y - a)^2$ și deci $F(a) = 0$. Ultima egalitate este echivalentă, conform definiției lui F, cu : $a \neq k^2$ implică $x_k = 0$.

Primul tabel de rezultate ale Olimpiadei a 21-a (vezi 6.5) a arătat ca în fig. 160.

a	Problemă	*1*(DE1)	*2*(BG3)	*3*(SU3)	*4*(US6)	*5*(IL2)	*6*(DE4)
b	Punctaj	6	7	7	6	7	7
c	Punctaj total obținut de concurenți	274	512	632	722	495	646
	c/*b*	45	73	90	120	70	92

Fig. 160

Nu a fost nevoie să se aștepte anunțarea rezultatelor Olimpiadei pentru ca între delegați să apară controverse în legătură cu dificultatea problemei *1* (DE1, vezi enunțul în 10.2 și o soluție în 10.7). Părerea că această problemă este simplă, care a condus la a i se atribui 6 puncte față de altele cu 7 puncte, a apărut ca urmare a soluției autorilor. Această soluție consta în (vezi și soluția din 10.7) a arăta prin inducție că $T_n = 0$ și apoi a scrie $S_{1319} = S_{1318} + (1/1319) =$

$$= (1/660) + (1/661) + \ldots + (1/1318) + (1/1319) = \left(\frac{1}{660} + \frac{1}{1319}\right) + \left(\frac{1}{661} + \frac{1}{1318}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{989} + \frac{1}{990}\right) = \frac{1979}{660 \cdot 1319} + \frac{1979}{661 \cdot 1318} + \ldots + \frac{1979}{989 \cdot 990} \text{ etc.}$$

Demonstrația egalității $T_n = 0$ prin inducție apare ca problemă în multe cărți elementare (de exemplu în [4], dată și la un concurs de admitere în U.R.S.S., în învățămîntul superior). Dar aceasta nu înseamnă că acea egalitate face parte din arsenalul uzual. Tabelul precedent (adică realitatea), rezolvarea acestei probleme de șefii de delegații și afirmația unuia din premianții 1 că un sfert de oră a lipsit ca el să rateze această problemă au arătat că aceasta nu a fost simplă.

Al doilea tabel de rezultate al acestei Olimpiade (vezi 6.6), avînd 166 concurenți, este dat în fig. 161.

$\frac{40}{4}$ (4)	$\frac{39}{3}$ (7)	$\frac{38}{-}$	$\frac{37}{1}$ (8)	$\frac{36}{2}$ (10)	$\frac{35}{4}$ (14)	$\frac{34}{7}$ (21)	$\frac{33}{6}$ (27)	$\frac{32}{4}$ (31)	$\frac{31}{1}$ (32)	$\frac{30}{2}$ (34)
$\frac{29}{6}$ (40)	$\frac{28}{3}$ (43)	$\frac{27}{4}$ (47)	$\frac{26}{3}$ (50)	$\frac{25}{1}$ (51)	$\frac{24}{5}$ (56)	$\frac{23}{9}$ (65)	$\frac{22}{5}$ (70)	$\frac{21}{6}$ (76)	$\frac{20}{6}$ (82)	$\frac{19}{7}$ (89)
$\frac{18}{3}$	$\frac{17}{8}$	$\frac{16}{6}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{14}{4}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{12}{3}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{8}{2}$
$\frac{7}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{-}$			

Fig. 161

Coloanele barieră între premii trebuiau să aproximeze numerele 13—14, 41—42, 83 (vezi 6.6, 7.6). S-a votat ca ele să fie 8, 40 şi 82 (numere ce figurează în tabel între paranteze), deci să se atribuie 8 premii 1 cu punctaje 37—40, 32 premii 2 cu punctaje 29—36 şi 42 premii 3 cu punctaje 20—28. Din nou ideea prezentă la Olimpiada a 20-a, de a nu coborî prea mult bariera premiului 1 (vezi 9.4), a fost pusă în aplicare.

Statistica premiilor 1 de la 9.4, completată cu cele de la Olimpiadele 20 şi 21, cuprinde acum 15 ţări care obţinuseră premii 1 la Olimpiadele 15—21. Numărul total al acestor premii era 58: o ţară obţinuse 13, o ţară 8, o ţară 7, o ţară 5, două ţări cîte 4, două ţări cîte 3, patru ţări cîte 2 şi trei ţări cîte unul.

10.11. Rezultate ale delegaţiei României

La Olimpiada a 21-a ţara noastră a obţinut locul 2 în clasamentul neoficial pe ţări, rezultat apreciat drept cel mai valoros din toate cele obţinute pînă atunci. Este adevărat că la Olimpiada a 20-a obţinuse locul 1 în acest clasament, dar la acea Olimpiadă lipsiseră trei dintre delegaţiile „puternice".

Şefului delegaţiei noastre i s-a luat un interviu din partea unui reprezentant al Radio-Televiziunii engleze, în legătură cu Olimpiada. La întrebarea „Sînteţi mulţumit de rezultatele obţinute de concurenţii ţării dv. la această Olimpiadă?", răspunsul dat, necunoscînd acel clasament, a fost „Nu prea!" De ce? Delegaţia noastră era încă sub impresia unor greşeli neaşteptate, copilăreşti, ca urmare a cărora s-au pierdut poate chiar 20 puncte. Un concurent a înţeles greşit enunţul problemei *2* (BG3, vezi 10.2 şi soluţia din 10.5), colorînd toate cele 45 segmente, obţinînd 0 puncte în loc de 7 puncte ale problemei; în rest a rezolvat totul perfect. Alt concurent a pierdut 5 puncte ca urmare a figurii greşite la problema *3* (SU3, vezi 10.2 şi soluţia întîi din 10.10), plasînd mijlocul lui MN eronat etc. Alt concurent a pierdut 5 puncte la problema *5* (IL2, vezi 10.2 şi soluţia din 10.10), scriind greşit inegalitatea lui Schwartz. Şi la problema *4* s-au pierdut 3 puncte uitînd (US6, vezi enunţul în 10.2 şi soluţia din 10.4) cazul $PQ \perp p$ sau, într-o soluţie în care se studia variaţia unei funcţii, greşind la derivare!

Dar, după ce oboseala unei corectări şi unei coordonări, la care, fiind multe soluţii bune în lucrările delegaţiei noastre, a fost şi mult de lucru, a trecut, s-a impus altă concluzie, aceea că este preferabil de avut concurenţi cu multe idei, cu multă forţă de rezolvitori, care poate mai şi greşesc, decît concurenţi fără reacţie în faţa unor proble-

me, dar care nu greșesc. O experiență asemănătoare a existat și în legătură cu problema *3* (NL4, vezi 6.2 și soluția în 6.3), la Olimpiada a 18-a. În plus, chiar cele 20 puncte nu ar fi adus delegația noastră pe locul 1.

În urma Olimpiadei a 21-a se pot adăuga pe lista de la 2.4 concurenții români Victor Nistor (premiul 1 la Olimpiadele 20 și 21) și Bogdan Călin Enescu (premiul 1 la Olimpiada 20 și premiul 3 la Olimpiadele 19 și 21).

Este interesant de continuat și statistica, începută la 2.8, a numărului de concurenți români la Olimpiada Internațională de Matematică ce au urmat Facultatea de Matematică din numărul total al celor ce n-au mai participat în anii următori la Olimpiadă. Aceasta arată astfel : 5 din 7 în 1974, 2 din 5 în 1975, 3 din 7 în 1976, 1 din 3 în 1977, 3 din 3 în 1978, 7 din 8 în 1979 și, pentru a nu mai reveni la problema aceasta, 0 din 2 în 1981 și 3 din 3 în 1982. Cei ce nu au urmat Facultatea de Matematică au urmat Institutul Politehnic, cu excepția unuia — Institutul de Medicină.

Comitetul de organizare a Olimpiadei a 21-a a prezentat o listă cu toți concurenții englezi la toate Olimpiadele, ce cuprindea și locurile lor de activitate în momentul respectiv, locuri mult mai diverse decît cele ce corespund listei precedente, printre care figura și poliția, pe lîngă, evident, multe legate de matematică.

10.12. Probleme privind organizarea Olimpiadei

Cea mai deosebită problemă în fața căreia s-a aflat juriul Olimpiadei a 21-a, din 1979, a fost faptul că în 1980 nu urma să se organizeze Olimpiada Internațională de Matematică.

Ținînd seama de multiplele propuneri de a organiza această Olimpiadă, din partea unor țări ce nu figurau pe lista de 8 de la 2.5, în 1977 s-a decis ca regula de la 2.5, 2.1 să nu mai fie obligatorie, țara organizatoare a Olimpiadei urmînd să fie hotărîtă de la an la an, avînd în vedere ofertele existente. Țara noastră nu a uzat de această „libertate" și a organizat, în 1978, conform vechii reguli, Olimpiada Internațională. Anglia avusese în vedere să organizeze în viitorul apropiat această Olimpiadă ; văzînd, în 1978, la București, că nu există altă propunere, delegația Angliei a aranjat telefonic organizarea Olimpiadei în 1979 în țara sa. Și delegația S.U.A. anunțase în 1978 intenția de a organiza Olimpiada într-un viitor apropiat, decizînd aceasta pentru 1981, dar nu a fost în situația de a lua, în 1979, aceeași inițiativă ca delegația Angliei cu un an în urmă, deoarece aceasta ar fi putut compromite alte acțiuni ale Societății

Matematice din S.U.A. prevăzute pentru 1980. Şi nici o altă ţară din cele doritoare nu a reuşit să se mobilizeze pentru a organiza Olimpiada în 1980.

Nimeni nu era vinovat. Delegaţia noastră a regretat, între altele, faptul că a pierdut posibilitatea de a avea şi ea un triplu cîştigător al premiului 1 prin Victor Nistor, care urma să termine liceul în 1980; aceleaşi regrete existau şi din partea delegaţiei Cehoslovaciei pentru Jan Nekovář (vezi 9.4), ca şi din partea tuturor.

Pentru a nu reveni la această problemă, să menţionăm că la Olimpiada a 23-a, în 1982, ultima ce o descriem, propunerile de organizare a Olimpiadei Internaţionale de Matematică în următorii ani ce apăruseră au fost suficiente pentru a crea convingerea că această Olimpiadă va avea loc an de an, cel puţin pînă în 1988. Era, evident, de dorit să se ajungă la o regulă precisă cum a fost cea din 2.5, dar decizia în acest sens depăşea competenţa juriului; fuseseră contactate organisme matematice internaţionale etc.

Discuţiile prelungite ce au avut loc în juriul Olimpiadei a 21-a în legătură cu viitorul Olimpiadei au vizat însă aspecte mai concrete. Numărul tot mai mare de delegaţii prezente punea probleme tot mai dificile organizatorilor unei Olimpiade. Experienţa Olimpiadei a 21-a, la care vom mai reveni, a arătat că există resurse pentru a evita prelungirea duratei coordonării. De asemenea, juriul a acceptat posibilitatea organizării unor Olimpiade la care fiecare ţară să trimită nu opt, ci maximum şase sau chiar patru concurenţi.

S-a considerat însă că este de dorit ca modul de desfăşurare a Olimpiadelor (numărul de probleme, numărul de zile de concurs etc.) să fie stabil, pentru ca fiecare delegaţie să-şi poată compara rezultatele obţinute în ani diferiţi.

La Olimpiada a 21-a s-a făcut un mare pas înainte în ceea ce priveşte concepţia asupra domeniilor de matematică ce corespund acestei manifestări, delegaţiile mai de curînd înscrise în Olimpiadă aducîndu-şi un aport important. S-a renunţat la răspunsul standard, după care aceste domenii rezultă examinînd problemele date la Olimpiadele trecute. Progresul s-a realizat nu prin propuneri generale, ci prin discuţii pe marginea problemelor „cu asterisc" (vezi 10.2 şi soluţiile lor în 10.3) şi mai cu seamă relative la problema BG1 (vezi 10.2 şi soluţia în 10.8), deci comitetul de organizare pregătise deja aceste discuţii. Concluzia a fost să se recomande ca la Olimpiadele următoare concurenţii să fie pregătiţi să rezolve şi probleme privind numerele complexe şi probabilităţile, la un nivel, evident, elementar (vezi şi 7.1). Deşi nici la următoarele două Olimpiade, după cum se va vedea, asemenea probleme nu au ajuns pe listele de concurs, ele au apărut printre problemele propuse juriului, în special la Olimpiada a 22-a.

11

A 22-A OLIMPIADĂ INTERNAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ (Washington D.C., Fredericksburg, S.U.A., 1981)

11.1. Organizare

La această Olimpiadă au participat 27 țări: toate cele ce participaseră la Olimpiada a 21-a, mai puțin DD și VN și, în plus, pentru prima dată, AU, CA, CO, MX, TN și VE.

Între Fredericksburg și Washington D.C. sînt numai circa 85 km.

11.2. Problemele propuse juriului

1-BE. a) *Pentru ce valori* $n > 2$ *există o mulțime de* n *numere întregi, strict pozitive, consecutive, astfel încît cel mai mare număr din acea mulțime să fie un divizor al celui mai mic multiplu comun al celorlalte* $n-1$ *numere?*

b) *Pentru ce valori* $n > 2$ *există exact o mulțime cu proprietatea enunțată?*

2-BG. *O sferă este tangentă la laturile* AB, BC, CD, DA *ale unui tetraedru în punctele* E, F, G, H *respectiv, aceste puncte fiind vîrfurile unui pătrat. Să se demonstreze că dacă, în plus, sfera este tangentă și la* AC, *atunci ea este tangentă și la* BD.

3-CA. *Să se afle minimul lui* $\max(a+b+c, b+c+d, c+d+e, d+e+f, e+f+g)$ *cînd* a, b, c, d, e, f, g *parcurg toate sistemele de numere reale nenegative cu* $a+b+c+d+e+f+g=1$.

4-CA. *Fie* f_n, $n = 1, 2, \ldots$, *şirul Fibonacci* $1, 1, 2, 3, 5, \ldots$

a) *Să se determine toate perechile* (a, b) *de numere reale astfel încît, pentru orice* n, *numărul* $af_n + bf_{n+1}$ *să fie un termen al şirului.*

b) *Să se determine toate perechile* (u, v) *de numere reale pozitive astfel încît, pentru orice* n, *numărul* $uf_n^2 + vf_{n+1}^2$ *să fie un termen al şirului.*

5-CO. *Un cub este format din 27 cuburi congruente. Feţele exterioare ale cubului mare sînt vopsite în negru, celelalte feţe ale cuburilor mici sînt albe. Cubul mare se descompune în cele 27 cuburi mici şi apoi se recompune la întîmplare. Care este probabilitatea ca el să fie complet negru la exterior şi după recompunere?*

6-CU. *Pentru orice polinom* P *de o variabilă, cu coeficienţi complecşi, şi pentru orice număr complex* a, *se notează cu* P_a *mulţimea tuturor numerelor complexe* z *pentru care* $P(z) = a$. *Să se demonstreze că dacă* P *şi* Q *sînt două polinoame neconstante pentru care* $P_0 = Q_0$ *şi* $P_1 = Q_1$, *atunci* $P = Q$.

7-FI. *Funcţia* $f(x, y)$ *satisface condiţiile:*

1) $f(0, y) = y + 1$, 2) $f(x + 1, 0) = f(x, 1)$,

3) $f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y))$

pentru toţi x, y *întregi nenegativi. Să se determine* $f(4, 1981)$.

8-DE. *Fie* $1 \leqslant r \leqslant n$. *Se consideră toate submulţimile, compuse din* r *elemente, ale mulţimii* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *şi se consideră, pentru fiecare din aceste submulţimi, elementul său minimal. Fie* $f(n, r)$ *media aritmetică a tuturor numerelor astfel obţinute. Să se demonstreze că* $f(n, r) = (n + 1)/(r + 1)$.

9-DE. *Se defineşte, prin recurenţă, şirul* (a_n): $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (1 + 4a_n + \sqrt{1 + 24a_n})/16$. *Să se determine o expresie explicită pentru* a_n.

10-FR. *Să se determine cel mai mic număr natural* n *astfel încît, pentru orice întreg* $p \geqslant n$, *să se poată împărţi un pătrat în* p *pătrate, ale căror laturi să nu aibă neapărat aceeaşi lungime.*

11-NL. *Pe un semicerc de rază 1 se consideră patru coarde* AB, BC, CD *şi* DE, *de lungimi* a, b, c *şi* d *respectiv, astfel încît arcele corespunzătoare să nu aibă puncte comune. Să se demonstreze că* $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + abc + bcd < 4$.

12-NL. *Să se determine valoarea maximă a lui* $m^2 + n^2$, *în care* m *şi* n *sînt întregi cuprinşi între 1 şi 1981 ce satisfac* $(n^2 - mn - m^2)^2 = 1$.

13-RO. *Fie* P *un polinom de grad* n *pentru care* $P(k) = (C_{n+1}^k)^{-1}$, *pentru* $k = 0, 1, \ldots, n$. *Să se determine* $P(n + 1)$.

14-RO. *Se consideră un pentagon convex ABCDE în care* $AB = BC = CD = DE = EA$ *şi* $\sphericalangle A \geq \sphericalangle B \geq \sphericalangle C \geq \sphericalangle D \geq \sphericalangle E$. *Să se demonstreze că acest poligon este regulat.*

15-GB. *Fie P un punct în interiorul unui triunghi dat ABC. Fie D, E, F picioarele perpendicularelor din P pe dreptele BC, CA, AB respectiv. Să se determine toţi P pentru care* $(BC/PD) + (CA/PE) + (AB/PF)$ *este minimă.*

16-GB. *Se consideră un şir* (u_n) *definit prin recurenţă,* $u_{n+1} = (64u_n + 15)^{1/3}/4$. *Să se stabilească modul de comportare al acestui şir pentru* $n \to \infty$.

17-SU. *Trei cercuri congruente au un punct comun O şi sînt situate în interiorul unui triunghi dat. Fiecare cerc este tangent la două din laturile triunghiului. Să se demonstreze că punctul O şi centrele cercurilor înscris şi circumscris triunghiului sînt coliniare.*

18-SU. *Se consideră un număr finit de planete sferice, toate avînd aceeaşi rază, şi care nu se intersectează două cîte două. Pe suprafaţa fiecăreia din ele se consideră mulţimea tuturor punctelor ce nu sînt vizibile din nici un punct situat pe suprafaţa alteia din planete. Să se demonstreze că suma ariilor acestor mulţimi este egală cu aria uneia din acele planete.*

19-YU. *Se consideră în plan un număr finit de cercuri de rază 1 şi se notează cu S aria reuniunii lor. Să se demonstreze că se pot alege un număr de cercuri disjuncte dintre aceste cercuri astfel încît suma ariilor lor să fie mai mare ca* $(2/9)S$.

11.3. Soluţiile a cinci dintre problemele de geometrie plană

Soluţia problemei 10-FR (vezi 11.2). Figura 162 stînga arată că o împărţire ca în enunţ este posibilă pentru orice p par, $p \geq 4$. Înlocuind unul din pătratele unei descompuneri cu cele patru pătrate din fig. 162 dreapta, rezultă că o astfel de descompunere este posibilă pentru $p + 3$, dacă aceasta este posibilă pentru p. Cu alte cuvinte, asemenea descompuneri există pentru orice $p \geq 6$.

Vom arăta acum că $n = 6$, deci că un pătrat nu se poate descompune în cinci pătrate. Într-adevăr, patru dintre ele vor trebui să pătrundă în colţuri. Dacă două din aceste patru pătrate, ce cores-

pund la două colțuri vecine ale pătratului mare, nu se ating pe latura ce unește cele două colțuri, atunci al cincilea pătrat va trebui să atingă acea latură, între cele două pătrate considerate, deci acesta nu va putea atinge altă latură. Rezultă că, pe trei din cele patru laturi ale pătratului mare, pătratele ce intră în colțuri se ating.





Fig. 162

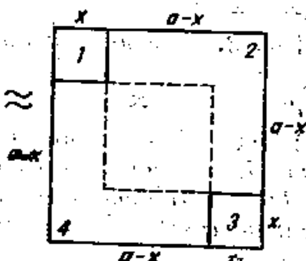


Fig. 163

Dacă latura pătratului mare este a și latura unuia din pătratele din colțuri ce nu se atinge, eventual, pe una din laturile pătratului mare ce pleacă din colțul respectiv, cu alt pătrat ce intră în colț, este x, atunci laturile celorlalte trei pătrate din colțuri rezultă egale, în celălalt sens de parcurs, respectiv cu $a - x$, x, $a - x$, obținîndu-se situația din fig. 163, care arată că al cincilea pătrat nu mai are loc.

Evident că fig. 162 trebuia inventată.

Soluția problemei 11-NL (vezi 11.2). În fig. 164 avem $\sphericalangle ACE \geqslant 90°$, deci $4 \geqslant AE^2 \geqslant AC^2 + CE^2$. Teorema cosinusului în triunghiurile ABC, CDE conduce la $4 \geqslant a^2 + b^2 - 2ab\cos B + c^2 + d^2 - 2cd\cos D$. Unghiurile din D și B sînt obtuze, deci $\cos B$, $\cos D < 0$. Rămîne de dovedit că $-2\cos B > c$; va rezulta și $-2\cos D > b$, ca urmare a aplicării primei concluzii după o schimbare evidentă de notație. În fig. 164 avem $\sphericalangle B = 90° + (\text{arc}MA + \text{arc}ON)/2 > 90° + (x/2)$; inegalitatea fiind strictă ca urmare a faptului că DE este coardă, deci arc$DE > 0$.

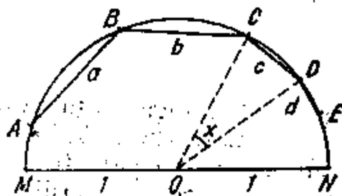


Fig. 164

Rezultă $-2\cos B > -2\cos(90° + x/2) = 2\sin(x/2) = c$.

Soluția problemei 14-RO (vezi 11.2). Triunghiurile isoscele ABC și AED (fig. 165 stînga), în care $\sphericalangle B \geqslant \sphericalangle E$, conduc la $AC \geqslant AD$ și

la $\sphericalangle C_1 \leqslant \sphericalangle D_1$. Ultima, împreună cu $\sphericalangle C \geqslant \sphericalangle D$, implică $\sphericalangle C_2 \geqslant \sphericalangle D_2$, deci, în triunghiul ACD, $AC < AD$. Comparînd cu prima concluzie, obținem $AC = AD$, deci $\sphericalangle B = \sphericalangle E$, ceea ce, împreună cu inegalitățile din enunț, atrage după sine $\sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = \sphericalangle E$.

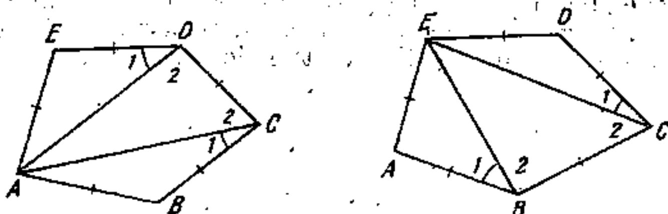


Fig. 165

Analog, în fig. 165 dreapta, avem $\sphericalangle A \geqslant \sphericalangle D$, deci $BE \geqslant CE$ și $\sphericalangle B_1 < \sphericalangle C_1$, ceea ce, împreună cu $\sphericalangle B \geqslant \sphericalangle C$, implică $\sphericalangle B_2 \geqslant \sphericalangle C_2$, deci $BE < CE$. Rezultă $BE = CE$, deci $\sphericalangle A = \sphericalangle D$ și concluzia este dovedită.

Soluția problemei 15-GB (vezi 11.2). S fiind aria triunghiului avem $2S = BC \cdot PD + CA \cdot PE + AB \cdot PF$ (fig. 166). Inegalitatea lui Schwartz arată că $\left(\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}\right) \times$ $\times (BC \cdot PD + CA \cdot PE + AB \cdot PF) \geqslant$ $\geqslant (\sqrt{BC/PD}\sqrt{BC \cdot PD} + \sqrt{CA/PE}\sqrt{CA \cdot PE} +$ $+ \sqrt{AB/PF}\sqrt{AB \cdot PF})^2 = (BC + CA + AB)^2$, egalitatea avînd loc atunci și numai atunci cînd $BC \cdot PD / (BC / PD) = CA \cdot PE /$ $/(CA/PE) = AB \cdot PF/(AB / PF)$, ceea ce este echivalent cu $PD = PE = PF$. Deci $(BC / PD) + (CA / PE) + (AB / PF) \geqslant$ $\geqslant (BC + CA + AB)^2/(2S)$, oricare ar fi P în interiorul triunghiului, egalitatea avînd loc pentru un singur P, anume pentru centrul cercului înscris în triunghi.

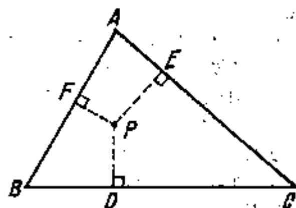


Fig. 166

La fel ca la soluția problemei IL2 din 10.10, putem evita apelarea la inegalitatea lui Schwartz și la precizarea în legătură cu situația de egalitate, considerînd $H(x) = (BC/PD)(x - PD)^2 + (CA/PE) \times$ $\times (x - PE)^2 + (AB/PF)(x - PF)^2$, relativ la care avem $H(x) \geqslant 0$ pentru orice x, $H(x) = 0$ numai în situația $x = PD = PE = PF$,

posibilă numai cînd P este centrul cercului înscris în triunghi, scriind discriminantul trinomului $H(x)$ de gradul 2 etc.

În ce măsură este însă aceasta o problemă de geometrie?

Soluția problemei 17-SU (vezi 11.2). Printr-un punct din interiorul unui unghi trec două cercuri tangente la laturile unghiului, de raze inegale (fig. 167). Deci printre cele trei cercuri din enunț nu există două tangente la aceeași pereche de laturi ale triunghiului și situația lor este cea din fig. 168, centrele lor fiind D, E, F.

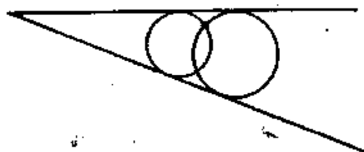


Fig. 167

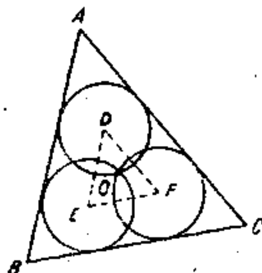


Fig. 168

Ca urmare a egalității razelor, avem $DE \parallel AB$, $EF \parallel BC$ și $FD \parallel CA$, deci triunghiurile ABC și DEF se obțin unul din celălalt printr-o omotetie, al cărei centru este punctul comun dreptelor AD, BE, CF, care este centrul I al cercului înscris în triunghiul ABC, deoarece AD, BE și CF sînt bisectoarele unghiurilor acestui triunghi.

Acum să observăm că O este centrul cercului circumscris triunghiului DEF, ca urmare a egalității razelor celor trei cercuri din enunț. În omotetia considerată, de centru I, punctul O va corespunde centrului cercului circumscris lui ABC, deci I, O și acel centru vor fi coliniare.

11.4. Cea mai dificilă problemă din listă

Așa a apărut problema 19-YU, a șasea problemă de geometrie plană.

Soluția problemei 19-YU (vezi 11.2). Fie C_i cercurile din enunț, considerate, evident, ca „discuri" pline. Fie $C = \bigcup_i C_i$.

Ideea ce conduce la soluţie este de a împărţi planul în hexagoane regulate H_j, aşa încît distanţa dintre centrele a două astfel de hexagoane alăturate să fie „ceva mai mare decît 4", deci $4 + 2a$, cu $a > 0$ (vezi fig. 169). Fie H unul din hexagoane, T_j translaţia ce

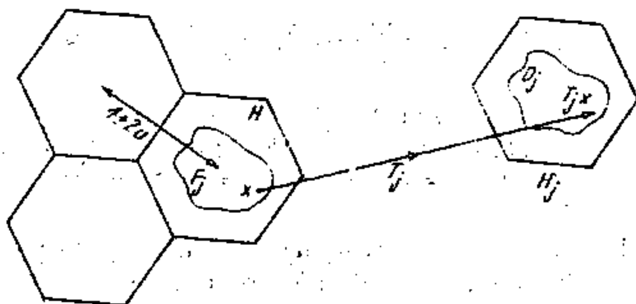


Fig. 169

suprapune H peste H_j, deci $T_j(H) = H_j$. Două puncte de fo
şi $T_j(x)$ sînt depărtate între ele cu cel puţin $4 + 2a > 4$. Deci două cercuri C_i şi C_k ce conţin respectiv punctele x şi $T_j(x)$ vor fi disjuncte, deoarece dacă ar avea un punct comun y, ar rezulta $\text{dist}(x, T_j(x)) \leq \text{dist}(x, y) + \text{dist}(y, T_j(x)) \leq 2 + 2 = 4$, diametrele celor două cercuri fiind ambele egale cu 2.

Vom căuta deci să alegem cercurile din problemă astfel. Alegem un $x \in H$ şi, pentru fiecare j pentru care aceasta este posibil, alegem cîte un cerc C_{i_j} din familia considerată, care să conţină $T_j(x)$. Conform raţionamentului precedent, cercurile C_{i_j} astfel obţinute vor fi disjuncte.

Dacă însă alegem x oarecare, se poate întîmpla să obţinem puţine cercuri C_{i_j}, poate chiar nici unul, şi deci nu putem afirma că suma ariilor lor ar depăşi $(2/9)$ aria C. De aceea vom alege $x \in H$ aşa încît să obţinem un număr maxim posibil de cercuri C_{i_j}, deci astfel ca $n(x) = \text{card}\,\{j \mid \text{există } i \text{ cu } T_j(x) \in C_i\}$ să fie maxim posibil.

Suma ariilor cercurilor C_{i_j} fiind de $n(x)$ ori aria unui cerc de rază 1, rămîne să obţinem o inegalitate care să minoreze valoarea maximă $n = \max\limits_{x \in H} n(x)$ a lui $n(x)$.

Cu acest scop, fie $D_j = C \cap H_j$ şi $F_j = T_j^{-1}(D_j)$. Figurile F_j sînt conţinute în H şi au în general părţi comune. Fie $G_k = \{x \mid x \in H,$

$\text{card}\,\{j \mid x \in F_j\} = k\}$, adică mulţimea acelor x ce aparţin la exact k din figurile F_j; pentru $x \in G_k$ avem $n(x) = k$.

Descompunînd fiecare F_j în $F_j \cap G_k$, cu $k = 1, \ldots, n$, se ajunge la relaţia $\sum_j \text{aria } F_j = \sum_{k=1}^{n} k \text{ aria } G_k$. Deci

$$\text{aria } C = \sum_j \text{aria } D_j = \sum_j \text{aria } F_j = \sum_{k=1}^{n} k \text{ aria } G_k \leqslant n \text{ aria } H.$$

Cum H este un hexagon regulat de apotemă $2 + a$, aria $H = 6 \cdot (1/2)(2 + a)(2 + a) \cdot 2/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\,(2 + a)^2$ şi rezultă, dacă alegem $x \in H$ cu $n(x) = n$, aria $\bigcup C_{i_j} = n\pi \geqslant \pi$ aria C/aria $H = \pi S/(2\sqrt{3}\,(2 + a)^2)$.

Alegînd a suficient de mic, numărul ce înmulţeşte pe S poate fi făcut să fie oricît de aproape de $\pi/(8\sqrt{3})$, însă mai mic decît acesta. Rămîne de observat că pătratul ultimului număr este mai mare decît pătratul lui 2/9, inegalitate ce revine la $\pi^2 > 256/27 = 9{,}4\ldots$ şi este adevărată ca urmare a faptului că $\pi > 3{,}1$, deci $\pi^2 > 9{,}61$.

Observaţie. Dacă, în loc de hexagoane, se împărţea planul în pătrate, numărul $8\sqrt{3}$, care reprezintă aria unui hexagon regulat de apotemă 2, se înlocuia cu aria pătratului de apotemă 2, adică 16 şi $\pi^2/16^2 > 4/81$ revenea la $\pi^2 > 1024/81 = 12, \ldots$, ceea ce nu este adevărat, deoarece $\pi < 3{,}2$ şi $\pi^2 < 10{,}24$. Deci printr-o astfel de împărţire nu se ajungea la rezultatul dorit.

Problema 19-YU apare mai dificilă în următoarea situaţie. În timpul pregătirii lotului ţării noastre pentru Olimpiada a 22-a, s-a rezolvat următoarea, dată la Olimpiada din Ucraina, la clasa a 10-a, în anul 1974 (vezi [10])

Problemă. *Se consideră în plan un număr finit de cercuri (de raze oarecare) şi se notează cu S aria reuniunii lor. Să se demonstreze că se pot alege un număr de cercuri disjuncte dintre aceste cercuri astfel încît suma ariilor lor să fie cel puţin* (1/9)S.

Enunţ foarte asemănător cu 19-YU, dar soluţie foarte diferită. Anume, fie C_i cercurile, de raze respectiv r_i şi centre O_i, cu $i = 1, 2, \ldots, n$, şi să presupunem că $r_1 \geqslant r_2 \geqslant \ldots \geqslant r_n$. Fie C_i' cercul de rază $3r_i$ şi centru O_i. Să alegem $i_1 = 1$, şi, dacă $i_1, \ldots, i_k$ au fost deja aleşi, i_{k+1} egal cu cel mai mic $i > i_k$ pentru care C_i nu este conţinut în nici unul din cercurile $C_{i_1}', \ldots C_{i_k}'$. Prin aceasta avem $C_{i_1}' \cup \ldots \cup C_{i_k}' \supset C_1 \cup \ldots \cup C_m$ pentru $i_k \leqslant m < i_{k+1}$ (inducţie faţă de m). La un anumit indice k procesul se va opri, i_{k+1} nemaiexistînd, şi vom avea $C_{i_1}' \cup \ldots \cup C_{i_k}' \supset C_1 \cup \ldots \cup C_n$. Evident $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$.

Rezultă $S =$ aria $(C_1 \cup \ldots \cup C_n) \leqslant$ aria $(C'_{i_1} \cup \ldots \cup C'_{i_k}) \leqslant$ $\leqslant \sum_{s=1}^{k}$ aria $C'_{i_s} = 9$(aria $C_{i_1} + \ldots +$ aria C_{i_k}), aria $C_{i_1} + \ldots +$ aria $C_{i_k} \geqslant$ $\geqslant (1/9)S$. Cercurile C_{i_s}, $s = 1, \ldots, k$, sînt disjuncte, deoarece, dacă $x \in C_{i_s} \cap C_{i_t}$ cu $s < t$, am avea, pentru orice $y \in C_{i_t}$, $\text{dist}(O_{i_s}, y) \leqslant$ $\leqslant \text{dist}(O_{i_s}, x) + \text{dist}(x, O_{i_t}) + \text{dist}(O_{i_t}, y) \leqslant r_{i_s} + 2r_{i_t} \leqslant 3r_{i_s}$, deci $C_{i_t} \subset C'_{i_s}$, contrar modului în care s-au ales indicii $i_1, \ldots, i_k$.

Un rezolvitor ce ar avea în minte această problemă şi soluţia ei, abordînd problema 19-YU, ar trebui să consume un timp pentru a se convinge că metoda acestei soluţii nu conduce, în situaţia din 19-YU, la rezultatul dorit.

Iată cum, în unele cazuri, un concurent „prea învăţat" poate fi în dezavantaj.

11.5. Cele două probleme de geometrie în spaţiu

Soluţia problemei 2-BG (vezi 11.2). a) Metoda de demonstraţie este următoarea: se va arăta că sfera din enunţ intersectează una din feţele tetraedrului ce conţin BD, de exemplu ABD, după un cerc (Q) tangent la BD.

Se ştie deja că sfera este tangentă la AB şi AD, deci cercul de intersecţie (Q) considerat va fi tangent la AD şi AB. Cu alte cuvinte, va trebui să demonstrăm că (Q) este cercul înscris în triunghiul ABD.

Faptul că (Q) este un cerc din planul ABD tangent în H la AD şi în E la AB determină complet pe (Q): centrul unui astfel de cerc este la intersecţia perpendicularei în H pe AD cu perpendiculara în E pe AB etc.

Deci va trebui dovedit că punctele de contact ale cercului (R), înscris în triunghiul ABD, cu laturile AD şi AB sînt tocmai H şi E. Cu acest scop să observăm că în fig. 170 avem $YZ = YU + UZ = YW + ZV$ şi $XV = XW$. Reciproc, dacă V' şi W' sînt puncte respectiv pe laturile XZ, XY, aşa încît $XV' = XW'$ şi $YW' + ZV' = YZ$, atunci acestea vor coincide cu V, respectiv W. Într-adevăr, în caz contrar, prima condiţie arată că V', W' au una din poziţiile V_1, W_1 sau V_2, W_2, din fig. 170, deci sau $YW' + ZV' < YW + ZV = YZ$ sau $YW' + ZV' > YW + ZV = YZ$.

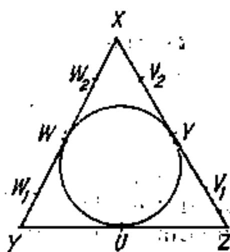


Fig. 170

Va fi deci suficient de dovedit că $BD = BE + DH$.

b) Să obţinem acum consecinţe ale ipotezelor problemei. Să examinăm poziţia relativă a planelor (vezi fig. 171) ABD, $EFGH$ şi CDB. Două cîte două, acestea se intersectează după dreptele EH,

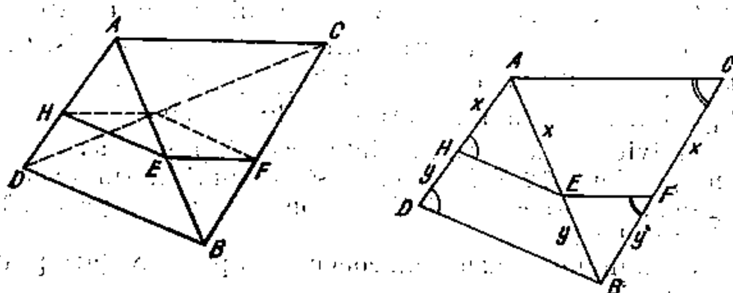


Fig. 171

FG, DB, distincte. Dacă două din aceste drepte ar avea un punct comun, acesta ar aparţine tuturor celor trei plane şi prin el ar trece şi a treia dreaptă. Dar $EH \| FG$, deci situaţia descrisă nu are loc; rezultă $EH \| DB \| FG$.

La fel se obţine $EF \| AC \| GH$. Avem şi $AH = AE$ şi $BE = BF$, ca urmare a faptului că sfera este tangentă la AD, AB, BC (vezi şi a)). Informaţiile obţinute sînt sintetizate în fig. 171 dreapta. Însă sfera este tangentă şi la AC; pe aceeaşi cale ca şi la a) deducem de aici $AC = AE + CF = 2x$.

Rămîne de utilizat şi $EH = EF$. Pentru aceasta scriem două asemănări de triunghiuri, $EH/BD = AE/AB$ şi $EF/AC = BE/BA$, deci $BD = EH(x + y)/x$ şi $EH = EF = 2x \cdot y/(x + y)$, apoi $BD = 2y$, adică $BD = BE + DH$, tocmai relaţia la stabilirea căreia fusese, în a), redusă rezolvarea problemei.

Observaţie. Strîns legată de rezolvarea problemei 2-BG este următoarea

Teoremă. *Fie ABCD un tetraedru. Existenţa unei sfere tangente la toate cele şase muchii ale sale este echivalentă cu*

$$AB + CD = AC + BD = AD + BC.$$

Dacă se are în vedere aplicarea acestei teoreme, atunci soluţia problemei 2-BG poate începe cu punctul b); pe baza concluziilor obţinute (la care trebuie adăugate $CG = x$, $DG = y$) se verifică imediat valabilitatea celor două egalităţi din enunţul teoremei şi se deduce existenţa unei sfere tangente la cele şase muchii ale tetraedrului.

Coincide ea cu sfera din enunţ? Considerînd intersecţiile celor două sfere cu feţele ABC, ACD, acestea rezultă a fi, pentru ambele sfere, cercurile înscrise în triunghiurile respective, acele cercuri fiind deci comune celor două sfere. Centrele lor vor coincide, aflîndu-se la intersecţia celor două drepte perpendiculare pe planele celor două cercuri, în centrele acestora etc.

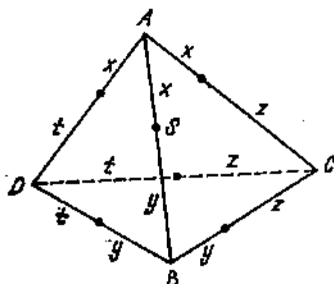


Fig. 172

Demonstraţia teoremei menţionate este apropiată de punctul a) al soluţiei problemei 2-BG.

Dacă există sfera din enunţul teoremei, atunci au loc egalităţile de segmente marcate pe fig. 172, pe care s-au indicat punctele de contact ale sferei cu muchiile, şi cele trei sume sînt toate $x + y + z + t$.

Reciproc, dacă relaţiile din enunţ sînt adevărate, se consideră cercurile (Q_C), (Q_D), înscrise în triunghiurile ABC, respectiv ABD. Acestea vor atinge AB în acelaşi punct S, ca urmare a faptului că în fig. 170 avem $XY + XZ = 2XV + YW + ZV = 2XV + YZ$, deci $XV = (XY + XZ - YZ)/2$, deoarece în cazul de aici $AB + AC - BC = AB + AD - BD$, conform ipotezei.

Prin cele două cercuri trece o sferă, al cărei centru este la intersecţia perpendicularelor din centrele O_C, O_D ale celor două cercuri, duse în planul O_CSO_D, pe O_CS, O_DS; sfera va fi tangentă la AB, AC, BC, AD şi BD.

Acea sferă va intersecta ACD după un cerc (Q') tangent la AC şi AD în aceleaşi puncte, în care acestea sînt atinse de (Q_C), (Q_D), care se constată, analog, pe baza relaţiilor presupuse adevărate, că sînt aceleaşi cu punctele de contact ale cercului înscris în triunghiul ACD. Acest cerc coincide deci cu (Q') (vezi a) din soluţia lui 2-BG), sfera construită îl conţine şi rezultă că ea va fi tangentă şi la CD.

Soluţia problemei 18-SU (vezi 11.2). Vom considera o sferă S, de aceeaşi rază ca şi planetele $S_1, \ldots, S_n$ din enunţ, toate gîndite ca suprafeţe. Dacă Z_i este mulţimea punctelor de pe S_i ce nu sînt văzute din nici un punct al nici unei S_j cu $j \neq i$, vom translata Z_i în mulţimi $T_i \subset S$ şi vom demonstra că, dacă neglijăm o anumită mulţime T de arie nulă, atunci $T_1, \ldots, T_n$ sînt disjuncte şi au ca reuniune S; cu aceasta problema va fi rezolvată.

Să considerăm întîi cazul $n = 2$, în care soluţia este evidentă din fig. 173, desenată schematic. Vom alege drept T, în cazul general,

mulţimea formată din toate cercurile de intersecţie cu S ale tuturor planelor P_{ij} ce trec prin centrul C al lui S şi sînt perpendiculare pe C_iC_j, unde C_i este centrul lui S_i, $i \neq j$.

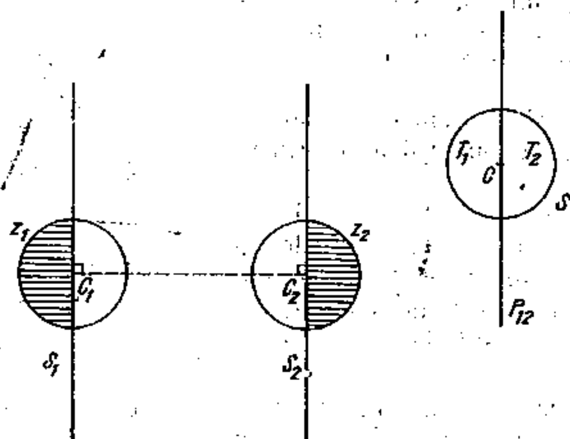


Fig. 173

Să considerăm acum cazul $n = 3$, în care soluţia este evidentă din fig. 174, de asemenea desenată schematic.

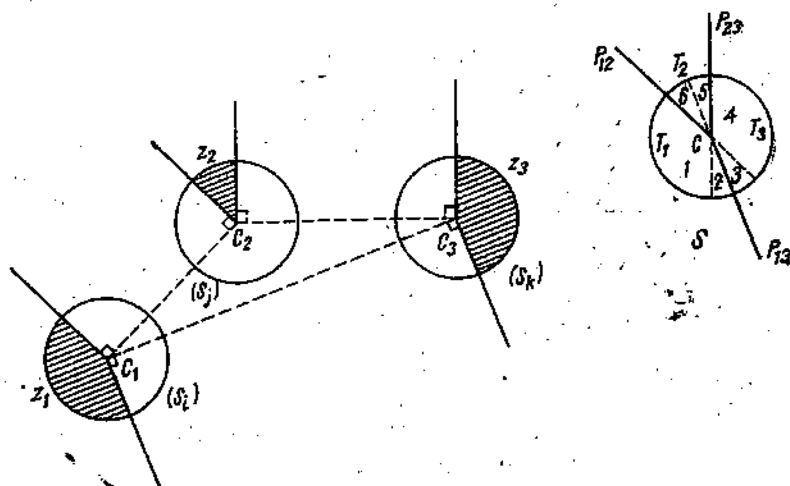


Fig. 174

În cazul general să considerăm un $M \in S$ oarecare ce nu aparține lui T și raza OM, rază ce nu va fi conținută în nici un P_{ij}. Pentru fiecare: $i \neq j$, conform figurii 173, este valabilă, neglijîndu-se celelalte planete, exact una din alternativele: sau paralela prin O_j la OM taie S_j într-un punct nevăzut de pe S_i, sau paralela prin O_i la OM taie S_i într-un punct nevăzut de pe S_j. În primul caz scriem $i < j$, în al doilea $j < i$. În acest mod am obținut o relație binară pe $\{1, 2, \ldots, n\}$, care este antisimetrică.

Conform cazului $n = 3$, $i < j$ și $j < k$ implică $i < k$. Într-adevăr, $i < j$ spune (fig. 174) că M este într-una din zonele 4, 5, 6, iar $j < k$ că el este într-una din 2, 3, 4. Împreună, acestea cer ca M să fie în 4, care este inclusă în reuniunea zonelor 3, 4, 5 ce corespunde la $i < k$.

Deci relația definită de M pe $\{1, \ldots, n\}$ este o relație de ordine totală.

Proprietatea $M \in T_m$ este echivalentă cu „$i < m$ pentru orice $i \neq m$", deci cu „m este element maximal în relația de ordine totală definită de M". Un astfel de element există și este unic, deci orice $M \notin T$ aparține exact la una din mulțimile $T_1, \ldots, T_m$, q.e.d.

Dacă o planetă S_j întrerupe o rază vizuală ce duce la un punct, atunci acel punct este văzut dintr-unul de pe S_j (vezi fig. 174) etc.

11.6. Cele două probleme în afara materiei clasice

Soluția problemei 5-CO (vezi 11.2). La recompunere, există 27! moduri de a așeza cele 27 cuburi mici în cele 27 locuri din cubul mare. Odată ales locul ce-l va ocupa un cub mic, există 24 moduri în care acel cub mic poate fi așezat în acel loc. Într-adevăr, există șase moduri în care poate fi aleasă fața „de jos" și la fiecare din acestea corespund cîte patru moduri în care poate fi apoi aleasă fața „de la dreapta".

Sînt deci $27!\,24^{27}$ moduri în care poate fi recompus cubul mare.

Cuburile mici sînt de patru categorii. Prima este compusă dintr-un singur cub, ce nu are nici o față neagră: cel din centru. A doua este compusă din 6 cuburi, ce au cîte o singură față neagră: cele din centrele fețelor cubului mare. A treia este compusă din 12 cuburi, ce au cîte două fețe negre, alipite printr-o latură: cele din mijloacele

muchiilor cubului mare. A patra este compusă din 8 cuburi, ce au cîte trei fețe negre, cu un vîrf comun: cele din vîrfurile cubului mare. (Vezi fig. 175, unde pe fiecare din cele vizibile s-a scris, o singură dată, numărul categoriei din care face parte).

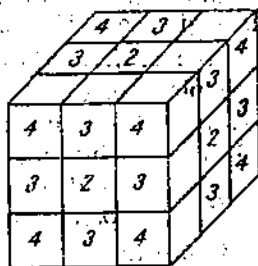


Fig. 175

În cazurile favorabile evenimentului din enunț, fiecare cub mic va ocupa un loc din categoria din care acesta face parte. Sînt deci 1!6!12!8! moduri în care cuburile mici pot fi așezate în cubul mare pe locuri ce pot conduce la un caz favorabil.

Odată alese aceste locuri, pentru a obține un caz favorabil, cubul din centru poate fi așezat în oricare din cele 24 poziții posibile, fiecare din cuburile din categoria a doua poate fi așezat în 4 moduri cu fața neagră la exterior, fiecare din cele de categoria a treia în 2 moduri cu fețele negre la exterior, iar fiecare din cele de categoria a patra în 3 moduri. Deci sînt $1!6!12!8!24\cdot 4^6 2^{12} 3^8$ situații favorabile, și probabilitatea cerută este acest număr împărțit cu $27!24^{27}$, adică $6!12!8!(1/6)^6(1/12)^{12}(1/8)^8/27!$ etc.

Soluția problemei 6-CU (vezi 11.2). Fie m numărul de elemente din P_1 și n cel din P_0. Evident că P_1 și P_0 nu au elemente comune. Să considerăm și derivatele polinoamelor P și Q.

Pentru fiecare $z \in P_1$ sau $z \in P_0$, fie $m(z) \geqslant 1$ multiplicitatea rădăcinii z a ecuației $P(z) = 1$, respectiv $P(z) = 0$, deci $m(z) - 1$ va fi, în ambele cazuri, multiplicitatea lui z ca rădăcină a lui $P'(z) = 0$. Polinomul P' va avea deci ca grad cel puțin

$$\sum_{z\in P_1}(m(z) - 1) + \sum_{z\in P_0}(m(z) - 1) = \sum_{z\in P_1} m(z) + \sum_{z\in P_0} m(z) - (m + n).$$

Dar $\sum\limits_{z\in P_1} m(z) = \sum\limits_{z\in P_0} m(z)$ sînt egale cu gradul k al lui P. Se obține $k - 1 = \text{grad} P' \geqslant 2k - (m + n)$, deci $k \leqslant m + n - 1$.

Aceleași concluzii rezultă valabile, ca urmare a faptului că $P_1 = Q_1$, $P_0 = Q_0$, și pentru Q. Deci $P - Q$ va avea ca grad cel mult $m + n - 1$, dar se va anula în cele $m + n$ puncte din $P_1 \cup P_0$; acesta rezultă identic nul, q.e.d.

Există oare o soluție fără derivate?

11.7. Problemele cu „numere reale"

Soluția problemei 3-CA (vezi 11.2). Vom căuta să eliminăm, în măsura posibilităților, unele dintre variabilele ce apar. Pentru aceasta

aceasta să observăm, că, dacă înlocuim a şi b respectiv cu $a+b$ şi 0, suma din enunţ rămîne 1 şi maximul nu creşte. Deci minimul acelui maxim rămîne acelaşi dacă se cere, în plus, $b=0$. La fel se vede că aceasta este valabil şi dacă se cere şi $f=0$.

Se ajunge la a afla minimul lui $\max(a+c, c+d, c+d+e, d+e, e+g)$ cînd a, c, d, e, g sînt nenegative, de sumă 1. Termenii $c+d$, $d+e$ se suprimă din maxim fără a-l modifica. La fel ca în primul raţionament, înlocuind a şi c cu $a+c$ şi 0, se vede că minimul este acelaşi dacă se cere în plus $c=0$ şi apoi, analog, $e=0$. Se ajunge la minimul lui $\max(a, d, g)$, cînd a, d, g sînt nenegativi cu $a+d+g=1$. Rezultă $1 \leq 3\max(a, d, g)$, deci $\max(a, d, g) \geq 1/3$, valoare ce se atinge pentru $a=d=g=1/3$. Răspunsul la problemă este 1/3.

Soluţia problemei 9-DE (vezi 11.2). Prin inducţie faţă de n ne convingem că $a_n \geq 0$, deci şirul (a_n) este format numai din numere reale. Relaţia de recurenţă, dintr-una cu aspect neobişnuit, se transformă într-una relativ cunoscută în urma tentativei de a elimina radicalul, deci în urma substituţiei $1+24a_n = b_n^2$. Într-adevăr, se obţine $b_1 = 5$ (se presupune $b_n \geq 0$) şi $b_{n+1}^2 = 1 + (3/2)(1 + (1/6)(b_n^2-1) + b_n) = (b_n^2 + 6b_n + 9)/4 = ((b_n+3)/2)^2$, deci $b_{n+1} = (b_n+3)/2$. Această relaţie seamănă cu cele din soluţia problemei GB1 din 6.3 ;este mai simplă neconţinînd pe b_{n-1}, dar are în plus un „termen liber". Există un şir constant (c) ce o satisface, dat de $c = (c+3)/2$, deci $c=3$. Scăzînd acest şir din b_n, relaţia devine $b_{n+1} - 3 = (b_n - 3)/2$, ceea ce conduce la $b_n - 3 = (b_1 - 3)/2^{n-1} = 1/2^{n-2}$, $b_n = 3 + (1/2^{n-2})$ şi, în fine, la $a_n = (b_n^2 - 1)/24 = (1/3) + (1/2^n) + (1/3)(1/2^{2n-1})$.

Soluţia problemei 16-GB (vezi 11.2). Funcţia $f(x) = (64x+15)^{1/3}/4$ fiind strict crescătoare şi $u_{n+1} = f(u_n)$, rezultă că, după cum $u_2 < u_1$, $u_2 = u_1$, $u_2 > u_1$, vom avea $u_{n+1} < u_n$, $u_{n+1} = u_n$, $u_{n+1} > u_n$, respectiv, pentru orice n, deci şirul (u_n) va fi strict descrescător, respectiv constant, strict crescător.

Să determinăm mulţimea tuturor u_1 pentru care are loc fiecare din cele trei alternative, deci mulţimea tuturor x pentru care $f(x) < x$, respectiv $f(x) = x$, $f(x) > x$, relaţii ce sînt echivalente cu $g(x) < 0$, respectiv cu $g(x) = 0$, $g(x) > 0$, unde $g(x) = (4x)^3 - 16 \cdot 4x - 15$. Se observă că $g(x) = 0$ are ca rădăcini $4x = -1$, deci $x = -1/4$, şi cele două rădăcini ale ecuaţiei $(4x)^2 - (4x) - 15 = 0$, deci $x = (1 \pm \sqrt{61})/8$. Ordinea de mărime a acestor numere este $x_1 < x_2 < x_3$, unde $x_1 = (1-\sqrt{61})/8$, $x_2 = -1/4$, $x_3 = (1+\sqrt{61})/8$, ca urmare a inegalităţii $(4x_2)^2 - (4x_2) - 15 = (-1)^2 + 1 - 15 < 0$.

Cum $g(x) = 4^3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, rezultă că $(-\infty, x_1) \cup \cup (x_2, x_3)$ este mulţimea acelor valori ale lui x pentru care $g(x) < 0$. Deci şirul (u_n) este strict descrescător pentru $u_1 < x_1$ şi pentru $x_2 < < u_1 < x_3$, constant pentru $u_1 = x_1$, x_2 sau x_3 şi strict crescător pentru $x_1 < u_1 < x_2$ şi pentru $u_1 > x_3$. În plus, cum $f(x_i) = x_i$, se obţine faptul că şirul (u_n) este mărginit pentru $x_1 < u_1 < x_3$, anume $x_1 < u_n < x_2$ pentru $x_1 < u_1 < x_2$, caz în care el este strict crescător, şi $x_2 < u_n < x_3$ pentru $x_2 < u_1 < x_3$, caz în care el este strict descrescător.

Fiind monoton, şirul (u_n) are totdeauna o limită, finită sau infinită; deci depăşim „materia clasică". Fie $\lim u_n = u$. Cum f este continuă şi $u_{n+1} = f(u_n)$, rezultă $u = f(u)$, $g(u) = 0$, deci $u = x_1$, x_2 sau x_3. Analizînd concluziile obţinute înainte, rezultă că $u_n \to -\infty$ pentru $u_1 < x_1$, $u_n \to x_2$ pentru $x_1 < u_1 < x_3$ şi $u_n \to +\infty$ pentru $u_1 > x_3$. Numai în cazurile $u_1 = x_1$ şi $u_1 = x_3$ avem $u_n \to x_1$ şi $u_n \to x_3$ (fig. 176).

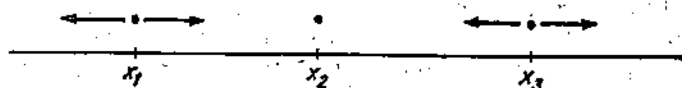


Fig. 176

11.8. Problema relativă la un polinom

Soluţii ale problemei 13-RO (vezi 11.2). Există o soluţie bazată pe formula de interpolare a lui Lagrange, care începe cu

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} P(k)\, x(x-1)\ldots(x-n)\,(x-k)^{-1} \prod_{i \neq k} (k-i)^{-1}$$

(de fapt se poate verifica imediat că acest polinom satisface condiţiile din enunţ, iar diferenţa a două asemenea polinoame are grad n, se anulează în $n+1$ puncte, deci este nulă şi polinomul P este unic determinat etc). Deci

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} (C_{n+1}^{k})^{-1} x(x-1)\ldots(x-n)(x-k)^{-1}(k!)^{-1}((n-k)!)^{-1}(-1)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}((n+1)!)^{-1}(n+1-k)x(x-1)\ldots(x-n)(x-k)^{-1},$$

$$P(n+1) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}((n+1)!)^{-1}(n+1-k)(n+1)!(n+1-k)^{-1} =$$

$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}$, $P(n+1) = 0$ dacă n este impar şi $P(n+1) = 1$ dacă n este par.

Există altă soluţie, prin inducţie. Fie P_n polinomul din enunţ; evident $P_0 = 1$. Avem

$$P_{n+1}(k) = k!(n+2-k)!/(n+2)! = (C_{n+1}^{k})^{-1}\frac{n+2-k}{n+2} =$$

$$= P_n(k)\frac{n+2-k}{n+2}$$

pentru $k = 0, 1, \ldots, n$, deci polinomul, de grad cel mult $n+1$, $P_{n+1}(x) - P_n(x)\frac{n+2-x}{n+2}$ se anulează pentru $x=0, 1, \ldots, n$. Rezultă $P_{n+1}(x) - P_n(x)\frac{n+2-x}{n+2} = c_n x(x-1)\ldots(x-n)$ cu c_n constant. Pentru $x = n+2$ se obţine $P_{n+1}(n+2) = c_n(n+2)!$, iar pentru $x = n+1$, $P_{n+1}(n+1) - P_n(n+1)\frac{1}{n+2} = c_n(n+1)!$. Însă $P_{n+1}(n+1) = (C_{n+2}^{n+1})^{-1} = 1/(n+2)$ şi se ajunge la $1 - P_n(n+1) = c_n(n+2)! = P_{n+1}(n+2)$, de unde $(P_0(1) = 1)$ se obţine fără dificultate rezultatul din soluţia precedentă.

11.9. Problemele privind numere întregi

Soluţia problemei 1-BE (vezi 11.2). Vom determina mulţimea din enunţ prin elementul ei maximal m; aceasta va fi deci de forma $m+(n-1), \ldots, m-1, m$. Prima condiţie impusă lui m este $m \geqslant n$.

Pentru a o traduce pe cea de a doua, fie p un divizor prim al lui m, fie p^k puterea maximă a lui p ce divide pe m. Condiţia din enunţ cere ca p^k să dividă unul din numerele $m-1, \ldots, m-(n-1)$, deci un $m-s$ cu $1 \leqslant s \leqslant n-1$, ceea ce este echivalent cu faptul că $s = m-(m-s)$ se divide cu p^k.

Existența unui s cu $1 \leqslant s \leqslant n-1$ care să se dividă cu p^k este echivalentă cu cerința ca p^k să dividă pe cel mai mic multiplu comun $a(n)$ al numerelor $1, 2, \ldots, n-1$. În concluzie, a doua condiție asupra lui m este ca el să dividă pe $a(n)$. Existența unui $m \geqslant n$ cu această proprietate revine la $n \leqslant a(n)$.

Pentru $n \geqslant 3$, dacă $a(n) \geqslant n$, atunci $a(n) > n-1$ și se divide cu $n-1$, deci $a(n) \geqslant 2(n-1) \geqslant n+3-2 = n+1$, de unde rezultă $a(n+1) \geqslant a(n) \geqslant n+1$. Cu alte cuvinte, dacă $a(n) \geqslant n$, atunci $a(n+1) \geqslant n+1$.

Avem $a(3) = 2$ și $a(4) = 6$, deci răspunsul la punctul a) al problemei este: pentru $n \geqslant 4$.

Pentru ca $m \geqslant n$ ce divide $a(n)$ să fie unic trebuie să nu existe nici un divizor r al lui $a(n)$ cu $n \leqslant r < a(n)$. Dar pentru $n \geqslant 3$ numărul $a(n)$ este par, deci divizorul maxim $r < a(n)$ al lui $a(n)$ este $a(n)/2$ și condiția de unicitate este $n > a(n)/2$.

Dacă $n > 5$ și alegem k cu $2^k < n \leqslant 2^{k+1}$, atunci $a(n) \geqslant 2^k \cdot 3 \cdot 5$, $a(n)/2 \geqslant (15/4)2^{k+1} \geqslant n$, deci unicitatea nu are loc. Avem $a(4) = 6 < 8 = 2 \cdot 4$, deci există un singur șir de patru termeni cu proprietățile din enunț, anume 3, 4, 5, 6. Avem $a(5) = 12 > 10 = 2 \cdot 5$, deci există două șiruri de cinci termeni cu proprietățile din enunț, anume 2, 3, 4, 5, 6 și 8, 9, 10, 11, 12.

Răspunsul la punctul b) este deci $n = 4$.

Soluția problemei 4-CA (vezi 11.2). a) Fie $af_n + bf_{n+1} = f_{c(n)}$, pentru $n = 1, 2, \ldots$, unde singura ambiguitate în legătură cu valoarea lui $c(n)$ poate apărea ca urmare a faptului că $f_1 = f_2 = 1$.

Scriind relația și pentru $n+1$, avem $af_{n+1} + bf_{n+2} = f_{c(n+1)}$ și, adunînd, rezultă

$$f_{c(n)} + f_{c(n+1)} = a(f_n + f_{n+1}) + b(f_{n+1} + f_{n+2}) = af_{n+2} + bf_{n+3} = f_{c(n+2)}.$$

b) Să presupunem că are loc relația $f_r + f_s = f_t$, cu $r \leqslant s$.

Dacă $3 \leqslant r = s$, atunci $f_{r+1} = f_r + f_{r-1} < 2f_r < f_r + f_{r+1} = f_{r+2}$, deci relația $2f_r = f_t$ este imposibilă, deoarece ar urma $r+1 < t < r+2$. Avem însă $f_1 + f_1 = f_2 + f_2 = f_3$.

Dacă $r < s-1$ și $s > 3$, atunci $f_s < f_r + f_s < f_{s-1} + f_s = f_{s+1}$, deci, analog, $f_r + f_s = f_t$ este imposibilă. Avem însă $f_1 + f_3 = f_4$.

Deci din $f_r + f_s = f_t$ și $r \leqslant s$ rezultă $r = s-1$, $t = s+1$, cu excepția celor trei cazuri indicate.

c) Să revenim la situația de la a). Rezultă $c(n+2) > c(n+1)$, ca urmare a inegalității $f_{c(n+2)} > f_{c(n+1)}$. Deci $c(2) < c(3) < \ldots$, în particular $c(3) \geqslant 2$, $c(4) \geqslant 3$.

Din $f_{c(n+2)} = f_{c(n+1)} + f_{c(n)}$ se obține acum $c(n+1) = c(n) + 1$ pentru $n \geq 2$, dacă în plus $c(n+1) \geq 4$, adică $n \geq 4$ sau dacă $c(n+1) \geq 3$, $c(n) \geq 2$, adică $n \geq 3$.

Deci $c(n) = n + k$, pentru $n \geq 3$, unde $k = c(3) - 3$.

d) Dar relația obținută la c) se poate extinde și pentru $n = 2$ și 1. Anume, avem $f_{c(2)} = f_{c(4)} - f_{c(3)} = f_{k+4} - f_{k+3} = f_{k+2}$, ultimul avînd sens deoarece $k + 2 = c(3) - 1 \geq 2 - 1 = 1$. Avem apoi $f_{c(1)} = = f_{c(3)} - f_{c(2)} = f_{k+3} - f_{k+2}$. Nu se poate să avem $k = -1$, deoarece ar urma $f_{c(1)} = f_2 - f_1 = 0$; rezultă, cum $k \geq -1$, $k \geq 0$ și $f_{c(1)} = f_{k+1}$. Însă $c(n)$ a fost determinat numai prin valoarea lui $f_{c(n)}$, deci putem alege $c(n) = n + k$ și pentru $n = 1$ și 2; numărul k este ≥ 0.

e) Pentru $n = 1$ obținem $a + b = f_{k+1}$, pentru $n = 2$ relația $a + 2b = f_{k+2}$. Pentru $k = 0$ se obține $b = f_2 - f_1 = 0$, $a = f_1 = 1$, caz banal. Pentru $k = 1$ se obține $b = f_3 - f_2 = 1$ și $a = f_2 - b = 0$, iarăși caz banal. Pentru $k \geq 2$ se obține $b = f_{k+2} - f_{k+1} = f_k$ și $a = f_{k+1} - b = f_{k-1}$.

Faptul că, într-adevăr, avem $f_{k-1}f_n + f_k f_{n+1} = f_{n+k}$, oricare ar fi $k \geq 2$, se arată prin inducție față de n. Cazurile $n = 1$ și $n = 2$ conduc la egalitate ca urmare a calculului precedent, iar la a) s-a văzut că membrul stîng satisface relația de recurență a șirului Fibonacci etc.

Deci răspunsul la punctul a) al problemei este: (1, 0), (0, 1) și toate (f_k, f_{k+1}), cu $k \geq 1$.

f) Cu totul altfel se abordează punctul b) al problemei. Să tratăm și ecuația $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ a șirului Fibonacci prin metoda de la 6.3 (soluția problemei GB1). Rezolvăm $z^2 - z - 1 = 0$, obținînd rădăcinile $p = (1 + \sqrt{5})/2 > 1$ și $q = (1 - \sqrt{5})/2$, cu $|q| < 1$, și apoi determinăm constantele M, N din $Mp + Nq = Mp^2 + Nq^2 = 1$, anume (calcule elementare) $M = 1/\sqrt{5}$, $N = -M$.

Să substituim formula obținută, $f_n = (p^n - q^n)/\sqrt{5}$, în relația ce dorim să aibă loc, adică în $uf_n^2 + vf_{n+1}^2 = f_{w(n)}$. Se obține o egalitate de forma $Cp^{2n} + D(-1)^n + Eq^{2n} = Fp^{w(n)} + Gq^{w(n)}$, în care $C = = (u + vp^2)/5$, termenul cu -1 apare ca urmare a relației $pq = = -1$, iar $D = 2(v - u)/5$, $E = (u + vq^2)/5$, $F = -G = 1/\sqrt{5}$.

g) Pentru n mare, în membrul stîng al egalității de la f) termenul p^{2n} este preponderent, tinzînd la ∞ ca urmare a faptului că $p > 1$, termenul al doilea este mărginit, iar al treilea, ca și al doilea din membrul drept, tinde la 0, deoarece $|q| < 1$.

Cum u, v au fost presupuși pozitivi, avem $C > 0$.

Să împărțim egalitatea cu p^{2n} și să facem $n \to \infty$. Se obține $\lim Fp^{w(n)-2n} = C \neq 0$. Deci $w(n) - 2n$ are ca limită $m = = \log_p(C/F)$ și, cum el este întreg, rezultă $w(n) - 2n = m$ pentru

n mai mare ca un anumit n_0. Pentru $n > n_0$ avem deci $Cp^{2n} = Fp^{w(n)}$ şi egalitatea se reduce la $D(-1)^n + Eq^{2n} = Gq^{w(n)}$. Acum se obţine $\lim D(-1)^n = 0$, deci $D = 0$ şi rămîne $Eq^{2n} = Gq^{w(n)}$.

Din $D = 0$ rezultă $u = v$ şi, înmulţind celelalte două relaţii obţinute, ajungem la $EC(pq)^{2n} = FG(pq)^{w(n)}$, ceea ce, conform cu $pq = -1$ etc., conduce la $u^2(1 + p^2)(1 + q^2) = -5(-1)^{w(n)}$, $u^2(p + 2)(q + 2) = \pm 5$, $u^2(-1 + 2(p + q) + 4) = \pm 5$, $u^2 = \pm 1$, $u = 1$.

Din relaţia stabilită la e) rezultă $f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+1}$. Aceasta, împreună cu concluziile precedente, arată că răspunsul la punctul b) al problemei este : o singură pereche, anume (1, 1).

Rezolvarea punctului b) al problemei, deşi ar putea fi redactată şi fără limite, a necesitat însă un mod de a gîndi intîlnit în special în analiza matematică.

Evident că, dacă această problemă ar fi aleasă pentru concurs, s-ar pune problema eliminării punctului d), datorat egalităţii $f_1 = f_2$. Dar eliminarea primului 1 din şir ar îngreuna apoi deducţia în prima parte din e).

Soluţia problemei 7-FI (vezi 11.2). a) Determinăm întîi $f(1, y)$. Relaţiile 2 şi 3, pentru $x = 0$, conduc la $f(1, 0) = f(0, 1)$, $f(1, y+1) = f(0, f(1, y))$ şi, ţinînd seama de 1, la $f(1, 0) = 2$, $f(1, y + 1) = f(1, y) + 1$. Prin inducţie faţă de y se ajunge uşor la $f(1, y) = y + 2$.

b) Aceeaşi metodă ca la a) arată că $f(2, 0) = f(1, 1) = 3$, $f(2, y+1) = f(1, f(2, y)) = f(2, y) + 2$ şi apoi că $f(2, y) = 3 + 2y$.

c) Pentru $x = 2$ se obţine analog, din relaţiile din enunţ, $f(3, 0) = f(2, 1) = 5$, $f(3, y + 1) = f(2, f(3, y)) = 3 + 2f(3, y)$ şi acum o metodă identică cu cea folosită în 11.7 la problema 9-DE conduce la $f(3, y + 1) + 3 = 2\,(f(3, y) + 3)$, $f(3, y) = 2^y(f(3, 0) + 3) - 3 = 2^{y+3} - 3$.

d) În fine, la fel, $f(4, 0) = f(3, 1) = 2^4 - 3$, $f(4, y + 1) = f(3, f(4, y)) = 2^{f(4, y)+3} - 3$. Deci $f(4, y + 1) + 3 = 2^{f(4, y)+3}$, $f(4, 0) + 3 = 2^{2^2}$. Aceasta implică

$$f(4, y) + 3 = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}, \quad f(4, y) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} - 3,$$

2 apărînd de $y + 3$ ori. Evident că a^{b^c} înseamnă $a^{(b^c)}$ şi nu $(a^b)^c = a^{bc}$.

Soluția problemei 8-DE (vezi 11.2). Fie $g(n, r)$ suma celor C_n^r elemente minimale din enunț, deci $g(n, r) = C_n^r f(n, r)$. Se pune problema să se arate că

$$g(n, r) = C_n^r \frac{n+1}{r+1} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \frac{n+1}{r+1} = \frac{(n+1)!}{(r+1)!(n-r)!} = C_{n+1}^{r+1}.$$

Se consideră întîi două cazuri extreme. Dacă $r = 1$ sînt n submulțimi, elementele minimale sînt $1, 2, \ldots, n$ și suma lor este $n(n+1)/2 = C_{n+1}^2$. Dacă $r = n$ este o singură submulțime, elementul ei minimal este $1 = C_{n+1}^{n+1}$.

În cazul general se raționează prin inducție față de n. Presupunînd afirmația adevărată pentru n și orice r, să considerăm cazul $n+1$ și r, $1 < r < n+1$. Submulțimile de r elemente ale lui $\{1, \ldots, n, n+1\}$ sînt toate cele de r elemente ale lui $\{1, \ldots, n\}$, despre care știm că suma elementelor lor minimale este C_{n+1}^{r+1}, și cele de r elemente ale lui $\{1, \ldots, n, n+1\}$ ce conțin $n+1$. Ultimele sînt, prin $A \cup \{n+1\} \leftrightarrow A$, in corespondență bijectivă cu submulțimile de $r-1$ elemente ale lui $\{1, \ldots, n\}$, corespondență ce nu modifică elementul minimal, deci suma elementelor minimale ale submulțimilor din a doua categorie este $g(n, r-1) = C_{n+1}^r$. În total suma elementelor minimale ale submulțimilor de r elemente ale lui $\{1, \ldots, n, n+1\}$ rezultă egală cu $C_{n+1}^{r+1} + C_{n+1}^r$, despre care se știe, sau se verifică fără dificultate, că este C_{n+2}^{r+1} (vezi și, 8.9, soluția problemei TR5). Acea sumă este însă tocmai $g(n+1, r)$, deci afirmația $g(n, r) = C_{n+1}^{r+1}$ rezultă adevărată și pentru $n+1$ și orice r; cazurile extreme $r = 1$ și $r = n+1$ au fost tratate la început.

Soluția problemei 12-NL (vezi 11.2). Relația din enunț este echivalentă cu $n^2 - mn - m^2 = \pm 1$. Această relație, împreună cu $0 < n < m$, conduc la contradicție: $n^2 - nm - m^2 = n(n-m) - m^2 < < -m^2 \leqslant -1$. Împreună cu $0 < n = m$, ea implică $-m^2 = \pm 1$, deci $n = m = 1$.

Fie M mulțimea tuturor perechilor de numere întregi pozitive (m, n) ce satisfac relația în discuție. Pentru orice asemenea pereche (m, n), cu excepția lui $(1, 1)$, avem deci $n > m$.

Vom căuta ca, plecînd de la o pereche $(m, n) \neq (1,1)$ din M, să construim altă pereche din M. Ținînd pe m fix, fie $P(n) = n^2 - - nm - m^2$. În general, dacă $P(x) = ax^2 + bx + c = a(x + (b/2a))^2 + + d$, atunci $P(x) = P(y)$ dacă $x + (b/2a) = -(y + (b/2a))$, adică dacă $x + y = -b/a$. În cazul nostru rezultă $P(n) = P(m-n)$, ceea ce se scrie $n^2 - nm - m^2 = (m-n)^2 - (m-n)m - m^2$, dar,

ţinînd seama de faptul că $m < n$, se transformă în $n^2 - nm - m^2 = -(m^2 - (n - m)m - (n - m)^2)$. Cu alte cuvinte, pentru $(m, n) \neq (1, 1)$, $(m, n) \in M$ este echivalent cu $(n - m, m) \in M$.

Prin transformarea ce duce de la (m, n) la $(n - m, m)$, elementul maximal n al perechii scade la $m < n$. Deci după un număr finit de astfel de transformări se va ajunge la $(1,1)$, ceea ce se poate formula şi invers: la orice pereche (m, n) din M se ajunge din $(1, 1)$ printr-un număr finit de aplicări ale transformării inverse.

Cum $n = (n - m) + m$, transformarea inversă este $(a, b) \to (b, a + b)$. Deducem că toate perechile din M se pot aşeza într-un şir $(a_1, a_2), \ldots, (a_{k-1}, a_k), (a_k, a_{k+1}), \ldots$, în care $a_1 = a_2 = 1$, $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$, deci în care (a_k) este şirul lui Fibonacci.

Numărul $m^2 + n^2 = a_{k-1}^2 + a_k^2$ creşte cînd se trece de la k la $k + 1$, deci, construind şirul lui Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, valoarea maximă cerută de problemă, pentru termeni ≤ 1981, va fi $987^2 + 1597^2$.

Observaţie. Este cunoscută proprietatea $a_k^2 - a_k a_{k-1} - a_{k-1}^2 = (-1)^{k-1}$ a şirului lui Fibonacci; aceasta se demonstrează prin inducţie cu uşurinţă, pasul de la k la $k + 1$ constînd în $a_{k+1}^2 - a_{k+1}a_k - a_k^2 = (a_k + a_{k-1})^2 - (a_k + a_{k-1})a_k - a_k^2 = -(a_k^2 - a_k a_{k-1} - a_{k-1}^2)$. Cunoaşterea acestei proprietăţi se dovedeşte un mare avantaj pentru un rezolvitor, determinîndu-l, spontan, să se gîndească la o legătură a problemei cu şirul respectiv.

11.10. Alegerea problemelor de concurs. Soluţii ale concurenţilor

Modul de alegere nu a diferit esenţial de cel prezentat în 7.4. Ţinînd seama de situaţiile de la Olimpiadele trecute în care realitatea concursului a infirmat o serie de aprecieri ale juriului privind dificultatea diferitelor probleme, ca de exemplu cea legată de problema *1* (vezi 10.10) de la Olimpiada a 21-a, s-a hotărît, la propunerea conducerii juriului, ca pentru fiecare din cele şase probleme ce se vor da spre rezolvare să se acorde un punctaj maxim de cîte 7 puncte, deci punctajul maxim ce l-ar putea realiza un concurent să fie $6 \cdot 7 = 42$ puncte. În documentele Olimpiadei a 22-a nici nu s-a inclus „primul tabel de rezultate" (vezi 6.5, 7.6 etc.), din care ar fi rezultat o estimare a dificultăţii fiecăreia din problemele de concurs.

Cele şase probleme propuse spre rezolvare concurenţilor au fost următoarele (enunţurile în 11.2): *1* (15-GB), *2* (8-DE), *3* (12-NL); *4* (1-BE), *5* (17-SU), *6* (7-FI).

S-a constatat că problema *3* (12-NL, vezi 11.2 şi soluţia 11.9) a fost de departe mai dificilă decît celelalte, aceasta triind de fapt concurenţii pentru premiul 1 şi 2. Geometria în spaţiu, prezentă prin două probleme (vezi 11.5) în lista propusă juriului, nu a figurat în concurs.

Soluţii deosebite datorite concurenţilor au apărut în special la problema *2*; prezentăm două din acestea.

Soluţie a problemei 2 (8-DE, vezi 11.2). Se consideră toate cele C_{n+1}^{r+1} submulţimi de $r+1$ elemente ale mulţimii $\{0, 1, \ldots, n\}$. Din fiecare se elimină elementul ei minimal, ajungîndu-se astfel la o submulţime de r elemente a mulţimii $\{1, \ldots, n\}$. Dacă o submulţime cu r elemente $A \subset \{1, \ldots, n\}$ are ca element minimal k, atunci ea se obţine în modul indicat mai sus din k submulţimi ale lui $\{0, 1, \ldots, n\}$, anume din $A \cup \{0\}$, $A \cup \{1\}, \ldots, A \cup \{k-1\}$. Deci suma tuturor elementelor minimale ale submulţimilor A de r elemente ale lui $\{1, \ldots, n\}$ este egală cu numărul C_{n+1}^{r+1} de submulţimi de $r+1$ elemente ale mulţimii $\{0, 1, \ldots, n\}$ etc. (vezi soluţia din 11.9).

Altă soluţie a problemei 2 (8-DE, vezi 11.2). Mulţimea tuturor submulţimilor de k elemente ale mulţimii $\{1, \ldots, n\}$, scrise sub forma $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$, cu $1 \leqslant a_1 < \ldots < a_k \leqslant n$, este în corespondenţă bijectivă cu mulţimea M a tuturor şirurilor $(b_1, \ldots, b_{k+1})$ de cîte $k+1$ numere întregi pozitive de sumă $n+1$ prin $A \leftrightarrow (a_1, a_2 - a_1, \ldots$ $\ldots, a_k - a_{k-1}, n+1-a_k)$. Problema se pune deci a calcula media aritmetică a lui b_1 cînd $(b_1, \ldots, b_{k+1})$ parcurge M. Să observăm că $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{k+1}) \leftrightarrow (b_2, b_1, b_3, \ldots, b_{k+1})$ este o bijecţie de la M la M. Deci media aritmetică a lui b_1 este egală cu cea a lui b_2, cînd $(b_1, \ldots, b_{k+1})$ parcurge M. La fel se arată că aceasta este egală cu cea a oricărui b_i, cu i fixat, $1 \leqslant i \leqslant k+1$.

Aceste rezultate se scriu $(\mathrm{card}\, M)^{-1} \sum b_1 = \ldots = (\mathrm{card}\, M)^{-1} \sum b_i = \ldots$ $\ldots = (\mathrm{card}\, M)^{-1} \sum b_{k+1}$, sumele fiind luate după $(b_1, \ldots, b_{k+1}) \in M$. „Adunînd" aceste egalităţi, se obţine

$$(k+1)(\mathrm{card}\, M)^{-1} \sum b_1 = (\mathrm{card}\, M)^{-1} \sum (b_1 + \ldots + b_{k+1}) =$$
$$= (\mathrm{card}\, M)^{-1} \sum (n+1) = n+1,$$

deci media căutată este $(\mathrm{card}\, M)^{-1} \sum b_1 = (n+1)/(k+1)$.

Această soluţie permite descoperirea faptului că, pentru un s dat, $1 \leqslant s \leqslant k$, media aritmetică a tuturor a_s, adică media aritmetică a tuturor elementelor de pe poziţia s în ordinea crescătoare de mărime din toate submulţimile de k elemente ale mulţimii $\{1, \ldots, n\}$, este $s(n+1)/(k+1)$, ceea ce poate fi verificat şi prin inducţie la fel ca în soluţia din 11.9 a acestei probleme.

11.11. Din nou despre coordonare

La Olimpiadele a 21-a şi a 22-a a avut loc o creştere simţitoare a numărului de ţări participante; acest număr avea să continue să crească şi la Olimpiada a 23-a. Dificultatea organizării coordonării s-a mărit. Şi totuşi durata Olimpiadelor nu a crescut. Progresele înregistrate în activitatea de coordonare, la aceste Olimpiade, au fost, pe scurt, următoarele.

Programele de coordonare au fost întocmite prevăzînd 40 minute la Olimpiada a 22-a şi 30 minute la Olimpiadele a 21-a şi a 23-a, pentru fiecare delegaţie, la fiecare problemă.

Dacă o delegaţie avea mai puţini concurenţi, lucrări mai scurte, mai slabe sau în legătură cu care decizia era mai simplă, se continua coordonarea cu delegaţia următoare; aceasta garanta, evident, doar aproximativ respectarea programului de coordonare, dar şi la alte Olimpiade se înregistraseră întîrzieri. La Olimpiada a 23-a, după cum vom vedea, fiecare delegaţie a avut cîte 4 concurenţi. La acea Olimpiadă s-au organizat comisii de coordonare de cîte 4 membri, ce lucrau simultan cu două delegaţii, în camere vecine pentru a face posibilă în orice moment o consultare; împărţirea corespundea şi limbii folosite.

Dar nu numai prin iniţiative organizatorice s-a reuşit să se facă faţă unor astfel de programe. La 8.3 am arătat îndatoririle coordonatorilor, la 2.3 şi 2.4 am arătat calităţile matematice ce se cer delegaţilor şi coordonatorilor. În plus, pe lîngă cunoaşterea în amănunţime a lucrărilor concurenţilor lor, este bine ca delegaţii să vină la coordonare cu păreri formate asupra veridicităţii afirmaţiilor din aceste lucrări, asupra valabilităţii argumentelor prezentate, asupra faptului dacă un concurent a rezolvat sau nu problema respectivă, în ce măsură s-a apropiat de soluţie, dacă drumul pe care a pornit conduce sau nu la rezolvare etc. A se mulţumi cu o simplă naraţiune a conţinutului unei lucrări poate însemna din partea unui delegat şi un fel de cursă întinsă coordonatorului pentru a vedea dacă acesta observă eventualele erori, acceptă soluţia ca bună sau, nelămurindu-se, tinde la un compromis. Prezentarea de coordonatori competenţi, cu un raţionament rapid, face inutile asemenea tentative.

În plus, de la „este bine ca“ s-a trecut la „trebuie“, coordonatorii fiind instruiţi să fie gata să amîne coordonarea cu delegaţiile ce s-ar prezenta nepregătite din punctul de vedere descris anterior; evident, tactul cere ca astfel de amînări să nu fie făcute publice. Chiar fără tentativa de a atrage în cursă pe coordonatori pentru a obţine puncte mai multe, lăsarea pe seama coordonatorilor, şi aşa

aglomerați, a clarificării unor aspecte, legate de lucrările concurenților, ce pot fi elucidate de delegații, înseamnă a nu sprijini Olimpiada în măsura în care acest sprijin este așteptat.

La Olimpiada a 21-a, la problema *5* (IL2, vezi 10.2), un concurent român a abordat-o ignorînd forma particulară a membrilor drepți și tratînd problema generală, ce s-ar încadra în programarea liniară, de a determina condițiile în care un sistem de ecuații liniare are o soluție nenegativă. El nu a reușit să ajungă la rezultatul final pe această cale și delegația noastră a consumat mult timp pentru a se convinge că totuși acest mod de tratare putea conduce la o soluție, prezentînd rezultatele coordonatorilor. Concurentul respectiv a obținut la acea problemă 4 puncte din 7; principiul este ca pentru considerații ce nu se apropie cu nimic de o soluție să nu se dea nici un punct, oricît de valoroase ar putea fi acestea în sine. Un alt exemplu este discuția în legătură cu coordonarea problemei *6* de la Olimpiada a 18-a (vezi 6.5).

O inițiativă în plus luată la Olimpiadele 21–23 de coordonatori a fost de a nu se speria de dificultățile de limbă și de a cerceta ei înșiși lucrările. Figuri, formule, termeni matematici, cuvinte izolate etc. pot fi percepute direct, fără a cunoaște limba respectivă. Cu aceasta s-a eliminat mare parte din posibilitatea de apariție a unei încordări în legătură cu o soluție prea ciudată, despre care se putea crede că nu a fost exact tradusă.

Pe scurt, dificultățile legate de procedură ale coordonării au fost în mare măsură înlăturate. Și s-a ajuns să se descopere unele surse obiective de controverse. Vom prezenta, pentru claritate, o situație fictivă, exemple concrete fiind greu de dat, în care să nu fie implicate și alte aspecte.

Să presupunem că în liceele unei țări se predau mai puțin funcțiile, compunerile de funcții și că numai elevii bine pregătiți din acea țară știu, de exemplu, să determine compunerea a două funcții mai complicate. O astfel de problemă se numără în acea țară printre pietrele de încercare, modurile de departajare, chiar la examenele de admitere în facultăți etc. Să presupunem că în altă țară cunoștințele despre compunerea funcțiilor se predau în mare măsură și sînt însușite de foarte mulți elevi. Dacă la coordonare se întîlnesc un delegat dintr-una din țări și un coordonator din cealaltă (care este deci în acest caz gazdă), atunci în fața unei greșeli de compunere a două funcții cel din prima țară s-ar arăta foarte sever și ar cere scăderea simțitoare a punctajului, iar cel dintr-a doua ar înclina s-o trateze ca pe o greșeală de calcul. Ambii ar avea dreptate, din punctul de vedere al concurenților din țara lor; s-ar ajunge, probabil, la deci-

zia juriului, dacă argumentul „așa s-a procedat cu toate delegațiile" nu s-ar dovedi suficient de puternic.

Un exemplu de problemă de coordonare de la Olimpiada a 22-a. La problema 5 (17-SU, vezi 11.2 și soluția în 11.3), un concurent a făcut o construcție, plecind de la triunghiul dat, care conducea la trei cercuri în situația din enunț și în care coliniaritatea celor trei puncte era clară. A primit cele 7 puncte la această problemă? Nu, deoarece nu a dovedit că orice situație cum este cea din enunț se poate obține pe această cale.

11.12. Rezultate, premii

Al doilea tabel de rezultate (vezi 6.6), la Olimpiada a 22-a, la care au participat 185 de concurenți, arăta ca în fig. 177. Conform

42/26 (26)	41/10 (36)	40/3 (39)	39/3 (42)	38/7 (49)	37/8 (57)	36/7 (64)	35/7 (71)	34/2 (73)	33/5 (78)	32/7 (85)
31/3 (88)	30/1 (89)	29/4 (93)	28/5 (98)	27/3 (101)	26/2 (103)	25/6 (109)	24/3 (112)	23/4	22/3	21/4
20/2	19/1	18/4	17/6	16/3	15/2	14/8	13/7	12/4	11/2	10/2
9/3	8/2	7/—	6/3	5/—	4/3	3/5	2/3	1/3	0/—	

Fig. 177

regulilor (vezi 6.6, 7.6), coloanele barieră între premii trebuiau să aproximeze, prin numerele din paranteză, 15—16, 46—47, respectiv 92—93; în particular premiul 2 ar fi trebuit să se oprească la 38 puncte și premiul 3 la 29 puncte. Însă premiul 1 nu putea fi refuzat nici unuia din cei ce realizaseră punctajul maxim de 42 puncte, deci urma să fie atribuit la cel puțin 26 concurenți. În plus, deși cu un număr important de obiecții, juriul a votat acordarea premiului 1 și celor ce realizaseră 41 puncte; pe bună dreptate, pentru numai un punct pierdut, poate ca urmare a unei simple neglijențe în argumentarea unei soluții, nu era cazul ca un concurent să piardă premiul 1.

Această situaţie a influenţat şi votul în legătură cu celelalte premii: s-au acordat 36 premii 1 pentru punctajele 41—42, 37 premii 2 pentru punctajele între 34—40 şi 30 premii 3 pentru punctajele între 26 şi 33.

Numărul maxim de premii 1 atribuit la vreuna din Olimpiadele 15—21 a fost 13 (la Olimpiada a 19-a, cu 155 concurenţi). La Olimpiada a 22-a, 16 ţări au avut premianţi 1 (una 5, două cîte 4, trei cîte 3 etc.), mai multe decît la toate cele şapte Olimpiade precedente (vezi 10.10) la un loc.

A fost anul 1981, pe plan internaţional, anul marilor talente matematice sau anul negru al problemisticii? Acestea ar reprezenta coincidenţe prea mari. De fapt, dificultatea setului de probleme de concurs a fost ceva mai mică decît era cazul.

Dacă se examinează cu atenţie lista de probleme propusă juriului (vezi 11.2 şi soluţiile lor în 11.3—11.9), se constată că aceasta nu este cu nimic inferioară ca adecvare la Olimpiadă listelor din anii trecuţi. Era şi de aşteptat, deoarece preşedintele comitetului de selecţie a problemelor (altul, la această Olimpiadă, decît preşedintele juriului) era un matematician cunoscut şi prin experienţa sa îndelungată într-o activitate analoagă la o revistă de înalt nivel din S.U.A. Nici o delegaţie nu a luat atitudine în juriu în direcţia coborîrii dificultăţii problemelor ce urmau să se dea concurenţilor. Deci procedura de alegere a acestor probleme, atît de bine apreciată la Olimpiadele trecute începînd cu a 19-a (vezi 7.4), conţinea o „fisură" ce făcea posibilă o astfel de situaţie. Este vorba de faptul că delegaţiilor nu li se cer explicaţii în legătură cu lista de ansamblu a celor şase probleme cărora ele le dau votul. Principiul ca două din ele să fie mai dificile, două medii şi două mai uşoare (vezi 3.9) este adesea încălcat prin aceste voturi, în loc de a doua mai dificilă votîndu-se una medie sau, mai degrabă, una simplă, în speranţa obţinerii de puncte mai multe; încălcarea este favorizată şi de neprecizia noţiunilor de dificilă, medie, simplă, exemplificate de mai multe ori în această lucrare.

La Olimpiadele trecute, efectele unui asemenea fenomen fuseseră neglijabile şi nimeni nu s-ar fi gîndit, în urma experienţei anterioare Olimpiadei a 22-a, să întreprindă ceva pentru a le contracara.

12

A 23-A OLIMPIADĂ INTERNAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ (Budapesta, Csegled, Ungaria, 1982)

12.1. Organizare

La această Olimpiadă au participat 30 țări: dintre cele prezente la Olimpiada a 22-a au lipsit LU și MX, au venit însă DD, MN și VN, pentru a doua oară DZ și prima dată KW.

Între Csegled și Budapesta sînt aproximativ 80 km.

Conform celor discutate la Olimpiada a 21-a (vezi 10.12), organizatorii au luat decizia de a invita delegații compuse din maximum 4 concurenți, față de 8, cum fusese la Olimpiadele precedente. Un prim efect al acestei modificări a fost creșterea valorii medii a concurenților. Aceasta a făcut și mai necesară luarea unor inițiative care să împiedice ca prin votul relativ la alegerea problemelor de concurs din lista propusă juriului să se ajungă la un set prea simplu în ansamblu și deci la un număr de concurenți cu punctaj maxim care să facă imposibilă aplicarea regulilor din 4.5 cu privire la premii (vezi 11.12).

Despre experiența președintelui comitetului de selecție, care a participat activ la toate ședințele din prima fază a lucrărilor juriului, se pot spune aceleași lucruri, în legătură cu un concurs de înalt nivel din Ungaria, ca despre cea a „omologului său" de la Olimpiada precedentă (vezi 11.12). În plus, el obținuse premiul 1 în calitate de concurent la Olimpiadele Internaționale a 6-a, a 7-a și a 8-a și premiul 2 la cea de a 5-a. Un alt fost concurent maghiar, cu aceleași rezultate la Olimpiadele menționate, acum membru corespondent al Academiei Ungare de Științe, a condus activitatea de coordonare.

O primă inițiativă a constat în a prezenta juriului o propunere concretă de listă de șase probleme de concurs (problemele A1—A6 de

la 12.2), o altă asemenea propunere „de rezervă" (problemele B1—B6 de la 12.2) şi o listă suplimentară de opt probleme în vederea înlocuirii eventuale a unor probleme din cele două liste precedente (problemele C1—C8 de la 12.2).

12.2. Problemele propuse juriului

A1-GB. *Fie f o funcţie definită pe mulţimea* $\{1, 2, 3, \ldots\}$, *cu valori în* $\{0, 1, 2, \ldots\}$, *care are proprietăţile:*

a) *pentru orice pereche* (m, n) *valoarea lui* $f(m+n) - f(m) - f(n)$ *este* 0 *sau* 1,

b) $f(2) = 0$, c) $f(3) > 0$, d) $f(9999) = 3333$.

Să se determine $f(1982)$.

A2-YU. *Se consideră un sistem de axe în plan şi un poligon convex în acel plan, astfel încît ariile intersecţiilor sale cu cele 4 cadrane să fie toate egale între ele. Se ştie că poligonul nu conţine în interiorul său nici un punct cu coordonate întregi, în afară de* $(0, 0)$. *Să se demonstreze că aria sa este cel mult* 4.

A3-SU. *Se consideră şirurile* $(x_n)_{n=0,1,\ldots}$ *de numere reale strict pozitive cu proprietăţile* $x_0 = 1$ *şi, pentru orice* $i \geq 0$, $x_{i+1} \leq x_i$.

a) *Să se demonstreze că pentru fiecare din aceste şiruri există un număr întreg* $n \geq 1$ *astfel încît* $(x_0^2/x_1) + (x_1^2/x_2) + \ldots + (x_{n-1}^2/x_n) \geq 3{,}999$.

b) *Să se dea un exemplu de astfel de şir pentru care, pentru orice* $n \geq 1$, *avem* $(x_0^2/x_1) + (x_1^2/x_2) + \ldots + (x_{n-1}^2/x_n) < 4$.

A4-BG. *Să se determine toate numerele reale a pentru care ecuaţia* $16x^4 - ax^3 + (2a + 17)x^2 - ax + 16 = 0$ *are patru rădăcini reale, distincte, ce formează o progresie geometrică.*

A5-NL. *Se consideră, pe diagonalele* AC, CE *ale unui hexagon regulat* $ABCDEF$, *punctele interioare* M, *respectiv* N, *astfel ca* $AM/AC = CN/CE = r$. *Să se determine* r *astfel încît* B, M, N *să fie coliniare.*

A6-VN. *Fie* S *un pătrat ale cărui laturi au lungime* 100 *şi fie* L *o linie poligonală situată în interiorul lui* S, *ce nu se autointersectează, compusă din segmentele de dreaptă* A_0A_1, $A_1A_2, \ldots A_{n-1}A_n$ *cu* $A_n \neq A_0$, *astfel încît pentru orice punct* P *de pe frontiera pătratului*

să existe un punct de pe L la distanță $\leq 1/2$ *de P. Să se demonstreze că există două puncte X și Y pe linia L astfel ca distanța dintre ele să fie* ≤ 1 *și astfel ca lungimea porțiunii din L cuprinse între X și Y să fie* ≥ 198.

B1-CA. *Fie* $P(x)$ *un polinom de gradul 3, cu coeficienți întregi, coeficientul lui* x^3 *fiind 1. Una din rădăcini este egală cu produsul celorlalte două. Să se demonstreze că* $2P(-1)$ *se divide cu* $P(1)+P(-1)-2(1+P(0))$.

B2-PL. *O figură convexă închisă este conținută într-un cerc. Din fiecare punct al cercului figura „se vede" sub un unghi drept. Să se demonstreze că figura are centrul cercului drept centru de simetrie.*

B3-GB. *Fie ABC un triunghi și P un punct în interiorul lui astfel ca* $\sphericalangle PAC = \sphericalangle PBC$. *Fie L, M picioarele perpendicularelor din P pe BC, CA respectiv. Fie D mijlocul lui AB. Să se demonstreze că* $DL = DM$.

B4-BR. *O cutie conține p bile albe și q bile negre. Se scot la întîmplare două bile din cutie. Dacă ele sînt de aceeași culoare, se pune la loc o bilă neagră (presupunem, evident, că avem, în afara cutiei, un număr suficient de bile...). Dacă ele sînt de culori diferite, se pune la loc o bilă albă. Se repetă procedura pînă cînd în cutie rămîne o singură bilă. Care este probabilitatea ca această ultimă bilă să fie albă?*

B5-CA. a) *Să se determine permutările* $(a_1, \ldots, a_n)$ *ale lui* $(1, \ldots, n)$ *pentru care* $a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1$ *este maximă.*

b) *Să se determine acele permutări pentru care suma de la* a) *este minimă.*

B6-FI. *Se consideră o dreaptă D și un cerc C exterior dreptei, al cărui centru este la distanța 1 de D. Se știe că există trei cercuri* C_1, C_2, C_3, *toate trei tangente la C și la D și tangente între ele două cîte două. Să se determine raza lui C.*

C1-NL. *Fie* $A_1A_2A_3$ *un triunghi neisoscel de laturi* a_1, a_2, a_3, a_i *fiind latura opusă lui* A_i. *Se notează cu* M_i *mijlocul laturii* a_i, *cu* T_i *punctul de contact al cercului înscris cu latura* a_i *și cu* S_i *simetricul lui* T_i *față de bisectoarea interioară a unghiului* A_i. *Să se demonstreze că dreptele* M_1S_1, M_2S_2, M_3S_3 *sînt concurente.*

C2-AU. *Se consideră în plan un patrulater convex ABCD. Fie,* A_1 *centrul cercului circumscris triunghiului BCD,* B_1, C_1, D_1, *analog centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ACD, ABD, ABC.*

a) *Să se demonstreze că sau* $A_1 = B_1 = C_1 = D_1$ (*și deci* $ABCD$ *este un patrulater inscriptibil*) *sau segmentele* A_1C_1 *și* B_1D_1 *au un punct interior comun* (*și deci* $A_1B_1C_1D_1$ *este un patrulater convex*).

b) *Fie* A_2 *centrul cercului circumscris triunghiului* $B_1C_1D_1$ *și, analog,* B_2, C_2 *și* D_2 *centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor* $A_1C_1D_1$, $A_1B_1D_1$ *și* $A_1B_1C_1$. *Să se demonstreze că patrulaterul* $A_2B_2C_2D_2$ *este asemenea cu patrulaterul* $ABCD$.

C3-CA. *Să se demonstreze că, dacă* $0 < a \leqslant 1$, $s \neq 1$, $s > 0$ *și* a *este rațional, atunci* $(1 - s^a)/(1 - s) \leqslant (1 + s)^a/(1 + s)$.

C4-GB. a) *Să se demonstreze că dacă* n *este un întreg pozitiv și dacă ecuația* $x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$ *are o soluție* (x, y) *în numere întregi, atunci ea are cel puțin trei astfel de soluții.*

b) *Să se demonstreze că pentru* $n = 2891$ *ecuația nu are nici o soluție în numere întregi.*

C5-SU. *Triunghiurile* ABC *și* AB_1C_1 *sînt asemenea, invers orientate și dreptunghice în* C, *respectiv* C_1; $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B_1AC_1$. *Fie* M *intersecția lui* BC_1 *cu* CB_1. *Să se demonstreze că* $AM \perp CC_1$, *dacă* $A \neq M$ *și* $C \neq C_1$.

C6-FR. *Fie* d_1, d_2, d_3 *trei drepte în spațiu ce trec prin punctul* O, *două cîte două perpendiculare. Fie* S *o sferă fixată, de centru* O *și rază* R. *Pentru orice punct* M *de pe* S *se consideră sfera* S_M *de centru* M *și rază* R, *sferă ce intersectează dreptele* d_1, d_2, d_3 *în punctele* P_1, P_2, P_3, *alese diferite de* O *dacă aceasta este posibil, deci dacă sfera* S_M *nu este tangentă dreptei respective. Să se afle locul geometric al centrului de greutate* G *al triunghiului* $P_1P_2P_3$.

C7-CS. *Fie* M *mulțimea tuturor numerelor reale de forma* $(m+n)/\sqrt{m^2 + n^2}$, *unde* m, n *parcurg mulțimea întregilor pozitivi. Să se demonstreze că pentru orice* u, $v \in M$, *pentru care* $u < v$, *există* $w \in M$ *astfel ca* $u < w < v$.

C8-TN. *Fie* $ABCD$ *un patrulater convex. Se construiesc triunghiurile echilaterale* ABM, CDP, BCN *și* ADQ, *primele două în exteriorul patrulaterului, celelalte două către interior. Ce se poate spune despre figura* $MNPQ$?

12.3. Soluțiile problemelor din lista de bază

Soluția problemei A1-GB (vezi 12.2). a) Vom presupune întîi numai că f are proprietatea a) din enunț, că $f(n) \geqslant 0$ pentru orice

$n = 1, 2, \ldots$ şi că $f(n)$ este întreg. Rezultă întîi $f(n) \leqslant f(n) + f(1) \leqslant \leqslant f(n + 1)$, deci f este nedescrescătoare.

Prin inducţie faţă de $k = 1, 2, \ldots$ deducem $kf(n) \leqslant f(nk) \leqslant kf(n) + k - 1$; într-adevăr, din această relaţie rezultă $(k + 1) f(n) = kf(n) + f(n) \leqslant f(nk) + f(n) \leqslant f(nk + n) = f(n(k + 1)) \leqslant f(nk) + f(n) + 1 \leqslant kf(n) + k - 1 + f(n) + 1 = (k + 1) f(n) + k$.

Să scriem relaţia dovedită sub forma $f(n)/n \leqslant f(nk)/(nk) \leqslant (f(n)/n) + (1/n)$. Obţinem

$$f(n)/n \leqslant \varliminf_{k} f(nk)/(nk) \leqslant \varlimsup_{k} f(nk)/(nk) \leqslant (f(n)/n) + (1/n).$$

Pe de altă parte, din monotonia lui f se deduce, pentru $nk \leqslant m \leqslant n(k + 1)$, inegalitatea

$$f(nk)/(n(k + 1)) \leqslant f(m)/m \leqslant f(n(k + 1))/(nk),$$

adică

$$(k/(k + 1))(f(nk)/(nk)) \leqslant f(m)/m \leqslant (f(n(k + 1))/n(k + 1))\ (k + 1)/k$$

şi apoi

$$\varliminf_{k} f(nk)/(nk) \leqslant \varliminf_{m} f(m)/m \leqslant \varlimsup_{m} f(m)/m \leqslant \varlimsup_{m} f(nk)/(nk).$$

Din cele două rezultate obţinute deducem $0 \leqslant (\varlimsup f(m)/m) - (\varliminf f(m)/m) \leqslant 1/n$, deci, n fiind arbitrar, existenţa lui $c = \lim f(m)/m$.

În plus, primul rezultat utilizat arată că $f(n)/n \leqslant c \leqslant (f(n) + 1)/n$, adică $cn - 1 \leqslant f(n) \leqslant cn$. Cu alte cuvinte $f(n) = [cn]$, cu excepţia eventual a unor cazuri în care cn este întreg, cînd se poate ca $f(n) = cn - 1$.

b) Să observăm acum că, oricare ar fi $c \geqslant 0$, funcţia $f(n) = [cn]$ satisface condiţiile de la începutul punctului a) al soluţiei. Într-adevăr, rezultă $cn = f(n) + a$, $cm = f(m) + b$, cu $0 \leqslant a$, $b < 1$, deci $c(m + n) = f(m) + f(n) + a + b$ şi $0 \leqslant a + b < 2$. Dacă $a + b \in [0, 1)$, atunci $f(m + n) = f(m) + f(n)$, iar dacă $a + b \in [1, 2)$, atunci $f(m + n) = f(m) + f(n) + 1$.

Ambiguitatea de la sfîrşitul lui a) nu poate fi eliminată, deoarece, pentru c raţional, funcţia $g(n)$, definită drept $[cn]$ pentru cn neîntreg şi $cn - 1$ pentru cn întreg, satisface condiţiile de la începutul punctului a) al soluţiei. Într-adevăr, raţionamentul precedent se repetă cu $0 < a$, $b \leqslant 1$, $0 < a + b \leqslant 2$; dacă $a + b \in (0, 1]$, atunci $f(m + n) = f(m) + f(n)$, iar dacă $a + b \in (1, 2]$, atunci $f(m + n) = f(m) + f(n) + 1$.

c) Pentru rezolvarea problemei este acum suficientă condiția d) din enunț. Aceasta atrage după sine (vezi a)) $f(9999)/9999 \leqslant c \leqslant (f(9999)+1)/9999$, adică $1/3 \leqslant c \leqslant (1/3)+(1/9999)$, deci $(1982/3) - 1 \leqslant 1982c - 1 \leqslant f(1982) \leqslant 1982c \leqslant (1982/3) + (1982/9999)$. Cum $1982/9999 < 3333/9999 = 1/3$, obținem $659 + (2/3) \leqslant f(1982) < 660 + (2/3) + (1/3)$ și răspunsul la problemă este $f(1982) = 660$.

Observație. Condiția $f(2) = 0$ cere ca $2c - 1 \leqslant 0 \leqslant c$, deci $0 \leqslant c \leqslant 1/2$, iar $f(3) > 0$ cere ca $1 \leqslant f(3) \leqslant 3c$, deci $c \geqslant 1/3$. La un loc ele implică $1/3 \leqslant c \leqslant 1/2$, ceea ce, după cum se verifică imediat, nu este suficient pentru a determina $f(1982)$, nici măcar $f(5)$.

Utilizînd și condițiile b) și c), se poate da o soluție elementară a problemei, ce a fost avută în vedere de autori. Anume, aplicînd a) din enunț pentru $m = n = 1$ și ținînd seama de b), se ajunge la $0 \leqslant -2f(1)$, $f(1) \leqslant 0$ și deci $f(1) = 0$. Apoi, pentru $m = 2$, $n = 1$ se obține $f(3) \leqslant 1$, deci (c din enunț) $f(3) = 1$. Acum, prin inducție, ca în punctul a) al soluției, se ajunge la $f(3k) \geqslant k$ și chiar la faptul că $f(3k) > k$ implică $f(3n) > n$ pentru $n > k$. Dar condiția d) arată că $f(3n) = n$ pentru $n = 3333$, deci $f(3n) = n$ și pentru $n \leqslant 3333$. Tot ca în punctul a) al soluției, dar în doi pași, se ajunge la $3f(n) \leqslant f(3n)$; de asemenea la faptul că f este nedescrescătoare. Pentru $n \leqslant 3333$, se obține $f(n) \leqslant n/3$, deci $k = f(3k) \leqslant f(3k+1) \leqslant f(3k+2) \leqslant k + (2/3)$, adică $f(3k+1) = f(3k+2) = k$ pentru $3k + 2 \leqslant 3333$, în particular pentru $1982 = 3 \cdot 660 + 2$ se regăsește rezultatul din soluția prezentată.

Soluția problemei A2-YU (vezi 12.2). Problema ajunge să devină simplă, dacă este începută în mod judicios, prin următorii pași. a) Se va demonstra afirmația prin reducere la absurd. b) Dacă un poligon E cu proprietățile din ipoteza din enunț are aria >4, atunci aria intersecției sale cu fiecare din cele patru cadrane este >1. c) Un poligon E cu acele proprietăți nu conține în interiorul său nici unul din punctele $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$. d) Poligonul E fiind convex, prin fiecare punct P dintre cele patru de la c) trece (cel puțin) cîte o dreaptă D_P care nu intersectează interiorul poligonului E. Poligonul este conținut în semiplanul S_P, determinat de D_P, în care se află $(0, 0)$, deoarece celălalt semiplan, determinat de D_P, are intersecție vidă cu unul din cele patru cadrane. e) Nici una din cele patru drepte D_P nu intersectează interioarele segmentelor ce unesc $(-1, 0)$ cu $(1, 0)$ și $(0, -1)$ cu $(0, 1)$, deoarece altfel aria semiplanului S_P corespunzător, intersectat cu unul din cadrane, ar fi mai mică decît aria unui triunghi OPQ, unde Q ar fi unul din cele trei puncte diferite de P de la c), deci decît $1/2$ (vezi fig. 178).

Acum, pentru a ajunge la o contradicție, se consideră fig. 179, în care $QX \perp D_P$, punctul Y este mijlocul lui PQ și cele două unghiuri marcate cu cîte o linie au aceeași măsură, ceea ce rezultă din teorema asupra sumei unghiurilor în patrulaterul $POQX$.

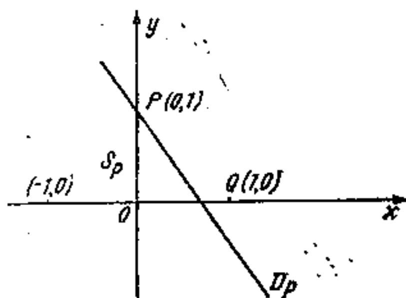


Fig. 178

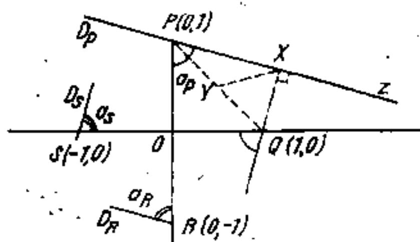


Fig. 179.

Înălțimea din X a triunghiului PQX este $\leqslant XY = PQ/2$, deci aria $PQX \leqslant PQ \cdot OY/2 =$ aria $POQ = 1/2$ și aria $POQX =$ aria $POQ +$ $+$ aria $PQX \leqslant 1$, egalitatea avînd loc dacă și numai dacă $XY \perp PQ$, deci $X = (1, 1)$. Intersecția poligonului E cu primul cadran are aria > 1, deci nu poate fi cuprinsă în $POQX$ și deci dreapta D_Q intersectează nu segmentul PX, ci semidreapta XZ din fig. 179. Aceasta arată că $a_Q < a_P$, în notații clare din aceeași figură.

Dar acum se obține în continuare $a_P > a_Q > a_R > a_S > a_P$, contradicție. Mai mult, se pot determina toate poligoanele E de arie egală cu 4. Pentru un astfel de poligon vom avea $a_P \geqslant a_Q \geqslant a_R \geqslant a_S \geqslant$ $\geqslant a_P$, deci $a_P = a_Q$ etc., deci $D_P \perp D_Q$ etc., în fig. 179 avem $D_Q = QX$, aria $POQX = 1$ și $X = (1,1)$. Deci singurul poligon cu proprietățile din enunt de arie 4 este pătratul de vîrfuri $(\pm 1, \pm 1)$.

Soluția problemei A3-SU (vezi 12.2). Problema se pune de fapt de a arăta că inferiorul x al tuturor $\sum_{n \geqslant 1} x_{n-1}^2/x_n$, cînd $(x_n)_{n=0,1,\ldots}$ parcurge toate șirurile necrescătoare de termeni strict pozitivi cu $x_0 = 1$, este $x = 4$.

Pentru a determina acel inferior x vom face o substituție, anume $x_n = y_n x_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, deci $x_n = y_1 \ldots y_n$, prin care variabile independente devin $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ și restricțiile ce rezultă, $0 < y_n \leqslant 1$ pentru orice n, sînt și ele independente.

Avem $\sum_{n \geqslant 1} x_{n-1}^2/x_n = \sum_{n \geqslant 1} y_1 \ldots y_{n-1}/y_n = (1/y_1) + (y_1/y_2) + (y_1 y_2/y_3) + \ldots$; să notăm aceasta cu $f(y_1, y_2, \ldots)$. Rezultă $f(y_1, y_2, y_3, \ldots) =$

$= (1/y_1) + y_1 \sum_{n\geq 2} (y_2 \cdots y_{n-1}/y_n) = (1/y_1) + y_1 f(y_2, y_3, \ldots)$, deci $x =$
$= \inf_{y_1, y_2, \ldots} f(y_1, y_2, \ldots) = \inf_{y_1} ((1/y_1) + y_1 \inf_{y_2, y_3, \ldots} f(y_2, y_3, \ldots)) = \inf_{y_1} ((1/y_1) +$
$+ y_1 x)$, unde în toate cazurile y_i sînt supuşi restricţiilor $0 < y_i \leq 1$.

Ultimul inf se calculează, de exemplu, conform inegalităţii între media aritmetică şi cea geometrică; el rezultă egal cu $2\sqrt{x}$, atins pentru $y_1 = 1/\sqrt{x}$, valoare compatibilă cu restricţiile, ca urmare a inegalităţilor $f(y_1, y_2, \ldots) \geq 1/y_1 \geq 1$, deci $x \geq 1$.

Se obţine pentru x ecuaţia $x = 2\sqrt{x}$, deci $x^2 = 4x$ şi, cum $x \geq 1$, rezultă, dacă x este finit, $x = 4$. Pentru a arăta că x este într-adevăr 4, deci că există şiruri $(x_n)_{n=0,1,\ldots}$ cu proprietăţile din enunţ pentru care $\sum_{n\geq 1} x_{n-1}^2/x_n$ este o serie convergentă, să determinăm şirul pentru care infimumul este atins. Din cele stabilite înainte aceasta corespunde la $y_1 = 1/2$, pentru ca $\inf_{y_1}$ să fie atins, şi la valori pentru care $\inf f(y_2, y_3, \ldots)$ este atins, deci $y_2 = 1/2$ etc., $y_n = 1/2$ pentru orice n. Rezultă că minimul este atins pentru şirul $x_n = 1/2^n$ şi avem $\sum_{n\geq 1} x_{n-1}^2/x_n = \sum_{n\geq 1} 2^{-n+2}$, serie ce este o progresie geometrică de raţie 1/2, deci convergentă. Se verifică imediat (dar nu mai era necesar) că suma ei este 4.

O b s e r v a ţ i e . Soluţia se poate transforma într-una elementară. Cum la valoarea minimă a sumei seriei s-a văzut că $x_n = x_{n-1}/2$, să pornim de la $0 \leq (x_{n-1} - 2x_n)^2 = x_{n-1}^2 - 4x_n(x_{n-1} - x_n)$, obţinînd $x_{n-1}^2/x_n \geq 4(x_{n-1} - x_n)$. Adunînd, rezultă $(x_0^2/x_1) + \ldots + (x_{n-1}^2/x_n) \geq$
$\geq 4(1 - x_n)$.

Pentru a rezolva punctul a), să căutăm întîi x_n aşa încît $4(1-x_n) \geq$
$\geq 3{,}999$, deci $x_n < 0{,}001/4$. Dacă $x_n \geq 0{,}001/4$ pentru orice n, atunci $x_{n-1}^2/x_n = x_{n-1}(x_{n-1}/x_n) \geq x_{n-1} \geq 0{,}001/4$ pentru orice n şi deci, alegînd n astfel ca $0{,}001\, n/4 \geq 3{,}999$, adică $n \geq 15\,996$, se obţine $(x_0^2/x_1) + \ldots + (x_{n-1}^2/x_n) \geq 0{,}001\, n/4 \geq 3{,}999$, inegalitatea cerută de enunţ.

Exemplul cu proprietăţile de la b) este $x_n = 2^{-n}$, pentru care $(x_0^2/x_1) + \ldots + (x_{n-1}^2/x_n) = 2 + 1 + \ldots + 2^{-n+2} = 4 - 2^{-n+2}$, rezultat obţinut prin înmulţire cu $1 = 2 - 1$.

Faptul că acesta este singurul exemplu rezultă astfel. Dacă $x_{k-1} - 2x_k \neq 0$ pentru un k, atunci, ca mai înainte, $x_{k-1}^2/x_k = 4(x_{k-1} -$
$- x_k) + c$ cu $c > 0$, deci pentru $n > k$ avem, în ipoteza că este îndeplinită condiţia de la b), $4 > (x_0^2/x_1) + \ldots + (x_{n-1}^2/x_n) \geq c + 4(1 - x_n)$, de unde $x_n \geq c/4$ pentru orice $n > k$ şi apoi, utilizînd alt

raționament precedent, $4 > (n - k)c/4$ pentru orice $n > k$, ceea ce constituie o contradicție pentru $n > k + (16/c)$.

Soluția problemei A4-BG (vezi 12.2). Această ecuație se rezolvă astfel. Se împarte cu x^2, se notează $u = x + x^{-1}$, deci $x^2 + x^{-2} = u^2 - 2$, și se ajunge la $16u^2 - au + 2a - 15 = 0$. Aceasta va avea două rădăcini u_1 și u_2. Apoi se vor rezolva ecuațiile $x + x^{-1} = u_1, u_2$, care vor avea rădăcinile de forma x_1, $x_2 = 1/x_1$ și x_3, $x_4 = 1/x_3$. Deci $x_1x_2 = x_3x_4$.

Într-o progresie geometrică b, bq, bq^2, bq^3 cu termeni reali, dacă $b \cdot bq = bq^2 \cdot bq^3$, atunci sau $b = 0$, caz în care toți termenii sînt nuli, sau $q^4 = 1$, deci $q = \pm 1$, caz în care termenii b, bq^2 sînt egali.

Analog, dacă $b \cdot bq^2 = bq \cdot bq^3$, rezultă $b = 0$ sau $q^2 = 1, q = \pm 1$. Cum problema cere ca progresia geometrică formată din rădăcinile ecuației să aibă termeni distincți, rezultă că numai egalitatea $b \cdot bq^3 = bq \cdot bq^2$, totdeauna adevărată, poate corespunde la $x_1x_2 = x_3x_4$, adică rădăcinile ecuației apar în progresie geometrică în ordinea x_1, x_3, $1/x_3$, $1/x_1$. Pentru ca aceasta să fie o progresie geometrică este necesar și suficient ca $x_3/x_1 = 1/x_3^2 = x_3/x_1$ (nici o rădăcină a ecuației nu este nulă, termenul liber fiind 16), deci ca $x_1 = x_3^3$.

Avem $u_1 = x_1 + x_1^{-1}$, $u_2 = x_3 + x_3^{-1}$, deci dacă $x_1 = x_3^3$, rezultă $u_2 = x_1^3 + x_1^{-3} = (x_1 + x_1^{-1})^3 - 3(x_1 + x_1^{-1}) = u_1^3 - 3u_1$. Reciproc, dacă $u_2 = u^3 - 3u_1$, atunci același calcul arată că, ridicînd la cub una din rădăcinile ecuației $x + x^{-1} = u_1$, se obține o rădăcină a lui $x + x^{-1} = u_2$.

Ecuația $x + x^{-1} = u$, adică $x^2 - ux + 1 = 0$, are rădăcini reale distincte dacă și numai dacă $u^2 - 4 > 0$, deci $|u| > 2$.

Problema se reduce deci la a determina a astfel ca ecuația $16u^2 - au + 2a - 15 = 0$ să aibă rădăcini u_1, u_2 reale, distincte, în modul mai mari ca 2, satisfăcînd $u_2 = u_1^3 - 3u_1$. O asemenea problemă se rezolvă, ca de obicei, cu ajutorul relațiilor Viète, în cazul nostru $u_1 + u_2 = a/16$, $u_1u_2 = (2a - 15)/16$; eliminarea lui a conduce la $u_1u_2 = 2(u_1 + u_2) - (15/16)$, care se scrie $(u_1 - 2)(u_2 - 2) = 49/16$. Condiția $u_2 = u_1^3 - 3u_1$ implică $u_2 - 2 = u_1^3 - 3u_1 - 2 = (u_1 - 2)(u_1^2 + 2u_1 + 1) = (u_1 - 2)(u_1 + 1)^2$. Împreună cu relația precedentă se ajunge la $((u_1 - 2)(u_1 + 1))^2 = 49/16$, $u_1^2 - u_1 - 2 = \pm 7/4$, deci sînt patru valori posibile pentru u_1, două ce sînt rădăcini ale ecuației $u_1^2 - u_1 - (15/4) = 0$, două ale ecuației $u_1^2 - u_1 - (1/4) = 0$. Însă trebuie să avem $|u_1| > 2$ și numai una din cele patru valori îndeplinește această condiție, anume $u_1 = 5/2$ (cele două ecuații au cîte o rădăcină pozitivă și una negativă, substituirea lui 2 și -2 în a doua conduce la valori pozitive etc.) și se obține, din $(u_1 - 2)(u_2 - 2) = 49/16$, $u_2 = 2 + (49/8) = 65/8 > 2$ și, de exemplu, $a =$

$=16(u_1+u_2) = 40 + 130 = 170$. Relația $u_1u_2 = (2a - 15)/16$ rezultă imediat dintr-unul din calculele precedente.

Soluția problemei A5-NL (vezi 12.2). Următoarele afirmații sînt echivalente. a) $AM/AC = CN/CE$. b) $AM = CN$ (ca urmare a faptului că $AC = CE$, triunghiul ACE fiind echilateral). c) $\Delta AMB = \Delta CND$ (ca urmare a faptului că $AB=CD$, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCN = 30°$). d) $\sphericalangle ABM = \sphericalangle CDN$.

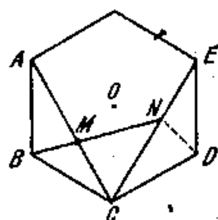


Fig. 180

Scriind suma unghiurilor în patrulaterul $BCDN$, se obține $120° + \sphericalangle CDN + \sphericalangle DNB + \sphericalangle CBM = 360°$, deci $\sphericalangle CDN + \sphericalangle CBM + \sphericalangle DNB = 240°$.

Pe această bază afirmațiile a) —d) sînt echivalentecu e) : $\sphericalangle ABM + \sphericalangle CBM + \sphericalangle DNB = 240°$ și cu f) : $\sphericalangle DNB = 120°$ (ca urmare a egalității $\sphericalangle ABM + \sphericalangle CBM = \sphericalangle ABC = 120°$).

Să observăm acum că, O fiind centrul cercului circumscris hexagonului (vezi fig. 180), punctele B, O, D sînt pe cercul de centru C și rază CD și că $\sphericalangle BOD = 120°$. Deci la șirul de afirmații echivalente se adaugă g) N este pe cercul de centru C și rază CD, h) $CN = CD$ și i) $r = CN/CE = 1/\sqrt{3}$ (deoarece $CE = CD\sqrt{3}$, vezi și b).

Cu aceasta problema este rezolvată ($0 < r < 1$, deci N rezultă în interiorul segmentului CE).

Există și o soluție analitică. Se pornește de la faptul că, dacă avem $X(a, b)$, $Y(c, d)$ și dacă Z este în interiorul segmentului XY, $XZ/XY = r$, atunci $Z(a + r(c - a), b + r(d - b))$ și r trebuie să fie < 1.

În fig. 180 se alege originea în B și axa Ox pe BD. Dacă R este raza cercului circumscris hexagonului, vom avea $A(0, R)$, $C(R\sqrt{3}/2, -R/2)$ și $E(R\sqrt{3}, R)$, deci $M(rR\sqrt{3}/2, R-3rR/2))$, $N((R\sqrt{3}/2)+(rR\sqrt{3}/2), -(R/2)+(3rR/2))$, sau $M(rR\sqrt{3}/2, (2-3r)R/2)$, $N((1+r)R\sqrt{3}/2, (3r-1)R/2)$. Punctele B, M, N sînt coliniare dacă și numai dacă $(1+r)/r = (3r-1)/(2-3r)$, ceea ce revine la $6r^2 = 2$, adică, r trebuind să fie în $(0, 1)$, la $r = 1/\sqrt{3}$.

Am folosit la un moment dat faptul că punctele $X(a, b)$, $Y(c, d)$ sînt coliniare cu originea axelor dacă și numai dacă $c/a = d/b$ etc.

Soluția problemei A6-VN (vezi 12.2.). Pe linia L punctele apar într-o ordine, anume A_0 la început, urmat de $A_1, \ldots, A_{n-1}$, la sfîrșit A_n, punctele de pe segmentul $A_{k-1}A_k$ apar după A_{k-1} și înainte de A_k etc.

Ideea este că va trebui să existe o latură a a pătratului, așa încît linia L să se apropie întîi la cel puțin 1/2 de a, apoi să se apropie la

fel de latura opusă, apoi din nou de a; totul relativ la ordinea descrisă. Porţiunile din a de care L se apropie prima dată şi cele de care L se apropie a doua oară vor avea un punct comun, se vor considera cele două puncte de pe cele două porţiuni ale lui L ce sînt apropiate de acel punct etc. Dar exemplul unui pătrat ceva mai mic decît cel dat, din care s-a suprimat un segment mic, în care X şi Y cerute de problemă nu pot fi găsite decît în vecinătatea celor două capete, arată că trebuie să fim cu mai multă grijă.

Pentru fiecare punct P de pe frontiera pătratului să considerăm cercul (plin) de centru P şi rază $1/2$, cerc ce va intersecta L după o mulţime nevidă, reuniune a unui număr finit de segmente, anume a intersecţiilor cercului cu segmentele ce formează L. Să notăm cu Z_P punctul de pe L, la distanţă cel mult $1/2$ de P, care apare primul, în ordinea de pe L, printre astfel de puncte, deci cel mai apropiat, pe L, de începutul A_0 al lui L. Punctul Z_P este capătul, dinspre A_0, al unuia din segmentele considerate înainte.

Printre cele patru vîrfuri ale pătratului să notăm cu M pe cel pentru care Z_M este cel mai apropiat de A_0, în ordinea de pe L. Să notăm cu N şi P vîrfurile pătratului ce nu sînt opuse lui M, notaţie aleasă astfel ca, în ordinea de pe L, Z_M, Z_N, Z_P să apară în această succesiune.

Să împărţim L în porţiunea L_1 de la A_0 la Z_N şi porţiunea L_2 de la Z_N la A_n.

Fie D mulţimea punctelor Q de pe latura MP pentru care Z_Q se află pe L_1 şi E mulţimea punctelor Q de pe MP pentru care există Y pe L_2 cu $\text{dist}(Q, Y) \leq 1/2$. Va fi suficient de arătat că $D \cap E$ nu este vidă: considerînd $Q \in D \cap E$, $X = Z_Q \in L_1$ şi $Y \in L_2$ cu $\text{dist}(Q, Y) \leq 1/2$, vom obţine punctele căutate X, Y (fig. 181). Într-adevăr, $\text{dist}(X, Y) \leq \text{dist}(X, Q) + \text{dist}(Q, Y) \leq (1/2) + (1/2) = 1$, iar porţiunea din L cuprinsă între X şi Y conţine pe Z_N şi deci lungimea ei va fi $\geq \text{dist}(X, Z_N) + \text{dist}(Z_N, Y) \geq (\text{dist}(Q, N) - \text{dist}(Q, X) - \text{dist}(N, Z_N)) + (\text{dist}(Q, N) - \text{dist}(Q, Y) - \text{dist}(N, Z_N)) \geq 2 \cdot 100 - 4 \cdot (1/2) = 198$.

Pentru a arăta că $D \cap E \neq \emptyset$ să observăm că $D \cup E$ umple segmentul MP şi că $M \in D$, $P \notin D$. Dacă arătăm că fiecare din mulţimile D, E este o reuniune finită de segmente, eventual degenerate în puncte, inclusiv capetele lor, atunci capătul cel mai dinspre P al segmentelor din D va fi şi în E şi problema va fi rezolvată. Să observăm şi că D şi E sînt definite, analog, prin L_1 şi L_2 şi deci va fi suficient să arătăm că D este o reuniune finită de segmente închise.

Mulţimea D este reuniunea tuturor mulţimilor de puncte R pentru care, pe unul din segmentele ce compun L_1, există T cu

dist$(R, T) < 1/2$. Pentru un segment dat, mulţimea punctelor R din plan pentru care există pe acel segment un punct T cu dist $(R, T) < 1/2$ este o reuniune de trei figuri convexe: un dreptunghi şi două semicercuri (vezi fig. 182), care intersectează segmentul MP, fiecare, după un segment, un punct sau după $\emptyset$ etc.

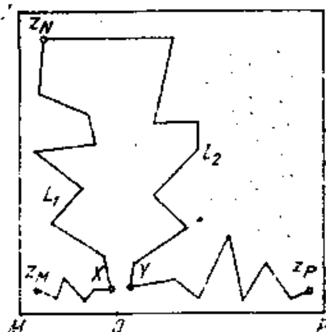


Fig. 181

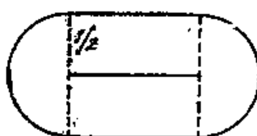


Fig. 182

12.4. Soluţiile problemelor din lista de rezervă

Soluţia problemei B1-CA (vezi 12.2). Fie deci $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_1x_2)$, cu a, b, c întregi. Avem $P(1) = 1 + a + b + c$, $P(-1) = -1 + a - b + c$, $P(0) = c$, deci $P(1) + P(-1) - 2(1 + P(0)) = 2(a - 1) = 2(-x_1 - x_2 - x_1x_2 - 1) = -2(1 + x_1)(1 + x_2)$, iar $2P(-1) = 2(-1 - x_1)(-1 - x_2)(-1 - x_1x_2) = -2(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_1x_2)$. Dacă $x_1 = -1$ sau $x_2 = -1$, ambele expresii din enunţ sînt nule, în caz contrar cîtul lor este $1 + x_1x_2$. Deci trebuie arătat că sau $x_1 = -1$, sau $x_2 = -1$, sau x_1x_2 este întreg. Utilizînd a treia relaţie Viète (pe lîngă prima ce a fost deja utilizată), ajungem la $x_1x_2(x_1x_2) = -c$, care este întreg. Deci dacă x_1x_2 nu este întreg, atunci acesta este de forma $\sqrt{-c}$ cu $c \neq 0$ şi deci ecuaţia, avînd coeficienţi întregi, va avea şi $-\sqrt{-c}$ ca rădăcină, de exemplu $x_1 = -\sqrt{-c}$, şi ar urma $x_2 = (x_1x_2)/x_1 = -1$, q.e.d.

Soluţia problemei B2-PL (vezi 12.2). Faptul că dintr-un punct A o mulţime închisă M se vede sub un unghi drept înseamnă că există un asemenea unghi BAC în care să fie conţinută întreaga mulţime

M şi aşa încît pe fiecare din laturile AB, AC ale acelui unghi să existe puncte din M. Dacă, în condiţiile enunţului, M este mulţimea şi A este pe cerc, atunci putem alege pe B şi C pe acel cerc; fie D punctul diametral opus lui A. Rezultă că unghiul drept din care se va vedea M din B va fi tocmai $\sphericalangle ABC$ (fig. 183) etc., deci M va fi inclusă în dreptunghiul $ABDC$ şi va avea cîte un punct, cel puţin, pe fiecare din laturile sale.

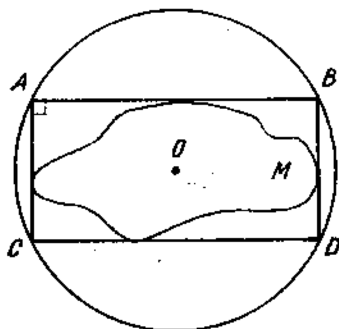


Fig. 183



Fig. 184

Fie N intersecţia tuturor dreptunghiurilor $ABDC$, cînd A parcurge cercul dat. Vom arăta că $M = N$ şi problema va fi rezolvată. Într-adevăr, dacă $P \in N$, atunci P aparţine oricărui $ABDC$, deci simetricul său Q faţă de centrul O al cercului va aparţine şi el lui $ABDC$ (deoarece O este centru de simetrie pentru fiecare din dreptunghiurile înscrise în cerc); cu alte cuvinte $Q \in N$.

Trebuie arătat deci că $M \subset N$ şi $N \subset M$. Prima incluziune a fost deja dovedită, ca urmare a faptului că M este conţinută în orice $ABDC$. Pentru a o demonstra pe a doua, vom arăta că $X \notin M$ implică $X \notin N$.

Să alegem, pentru aceasta, un punct $Y \in M$ aşa încît distanţa XY să fie minim posibilă; existenţa lui Y rezultă din proprietatea lui M de a fi închisă. Să considerăm perpendiculara d în Y pe XY.

O primă concluzie este că M este conţinută în semiplanul ce nu conţine X determinat de d. Într-adevăr, dacă $Z \in M$ ar contrazice această afirmaţie (fig. 184), atunci $\sphericalangle XYZ < 90°$, deci pornind din Y spre Z ne apropiem de piciorul perpendicularei din X pe YZ şi în acelaşi timp rămînem în M ca urmare a convexităţii acesteia (ea va conţine segmentul YZ); aceasta constituie însă o contrazicere a definiţiei lui Y.

Dreapta d va tăia cercul din enunţ (M este conţinută în acel cerc); fie A unul din punctele de intersecţie. Una din laturile dreptunghiului $ABDC$, corespunzător ca mai înainte lui A, va fi d şi, evident, X nu aparţine acelui dreptunghi, q.e.d.

Despre această problemă se poate spune acelaşi lucru ca şi despre 4-DE de la 7.2, 7.3.

Soluţia problemei B3-GB (vezi 12.2). Să fixăm punctele C, M, P, L. Să observăm că triunghiurile AMP şi BLP sînt asemenea (fig. 185), deci $AM/BL = MP/PL$ va fi constant; fie k valoarea sa. Dacă A şi

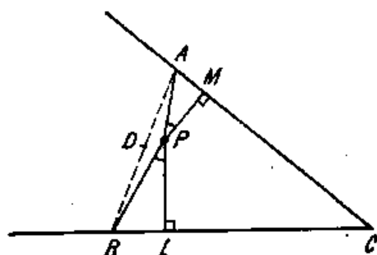


Fig. 185

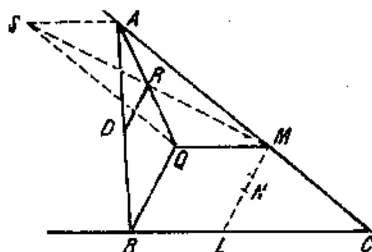


Fig. 186

B variază pe dreptele CM, CL aşa încît relaţia precedentă să fie adevărată, să determinăm locul geometric al mijlocului D al segmentului AB.

Cea mai elementară metodă constă în a duce $BQ \parallel LM$, $BQ = LM$ (fig. 186) şi a considera mijlocul R al lui AQ. Vom avea $RD \parallel QB \parallel ML$ şi $RD = QB/2 = ML/2$, deci D rezultă din R prin translaţia ce duce M în mijlocul N al lui ML. Pentru a determina locul geometric al lui R să completăm paralelogramul $AMQS$; punctele M, R, S vor fi coliniare. Avem $AM/AS = AM/BL = k$, deci triunghiul AMS rămîne mereu asemenea cu el însuşi şi $\sphericalangle AMR = \sphericalangle AMS$ rămîne constant. Am obţinut faptul că locul geometric al lui R este o dreaptă ce trece prin M, deci cel al lui D este translatata ei, adică o dreaptă ce trece prin N.

Raţionamentul de pînă aici s-ar fi simplificat mult dacă se lucra vectorial.

Pentru a determina acea dreaptă, să considerăm o poziţie particulară a lui D, anume cea în care A este intersecţia lui PL cu CM şi B este intersecţia lui PM cu CL (fig. 187), poziţie corespunzătoare

locului geometric, deoarece $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 90° - \sphericalangle C$. În acest caz M şi L se află pe cercul de diametru AB, deci $DM = DL$ şi D este pe mediatoarea lui LM. Locul geometric este în consecinţă acea mediatoare şi deci $DM = DL$ în toate situaţiile.

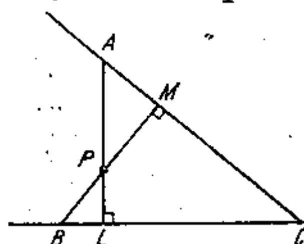


Fig. 187

Soluţia problemei B4-BR (vezi 12.2). După fiecare extracţie, numărul de bile din cutie scade cu o unitate, deci se va ajunge la un moment, anume după $p+q-1$ extracţii, în care în cutie va fi o singură bilă.

Dacă extracţia a produs 2 bile albe, atunci numărul de bile albe din cutie a scăzut cu 2. Dacă au apărut 2 bile negre sau una albă şi una neagră, numărul de bile albe din cutie a rămas neschimbat. Deci paritatea numărului de bile albe din cutie este mereu aceeaşi. Culoarea ultimei bile ce se va afla în cutie nu este întîmplătoare,ea rezultă albă dacă la început, în cutie, se găsea un număr impar de bile albe şi neagră în caz contrar. Răspunsul la problemă este, în consecinţă, 1 dacă p este impar şi 0 dacă p este par.

Soluţia problemei B5-CA (vezi 12.2). Numărul de permutări fiind finit, atît maximul, cît şi minimul sumei din enunţ sînt atinse.

Permutările circulare $(a_1, \ldots, a_n) \to (a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n, a_1, a_2, \ldots, a_{i-1})$ nu modifică suma, deci ne putem limita la permutări cu $a_1 = 1$.

Pentru a stabili proprietăţile unor permutări ce realizează maximul, respectiv minimul, vom considera o anumită transformare a unei permutări, ce schimbă cît mai puţin suma din enunţ, anume înlocuirea în $(a_1, \ldots, a_n)$, pentru $1 \leqslant i < j-2 < j \leqslant n$ daţi, a porţiunii $(a_{i+1}, \ldots, a_{j-1})$ cu $(a_{j-1}, a_{j-2}, \ldots, a_{i+1})$. Prin aceasta dispar din sumă termenii $a_i a_{i+1}$ şi $a_{j-1} a_j$ şi apar $a_i a_{j-1}$ şi $a_{i+1} a_j$, deci suma creşte cu $(a_i - a_j)(a_{j-1} - a_{i+1})$.

Se obţin următoarele concluzii. Într-o permutare $(a_1, \ldots, a_n)$ ce realizează maximul, dacă $a_i < a_j$ şi $i < j-2$, atunci $a_{i+1} < a_{j-1}$, iar dacă $a_i > a_j$ şi $i < j-2$, atunci $a_{i+1} > a_{j-1}$. Într-una ce realizează minimul au loc implicaţii analoage, cu inversarea sensului inegalităţilor ce rezultă.

Aplicînd această concluzie permutării $(1, a_2, \ldots, a_n)$ ce realizează maximul, cu $i = 1$ şi $j = 4, \ldots, n$, rezultă $a_2 < a_3$, $a_2 < a_4, \ldots, a_2 < a_{n-1}$ ca urmare a faptului că $a_1 = 1 < a_4, \ldots, a_n$, iar pentru aceea ce realizează minimul rezultă analog $a_2 > a_3, \ldots, a_{n-1}$.

Nu putem completa cele obţinute înainte cu $a_2 < a_n$, respectiv $a_2 > a_n$, deoarece transformarea $(a_1, \ldots, a_n) \to (a_1, a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2)$ lasă neschimbată suma din enunţ. Deci se poate pur şi simplu presupune (înlocuind, dacă este cazul, permutarea cu cea transformată astfel) că $a_2 < a_n$ în situaţia de maxim şi $a_2 > a_n$ în cea de minim. Împreună cu cele stabilite anterior, aceasta conduce la $a_2 = 2$ în cazul de maxim şi la $a_2 = n$ în cel de minim.

Înlocuind permutările $(1, 2, a_3, \ldots, a_n)$, respectiv $(1, n, a_3, \ldots, a_n)$, din cazurile de maxim, respetiv, minim, cu $(b_1, \ldots, b_n) = (2, a_3, \ldots, a_n, 1)$, respectiv $(n, a_3, \ldots, a_n, 1)$ (conform observaţiei de la începutul soluţiei) şi aplicînd încă o dată concluzia dinainte pentru $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n-3$ şi $j = n$, deducem, pe baza inegalităţilor $b_1 > b_n, \ldots, b_{n-3} > b_n$, inegalităţile $a_3 > a_n, \ldots, a_{n-1} > a_n$ în cazul de maxim şi $a_3 < a_n, \ldots$ $\ldots, a_{n-1} < a_n$ în cel de minim, care implică $a_n = 3$ în primul caz şi $a_n = n - 1$ în cel de-al doilea.

Revenind în cele două cazuri la $(1, 2, a_3, \ldots, a_{n-1}, 3)$, respectiv $(1, n, a_3, \ldots, a_{n-1}, n - 1)$, şi aplicînd aceeaşi concluzie pentru $i = 2$ şi $j = 5, \ldots, n$, se obţine analog $a_3 = 4$, respectiv $a_3 = 2$, deci permutările ce dau maximul, respectiv minimul, sînt de forma $(1, 2, 4, a_4, \ldots, a_{n-1}, 3)$, respectiv $(1, n, 2, a_4, \ldots, a_{n-1}, n - 1)$.

Acum pentru $i = 3, 4, \ldots, n - 3$ şi $j = n$ se obţine $a_{n-1} = 5$, respectiv $a_{n-1} = 3$ etc.

Permutarea ce realizează maximul va fi deci $(1, 2, 4, 6, \ldots, 7, 5, 3)$ iar cea ce realizează minimul $(1, n, 2, n - 2, 4, \ldots, 5, n - 3, 3, n - 1)$. Evident că scrierea explicită a inducţiilor respective apare greoaie.

În cazul de maxim să prezentăm ca exemple $(1, 2, 4, 3)$, $(1, 2, 4, 5, 3)$, $(1, 2, 4, 6, 5, 3)$, iar în cel de minim $(1, 4, 2, 3)$, $(1, 5, 2, 3, 4)$, $(1, 6, 2, 4, 3, 5)$, $(1, 7, 2, 5, 4, 3, 6)$, $(1, 8, 2, 6, 4, 5, 3, 7)$. Pentru $n = 3$ toate sumele din enunţ sînt egale între ele, pentru $n = 4$ suma este $(a_1 + a_3)(a_2 + a_4)$ şi maximul este atins pentru $a_1 + a_3 = a_2 + a_4$ etc., minimul pentru $a_1 + a_3 = 3$ (minim posibil).

Observaţie. Problema de maxim are o anumită legătură cu problema SE2 din 10.2, 10.6, după cum se vede scriind suma, cu $a_1 = 1$, sub forma $a_2 + a_2 a_3 + \ldots$ $\ldots + a_{n-1} a_n + a_n = (a_2 - 1)(a_3 - 1) + \ldots + (a_{n-1} - 1)(a_n - 1) - (n - 2) + 2(a_2 + \ldots$ $\ldots + a_n)$ şi observînd că $a_2 + \ldots + a_n$, ca şi $(a_2 - 1) + \ldots + (a_n - 1)$, sînt constante. Aici însă $a_1, \ldots, a_n$ sînt supuşi la mai multe restricţii şi sistemul de valori ce corespunde maximului se apropie doar de cel din 10.5.

Soluţia problemei B6-FI (vezi 12.2). Nu este clar de la început dacă raza lui C este unic determinată de condiţiile din enunţ. Putem alege în diverse moduri trei cercuri tangente două cîte două şi tangente la D, construi cercul tangent la toate trei şi aplica o omotetie cu centrul pe D care să aducă la distanţa 1 de D centrul ultimului

cerc. Nu este sigur că raza cercului în care va fi dus acest ultim cerc de acea omotetie va fi aceeaşi în toate cazurile (fig. 188).

Problema conţine multe cercuri. Transformarea prin inversiune permite a reduce numărul lor, alegînd, evident, centrul de inversiune aşa încît acesta să fie situat pe cît mai multe din aceste cercuri. O primă idee este de a-l alege într-unul din cele şase puncte de contact a cîte două cercuri din fig. 188. Prin aceasta cele două cercuri se vor

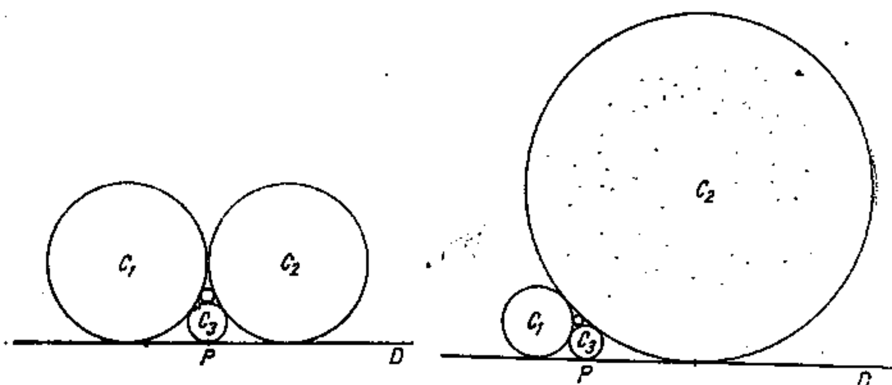


Fig. 188

transforma în drepte, dar D într-un cerc. Deci o astfel de alegere nu este mai judicioasă decît plasarea centrului de inversiune în punctul de contact P cu D, de exemplu, al lui C_3.

Problema dă distanţa de la centrul lui C la D şi cere să se calculeze raza lui C. Este de dorit ca inversiunea aleasă să nu modifice aceste elemente. Aceasta se poate realiza, dacă P este centrul ei, prin fixarea puterii acestei inversiuni astfel încît cercul C să se transforme în el însuşi, deci egală cu puterea lui P faţă de C. Dreapta D se va transforma, evident, în ea însăşi.

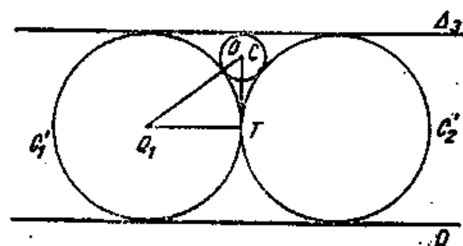


Fig. 189

Inversiunea descrisă mai înainte va transforma C_3 într-o dreaptă D_3 paralelă cu D şi tangentă la C, iar cercurile C_1 şi C_2 în două cercuri tangente între ele C_1' şi C_2' şi tangente şi la D şi la D_3 şi la C. După transformare, situaţia va fi deci cea din fig. 189.

Situația din această figură este simplă. Cercurile C_1' și C_2' au aceeași rază, tangenta lor comună este axă de simetrie a întregii figuri. Dacă notăm cu x raza necunoscută a cercului C, atunci, cum distanța de la centrul său O la D este 1, distanța între D și D_3 va fi $1 + x$, raza cercurilor C_1' și C_2' va fi $(1 + x)/2$, distanța de la O la punctul de contact T al acelor cercuri va fi $1 - (1 + x)/2 = (1 - x)/2$, iar cea de la O la centrul Q_1 al lui C_1' va fi $x + (1+x)/2 = (1 + 3x)/2$. Teorema lui Pitagora în triunghiul OTQ_1 conduce la $(3x + 1)^2 = (1+x)^2+(1 - x)^2$, $7x^2+6x - 1 = 0$, deci, rădăcina negativă neconvenind, la $x = (-3 + \sqrt{16})/7 = 1/7$.

Situația din fig. 189 este posibilă, ceea ce se arată cu ușurință construind triunghiul dreptunghic OTQ_1 etc. Aplicînd acestei figuri o inversiune al cărei centru este pe D, diferit de cele două puncte de contact și a cărei putere este egală cu puterea centrului față de cercul C, se arată și posibilitatea situației din fig. 188. Dacă se acceptă dreapta ca un caz limită al unui cerc, atunci acea posibilitate este garantată chiar de fig. 189.

12.5. Soluțiile problemelor suplimentare

Soluția problemei Cl-NL (vezi 12.2). Dacă arătăm că $M_1M_2 \| S_1S_2$, $M_2M_3 \| S_2S_3$ și $M_3M_1 \| S_3S_1$, atunci va rezulta că M_1S_1, M_2S_2 și M_3S_3 sînt concurente sau paralele, cu excepția unor cazuri speciale cum sînt cele din fig. 190. Într-adevăr, dacă, de exemplu, M_1S_1

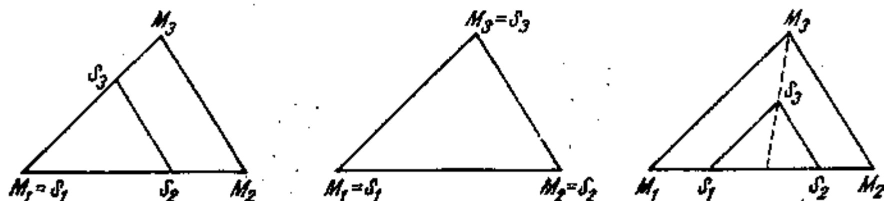


Fig. 190

și M_2S_2 se intersectează într-un punct V, atunci omotetia de centru V ce duce M_1 în S_1 va duce M_2 în S_2, ca urmare a faptului că $M_1M_2 \| S_1S_2$, și M_3 într-un punct S_3' pentru care $S_1S_3' \| M_1M_3$ și $S_2S_3' \| M_2M_3$. Rezultă că S_1S_3' și S_2S_3' vor coincide respectiv cu S_1S_3 și S_2S_3, deci $S_3' = S_3$ și, dacă $S_3 \neq M_3$, dreapta S_3M_3 va trece și ea prin V etc. (fig. 191).

Această metodă de a rezolva problema este încurajată de observația că $M_1M_2 \| A_1A_2$ etc., ca linii mijlocii în triunghiul $A_1A_2A_3$. Deci va fi suficient de arătat că $S_1S_2 \| A_1A_2$ etc. și de eliminat cazurile speciale.

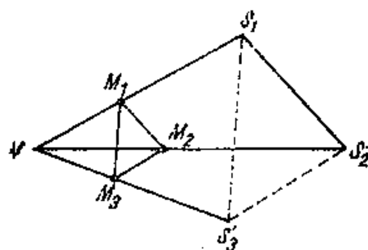


Fig. 191

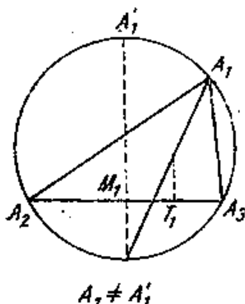


Fig. 192

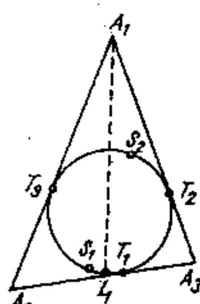


Fig. 193

Bisectoarea unghiului A_1 este diametru în cercul înscris, T_1 este pe acest cerc, deci și simetricul său S_1 față de acel diametru se va afla pe cercul înscris. Analog S_2, S_3. Cu aceasta s-a arătat și imposibilitatea primelor două cazuri speciale din fig. 190, punctele M_1, M_2, M_3 fiind în afara cercului înscris, ca urmare a faptului că $\Delta A_1A_2A_3$ este neisoscel (fig. 192). De asemenea, putem trage și concluzia că este imposibil ca $M_1S_1 \| M_2S_2 \| M_3S_3$, deoarece ar rezulta că $S_1S_2S_3$ se obține din $M_1M_2M_3$ printr-o translație (după ce vom fi demonstrat că $S_1S_2 \| M_1M_2$ etc.), însă orice translație aplicată lui $M_1M_2M_3$ face ca acesta să nu mai fie conținut în $A_1A_2A_3$, așa cum este $S_1S_2S_3$.

Abia acum este cazul să facem figura corespunzătoare problemei, nereprezentînd elementele de prisos (fig. 193), în schimb reprezentînd intersecția L_1 a cercului înscris în $A_1A_2A_3$ cu bisectoarea lui A_1, mai apropiată de latura A_2A_3.

Pentru a arăta că $S_1S_2 \| A_1A_2$ va trebui să arătăm că arc $T_3S_1 =$ $=$ arc T_3S_2. Cum T_2 și T_3 sînt simetrice față de bisectoarea lui A_1, punctul S_1 va fi pe arcul $T_2T_1T_3$ și, analog, S_2 va fi pe arcul $T_1T_2T_3$.

Simetria lui T_1 și S_1 față de bisectoare se traduce prin arc $T_3T_1 +$ $+$ arc $T_3S_1 = 2$ arc T_3L_1. Ca urmare a simetriei lui T_2 și T_3 față de bisectoare avem 2 arc $T_3L_1 =$ arc $T_3T_1T_2$ și deci arc $T_3S_1 =$ arc $T_3T_1T_2 -$ $-$ arc $T_3T_1 =$ arc T_1T_2. La fel se obține, cum rezultatul este simetric în 1, 2, arc $T_3S_2 =$ arc T_2T_1, deci arc $T_3S_1 =$ arc T_3S_2, q.e.d. (nu am eliminat cazul special 3 din fig. 190).

Soluția problemei C2-AU (vezi 12.2). Este suficient ca două din punctele A_1, B_1, C_1, D_1 să coincidă pentru ca distanțele de la punctul respectiv la cele patru vîrfuri ale patrulaterului să fie egale și deci patrulaterul să fie inscriptibil într-un cerc cu centrul în acel punct. Deci sau $ABCD$ este inscriptibil, sau A_1, B_1, C_1, D_1 sînt două cîte două distincte. Vom considera de acum încolo numai cazul al doilea.

Punctele A_1 și C_1 sînt egal depărtate de B și D, deci A_1C_1 este mediatoarea diagonalei BD. Analog B_1D_1 este mediatoarea diagonalei AC. Pentru a demonstra a) trebuie arătat că A_1 și C_1 sînt de o parte și de alta a mediatoarei lui AC (analog va rezulta și, schimbînd rolurile, că B_1 și D_1 sînt de o parte și de alta a mediatoarei lui BD). Aceasta înseamnă că dacă $A_1A > A_1C$, atunci $C_1A < C_1C$, iar dacă $A_1A < A_1C$, atunci $C_1A > C_1C$ (fig. 194). Nu poate avea loc egalitatea în nici una din cele patru relații, deoarece, de exemplu din prima, ar urma, împreună cu $A_1D = A_1C = A_1B$, că $ABCD$ este inscriptibil într-un cerc de centru A_1.

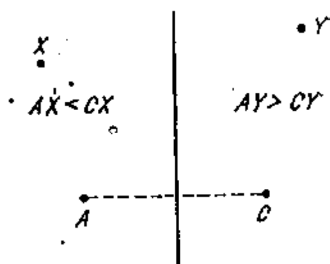


Fig. 194

Traducînd mai departe ceea ce trebuie demonstrat, ținînd seama și de $C_1A = C_1B = C_1D$, vedem că aceasta revine la: dacă A este în afara cercului BCD, atunci și C este în afara cercului ABD, iar dacă A este în interiorul cercului BCD, atunci și C este în interiorul cercului ABD.

Cele două cercuri ABD și BCD au BD drept coardă comună, deci sînt secante și, dacă ducem linia centrelor lor, cele patru puncte de intersecție M, N, respectiv P, Q apar în ordinea M, P, N, Q,

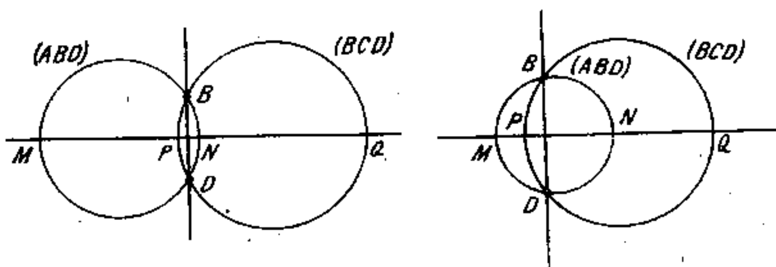


Fig. 195

adică alternativ (fig. 195). Punctele A şi C sînt de o parte şi de alta a dreptei BD (patrulaterul $ABCD$ fiind convex).

Deci sau A este pe arcul BMD şi C pe arcul BQD şi atunci A este în afara cercului BCD şi C este în afara cercului ABD, sau A este pe arcul BND şi C pe arcul BPD şi atunci A este în interiorul cercului BCD şi C este în interiorul cercului ABD. Cu aceasta afirmaţia ce dovedeşte a) este demonstrată. Figura problemei este cea din fig. 196.

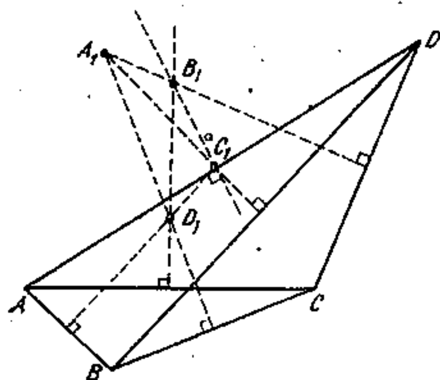


Fig. 196

Pentru a demonstra b) să observăm că $A_1B_1 \perp CD$, $A_1C_1 \perp BD$, $A_1D_1 \perp BC$, $B_1C_1 \perp AD$, $B_1D_1 \perp AC$, $C_1D_1 \perp AB$, deci, aplicînd aceste concluzii patrulaterului $A_1B_1C_1D_1$, de asemenea $A_1B_1 \perp C_2D_2$, $A_1C_1 \perp B_2D_2$, $A_1D_1 \perp B_2C_2$, $B_1C_1 \perp A_2D_2$, $B_1D_1 \perp A_2C_2$, $C_1D_1 \perp A_2B_2$ şi deducem $A_2B_2 \| AB$, $A_2C_2 \| AC$, $A_2D_2 \| AD$, $B_2C_2 \| BC$, $B_2D_2 \| BD$, $C_2D_2 \| CD$. Deci triunghiul ABC este asemenea cu $A_2B_2C_2$, $\triangle ACD$ cu $\triangle A_2C_2D_2$, AC şi A_2C_2 sînt diagonale în patrulaterele convexe $ABCD$ şi $A_2B_2C_2D_2$ etc., dovedind b).

Se poate arăta, ca la începutul soluţiei problemei Cl-NL, că $A_2B_2C_2D_2$ rezultă din $ABCD$ printr-o omotetie sau o translaţie.

Soluţia problemei C3-CA (vezi 12.2). Putem lăsa deoparte cazul $a = 1$, în care inegalitatea devine $1 = 1$. Fie deci $0 < a < 1$.

Dacă inegalitatea este valabilă pentru a şi s, atunci ea va fi valabilă şi pentru a şi $1/s$, deoarece, înlocuind în inegalitate s cu $1/s$, se obţine $(s^a - 1)s^{1-a}/(s-1) \leqslant s^{1-a}(s+1)^{a-1}$, deci „acelaşi lucru". Putem în consecinţă presupune $s < 1$ şi scrie relaţia de demonstrat sub forma $1 - s^a \leqslant (1-s)(1+s)^{a-1}$ sau $f(s) \geqslant 0$, pentru $s \in (0, 1)$, cu $f(s) = (1-s)(1+s)^{a-1} - (1-s^a)$.

Avem $f(0) = f(1) = 0$, deci, dacă vom dovedi existenţa unui $c \in (0, 1)$ aşa încît $f'(s) > 0$ pentru $s \in (0, c)$ şi $f'(s) < 0$ pentru $s \in (c, 1)$, problema va fi rezolvată, f crescînd de la $0 = f(0)$ la $f(c) > 0$ şi apoi descrescînd la $f(1) = 0$.

Se calculează

$$f'(s) = (1-s)(a-1)(1+s)^{a-2} - (1+s)^{a-1} + as^{a-1} =$$
$$= s^{a-1}\left(a + \left(\left(\frac{1}{s}-1\right)(a-1) - \left(\frac{1}{s}+1\right)\right)\left(1 + \frac{1}{s}\right)^{a-2}\right) =$$
$$= s^{a-1}\left(a + \left(1+\frac{1}{s}\right)^{a-2}\left((a-2)\frac{1}{s} - a\right)\right),$$

deci semnul ei va fi semnul lui $g(t) = a + (1+t)^{a-2}((a-2)t-a))$, unde $t = 1/s$, în consecință $t \in (1, \infty)$.

Derivata lui g este

$$g'(t) = (1+t)^{a-2}(a-2) + (a-2)(1+t)^{a-3}((a-2)t-a) =$$
$$= (a-2)(1+t)^{a-3}(1+t+(a-2)t-a) =$$
$$= (a-2)(1+t)^{a-3}(a-1)(t-1) > 0$$

pentru $t \in (1, \infty)$, deci g este crescătoare pe $(1, \infty)$. Avem

$$\lim_{t\to+\infty} g(t) = \lim_{t\to+\infty} (a + t^{-1}(t^{-1}+1)^{a-2}(a-2-at^{-1})) = a + 0 = a > 0.$$

ca urmare a ipotezei $a < 1$.

Ar trebui acum studiat semnul lui $g(1)$, dar se poate ocoli această problemă : g va fi pozitivă pe un interval (d,∞) și, eventual, dacă $d > 1$, negativă pe $(1, d)$, deci f' va fi pozitivă pe $(0, d^{-1})$ și eventual negativă pe $(d^{-1}, 1)$, dar eventualitatea are loc, altfel $0 = f(1) > f(0) = 0$.

Cu aceasta inegalitatea este dovedită.

Pentru completitudine să observăm că $g(1) = h(a) = a - 2^{a-1} = (2a - 2^a)/2$, $h'(a) = (2 - 2^a \ln 2)/2 > 0$ pentru $a \in (0, 1)$, deoarece $2^a \ln 2 < 2\ln 2 < 2$, ca urmare a inegalității $\ln 2 < \ln e = 1$, deci $g(1) = h(a) < h(1) = 0$.

Pentru a rațional există însă o demonstrație elementară, adică fără derivate. Anume, fie $a = m/n$ cu $0 < m < n$ și $s = t^n$, deci inegalitatea revine la $(1-t^m)/(1-t^n) \leqslant (1+t)^{(m-n)/n}$. Pentru $m=n$ această inegalitate devine $1 = 1$. Vom dovedi că dacă ea este adevărată pentru m, rezultă adevărată pentru $m-1$ și cu aceasta inegalitatea va fi demonstrată. Prin trecerea de la m la $m-1$ membrul stîng se înmulțește cu $(1-t^{m-1})/(1-t^m)$, iar cel drept cu $(1+t^n)^{-1/n}$. Deci inegalitatea va fi dovedită dacă vom arăta că $(1+t^n)^{-1/n} > (1-t^{m-1})/(1-t^m)$, adică $1 + t^n < x^n$, unde $x = (1-t^m)/(1-t^{m-1})$ Relația $1 + t^n < x^n$ se scrie $(x-t)(x^{n-1} + x^{n-2}t + \ldots + t^{n-1}) > 1$. Avem $x - t = (1-t)/(1-t^{m-1}) = (1+t+\ldots+t^{m-2})^{-1}$ și $x = (1+t+\ldots+t^{m-1})/(1+t+\ldots+t^{m-2}) > 1$, deci $(x^{n-1} + x^{n-2}t + \ldots + t^{n-1})(x-t) > (1+t+\ldots+t^{n-1})/(1+t+\ldots+t^{m-2}) > 1$, q.e.d.

Demonstrația elementară corespunde unei soluții cu ajutorul derivatelor, mai complicată decît cele două prezentate, în care se studiază $(1 - s^a)(1 + s)^{1-a}$ ca funcție de a, pentru $s < 1$, pe $(0, 1)$.

Soluția problemei C4-GB (vezi 12.2). Ideea este de a găsi o transformare $(x, y) \to (ax + by, cx + dy)$, cu a, b, c, d întregi, care să nu modifice expresia $x^3 - 3xy^2 + y^3$, deci astfel ca $x^3 - 3xy^2 + y^3 = (ax + by)^3 - 3(ax + by)(cx + dy)^2 + (cx + dy)^3$ ca polinoame.

Egalitatea coeficienților lui x^3 cere ca $a^3 - 3ac^2 + c^3 = 1$, pentru care sînt evidente soluțiile $(a, c) = (1, 0)$ și $(0, 1)$. Prima soluție nu dă nimic, deoarece $x \to x + by, y \to dy$ conduc la $(x + by)^3 - 3(x + by)d^2y^2 + d^3y^3$, care are $3bx^2y$ ca termen în x^2y, deci $b = 0$ și se ajunge la $x^3 - 3d^2xy^2 + d^3y^3$ care cere $d^3 = 1$, $d = 1$ și transformarea se reduce la cea identică $(x, y) \to (x, y)$.

A doua soluție conduce însă la un rezultat. Este vorba de o transformare de forma $x \to by, y \to x + dy$, prin care $x^3 - 3xy^2 + y^3$ devine $b^3y^3 - 3by(x + dy)^2 + (x + dy)^3 = x^3 + 3(d - b)x^2y + 3d(d - 2b)xy^2 + (b^3 - 3bd^2 + d^3)y^3$. Pentru ca aceasta să coincidă cu $x^3 - 3xy^2 + y^3$ trebuie ca $d = b$ (coeficientul lui x^2y); ea se reduce prin aceasta la $x^3 - 3d^2xy^2 - d^3y^3$ și $d = -1$ (deci $b = -1$) o face să devină $x^3 - 3xy^2 + y^3$. Transformarea căutată este $(x, y) \to (-y, x - y)$.

Am ajuns la concluzia că dacă (x, y) este o soluție a ecuației $x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$, atunci și $(-y, x - y)$ este o soluție a acestei ecuații. Aplicînd aceasta și soluției $(-y, x - y)$, se obține soluția $(y - x, -x)$, dar, aplicînd concluzia acesteia, se revine la soluția (x, y).

Pentru a dovedi a) mai trebuie arătat că printre perechile (x, y), $(-y, x - y)$, $(y - x, -x)$ nu există două identice. Cum acestea corespund în ordine ciclică prin $(x, y) \to (-y, x - y)$, va fi suficient să considerăm situația cînd primele două ar coincide, adică $(x, y) = (-y, x - y)$, care revine la $x = -y$, $y = x - y$, apoi la $y = -2y$, $y = 0$, $x = 0$, $n = 0$, caz care este exclus de ipoteza problemei.

Punctul b) se demonstrează prin cu totul altă metodă, utilizînd însă rezultatul de la punctul a). Anume se consideră resturile împărțirilor cu un anumit număr p. Coeficientul 3 sugerează $p = 3$. Avem $x^3 \equiv x \pmod 3$ pentru orice x întreg (mica teoremă Fermat sau $x^3 - x = (x - 1)\,x(x + 1)$ etc.), deci, cum $2891 \equiv 2 \pmod 3$, ecuația considerată cere ca $x + y \equiv 2 \pmod 3$, ceea ce corespunde la posibilitățile $x \equiv y \equiv 1 \pmod 3$, $x \equiv 0$ și $y \equiv 2$, sau $x \equiv 2$ și $y \equiv 0$, toate mod 3.

Prin transformările obținute cu ocazia rezolvării punctului a), cazul $(1, 1)$ corespunde la $(2, 0)$ și apoi la $(0, 2)$, toate mod 3. Deci este suficient să considerăm o soluție de forma $x = 3k$, $y = 3r - 1$. Introdusă în ecuație, aceasta conduce la $27k^3 - 9k(3r - 1)^2 + 27r^3 -$

$-27r^2 + 9r - 1 = 2891$, adică la $2892 = 9s$, ceea ce nu este adevărat (2892 nu se divide cu 9). Astfel s-a demonstrat inexistența soluțiilor întregi pentru ecuația $x^3 - 3xy^2 + y^3 = 2891$.

O b s e r v a ț i e. Există o soluție a punctului b) și lucrînd modulo 7. Anume, fie (x, y) o soluție întreagă a ecuației $x^3 - 3xy^2 + y^3 = 2891$. Avem $2891 = 7^2 \cdot 59$.

Nu se poate ca $x \equiv y \equiv 0 \pmod 7$, deoarece în acest caz membrul stîng al ecuației ar fi multiplu de 7^3. Nu se poate ca unul din numerele x, y să fie multiplu de 7 și celălalt nu, deoarece membrul stîng al ecuației nu ar fi multiplu de 7. Deci nici x nici y nu sînt multipli de 7.

Conform micii teoreme Fermat $z^6 \equiv 1 \pmod 7$ pentru $z \not\equiv 0 \pmod 7$, deci $(z^3 + 1)(z^3 - 1) \equiv 0 \pmod 7$, adică $z^3 \equiv \pm 1 \pmod 7$ pentru un astfel de z. Rezultă că $x^3 + y^3 \equiv \pm 2$ sau $0 \pmod 7$. Ultimul caz ar implica, pe baza ecuației, $-3xy^3$ multiplu de 7, deci x sau y multiplu de 7, situație exclusă. Rezultă că sau $x^3 \equiv y^3 \equiv 1 \pmod 7$ sau $x^3 \equiv y^3 \equiv -1 \pmod 7$. Al doilea caz se reduce la primul prin transformarea $(x, y) \to (-y, x - y)$, conform cu a).

Fie deci $x^3 \equiv y^3 \equiv 1 \pmod 7$. Rezultă din ecuație $3xy^2 \equiv 2 \pmod 7$. Însă acestea conduc la contradicție. Pe de o parte $(3xy^2)^3 \equiv 2^3 \equiv 1 \pmod 7$ și pe de alta $(3xy^2)^3 = 27x^3(y^3)^2 \equiv -1 \pmod 7$.

Soluția problemei C5-SU (vezi 12.2). Să procedăm la început la fel ca în primul pas al soluției problemei B3-GB (vezi 12.2, 12.4), anume să fixăm punctele A, C, C_1, deci și perpendiculara d din A pe CC_1, să luăm un punct variabil B pe perpendiculara c în C pe AC, să considerăm intersecția M dintre C_1B și d, apoi intersecția B_1 a lui CM cu perpendiculara c_1 în C_1 pe AC_1 și să demonstrăm că

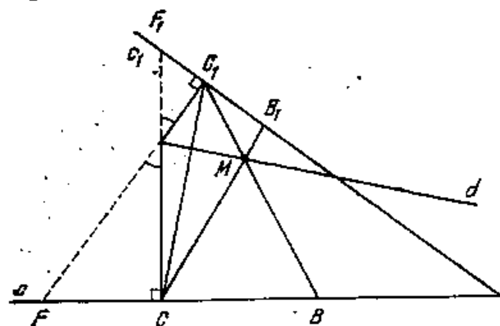


Fig. 197

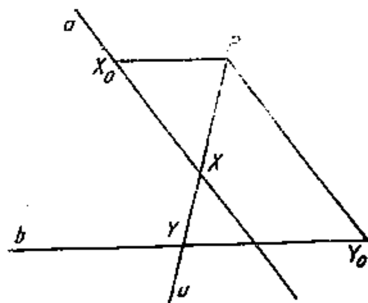


Fig. 198

C_1B_1/CB este constant; în final vom arăta că această constantă este AC_1/AC (vezi fig. 197).

Să considerăm în general două drepte fixe a și b și un punct fix P în planul lor, o dreaptă variabilă u ce trece prin P și punctele X, Y de intersecție ale lui u cu a, respectiv b (fig. 198). Pentru a găsi o relație între X și Y exprimată prin numere să alegem X_0 pe a și Y_0 pe b astfel ca $PX_0 \| b$ și $PY_0 \| a$. Triunghiurile PXX_0 și YPY_0

sînt asemenea, deci $YY_0/PX_0 = PY_0/XX_0$, adică $XX_0 \cdot YY_0 = PX_0 \cdot PY_0 = \text{const}$.

Pentru a aplica această concluzie la situația din fig. 197 să considerăm întîi intersecția N a paralelei din C_1 la d cu c și intersecția N_1 a paralelei din C la d cu c_1 (puncte ce nu sînt reprezentate în fig. 197). Vor trebui considerate și intersecțiile cu d a paralelei din C la c_1 și a paralelei din C_1 la c. Dar aceste două drepte sînt înălțimile din C, respectiv C_1 ale triunghiului ACC_1, deci acestea se vor întîlni într-un punct D de pe înălțimea din A a aceluiași triunghi, adică de pe d. Cu alte cuvinte, cele două puncte de intersecție cu d ce trebuie considerate coincid, anume cu D (punct de asemenea nereprezentat pe fig. 197).

Coincidența celor două puncte de intersecție cu D este unul din elementele esențiale legate de fig. 197. Într-adevăr, concluzia din fig. 198 permite a scrie $DM \cdot BN = \text{const}$ și $DM \cdot B_1N_1 = \text{const}$, cu același D, deci ele se pot împărți, conducînd la $B_1N_1/BN = k$, cu $k = \text{const}$.

Utilizînd din nou fig. 198, am putea determina k, dar este preferabil a proceda astfel. Pentru $B = C$ avem $B_1 = C_1$, deci $B_1N_1 = k \cdot BN$ implică $C_1N_1 = k \cdot CN$ și, prin scădere, $B_1C_1 = k \cdot BC$, prima parte a programului fiind cu aceasta realizată.

A doua parte se aduce la îndeplinire alegînd $M = A$, deci $B = F$, $B_1 = F_1$ (vezi fig. 197), $k = C_1F_1/CF$ și, din asemănarea triunghiurilor ACF și AC_1F_1, rezultă $C_1F_1/CF = AC_1/AC$, ceea ce se urmărea.

Raționamentele precedente rezolvă problema numai în cazul în care A, C, C_1 sînt necoliniare, ceea ce atrage după sine faptul că d nu este paralelă nici cu c, nici cu c_1. Cazul A, C, C_1 coliniare este însă mult mai simplu. În fig. 199 avem $MC_1/MB = C_1B_1/CB = AC_1/AC$, deci $AM \| BC \perp CC_1$.

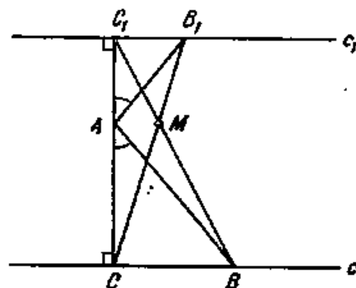


Fig. 199

Observație. Problema se rezolva mult mai rapid prin cunoștințe de geometrie proiectivă. Fixînd A, C, C_1 și lăsînd B, B_1 variabile pe c, c_1, cu condiția $C_1B_1/CB = AC_1/AC$, corespondența dintre B și B_1 este proiectivă, la fel rezultă și cea dintre dreptele C_1B și CB_1. Cînd $B = C$, deci $B_1 = C_1$, cele două drepte coincid; rezultă că locul geometric al intersecției lor M este o dreaptă. Pentru $B = F$ rezultă, ca în soluția precedentă, $B_1 = F_1$ și deci acea dreaptă trece prin A. Pentru B și B_1 „la infinit", pe c, respectiv c_1, tot un raționament din soluția precedentă arată că $M = D$ etc.

Soluția problemei C6-FR (vezi 12.2). Avem $MP_1 = MP_2 = MP_3 = MO$, deci proiecțiile M_1, M_2, M_3 ale lui M pe d_1, d_2, d_3 sînt mijloacele segmentelor OP_1, OP_2, OP_3. Proiecția lui G, de exemplu

pe d_1, este un punct G_1 pentru care (vezi fig. 200) $OG_1/OP_1 = T_1G/T_1P_1 = 1/3$, T_1 fiind mijlocul lui P_2P_3. Deci $OG_1 = OP_1/3 = (2/3)OM_1$. Acelaşi lucru rezultă şi despre proiecţiile G_2, G_3 ale lui G pe d_2, d_3 etc.

Punctele M_1, M_2, M_3 sînt trei puncte pe d_1, d_2, d_3 supuse unei singure condiţii, anume $OM_1^2+OM_2^2+OM_3^2=OM^2=R^2$, ca urmare a

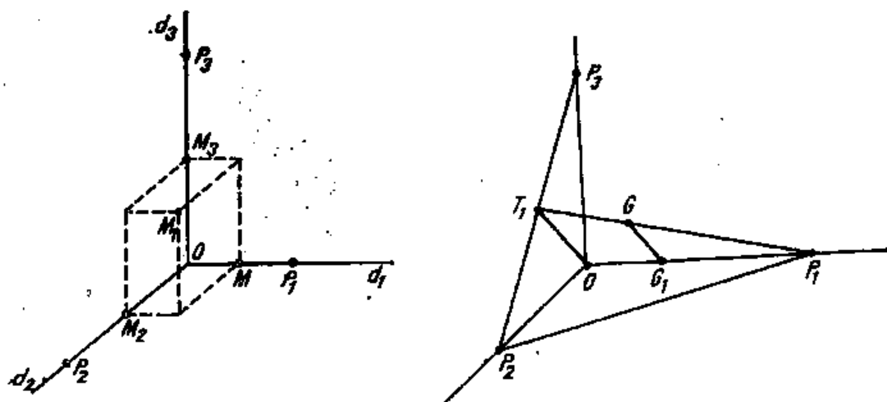


Fig. 200

faptului că OM este diagonala unui paralelipiped dreptunghic de muchii OM_1, OM_2, OM_3. Deci despre G_1, G_2, G_3 se poate spune acelaşi lucru, însă cu $OG_1^2 + OG_2^2 + OG_3^2 = \left(\frac{2}{3}R\right)^2$ şi, în consecinţă, locul geometric cerut este sfera de centru O şi rază $(2/3)R$.

Soluţia problemei C7-CS (vezi 12.2). Dacă $0 < m \leqslant n$, să scriem $(m+n)/\sqrt{m^2+n^2}$ sub forma $(1+r)/\sqrt{1+r^2}$, cu $r = m/n$; deci r va parcurge mulţimea numerelor raţionale din $(0, 1]$. Cum această mulţime de numere raţionale are proprietatea din enunţ [pentru $u < v$ raţionali $w = (u+v)/2$ este raţional şi $u < w < v$], va fi suficient să arătăm că funcţia $f(x) = (1+x)/\sqrt{1+x^2}$ este strict crescătoare pe $[0, 1]$. Aceasta se poate face şi cu ajutorul derivatelor, dar apare mai simplu, cum $f(x) \geqslant 0$, să dovedim acelaşi lucru despre $(f(x))^2 = (1+x)^2/(1+x^2) = 1 + 2x/(1+x^2)$, direct, considerînd $0 \leqslant x < y \leqslant 1$ şi scriind $\frac{y}{1+y^2} - \frac{x}{1+x^2} = (y + x^2y - x - xy^2)(1 + x^2)^{-1}(1+y^2)^{-1} = (y-x)(1-xy)(1+x^2)^{-1}(1+y^2)^{-1}$, expresie care este evident pozitivă.

Soluţia problemei C8-TN (vezi 12.2). Dacă se observă că MN şi QP se obţin rotind diagonala AC cu 60° în jurul lui B, respectiv D, în acelaşi sens, se ajunge la concluzia că $MN = QP$, $MN \| QP$,

deci că sau $MNPQ$ este un paralelogram, sau punctele M, N, P, Q sînt coliniare.

Există însă un mod de a greşi, observînd pe calea precedentă numai că $MN = PQ$ şi apoi, cum MQ şi NP se obţin din BD prin rotaţii de 60° în jurul lui A, respectiv C, observînd că $MQ = NP$. S-ar trage concluzia că $MNPQ$ ar putea apărea şi ca un trapez isoscel (fig. 202).

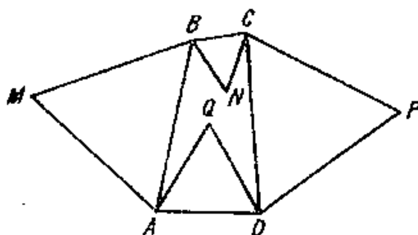


Fig. 201

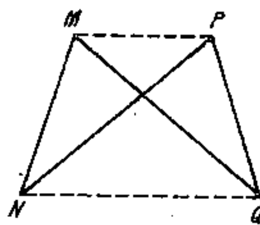


Fig. 202

12.6. Alegerea problemelor de concurs, rezultate, premii

După cum se poate vedea, puţine din problemele propuse juriului pot fi calificate drept uşoare. În plus, cele 20 de probleme apar potrivite Olimpiadei şi prin numărul de raţionamente indivizibile, de silogisme, ce-l reclamă rezolvarea fiecăreia, fapt ce permite departajarea concurenţilor. Stîngăcii în exprimare nu prea apar la Olimpiada Internaţională şi sînt şi greu de depistat la coordonare, aşa încît o problemă bazată pe o singură observaţie ingenioasă ar conduce la acordarea numai a punctajelor 0 sau total. Aşa s-ar explica şi succesul problemei CU3 la Olimpiada a 20-a (vezi 9.2, enunţul în 8.4 şi soluţia în 8.9).

Conducerea juriului a prezentat, la începutul lucrărilor, situaţia descrisă în 12.1, adică faptul că nivelul mediu al concurenţilor crescuse în comparaţie cu celelalte Olimpiade ca urmare a scăderii la 1/2 a numărului de concurenţi prezentat de fiecare delegaţie (aceştia fiind triaţi deci mai sever) şi că aceasta necesita, pentru a acorda premiile în condiţii normale, sporirea gradului de dificultate al concursului. În plus, s-a decis să nu se pună la vot probleme izolate, ci liste de concurs de cîte şase probleme.

Juriul s-a orientat către lista A1-A6 ca propunere de bază. Lista B1-B6 conţinea probleme ce depăşeau programa (B2 şi B6) şi una mai mult de perspicacitate (B4). Trebuie spus însă că problema B6 a fost „regretată", dar toate eforturile de a-i găsi o soluţie rezonabilă fără inversiune au eşuat (vezi enunţurile acestor probleme în 12.2 şi soluţiile lor în 12.4).

Nici o propunere de înlocuire a unor probleme cu altele nu s-a pus la vot pînă cînd nu s-a discutat efectul ei asupra întregii liste, atrăgîndu-se de fiecare dată atenția cînd acest efect era facilitarea nejustificată a concursului. Nici măcar propunerea care cerea introducerea în listă a singurei probleme de geometrie în spațiu (C6-FR, vezi 12.2) nu s-a bucurat de atenție, delegații fiind de acord că va fi mai bine fără geometrie în spațiu decît să se renunțe la o problemă frumoasă în favoarea uneia cam simple.

Juriul a aderat la inițiativa conducerii sale. În afară de A1-A6, s-au mai pus la vot încă patru liste de probleme de concurs, anume (A1, C4, A3, B1, A5, A6), (A1, C1, A3, C4, A5, A6), (C4, A2, A3, A4, A5, A6) și (C4, C1, A3, A4, A5, A6). Deci trei probleme din lista de bază A1-A6, anume A3, A5 și A6 s-au bucurat de unanimitate încă de la nivelul propunerilor și numai trei din celelalte, anume B1, C1 și C4, au apărut printre cele propuse, la vot. S-a votat, ca listă definitivă, A1-GB, C1-NL, A3-SU, C4-GB, A5-NL, A6-VN, deci s-au înlocuit în propunerea de bază A2-YU cu C1-NL și A4-BG cu C4-GB, fiecare din cele două noi introduse apărînd mai dificilă decît cea pe care a înlocuit-o ; în orice caz problema C4-GB este mai puțin obișnuită decît A4-BG (vezi enunțurile în 12.2 și soluțiile în 12.3, 12.5). A se reaminti și discuția din 3.9 asupra problemei SE4 de la Olimpiada a 15-a (enunț în 3.1, soluție în 3.4 etc.).

S-a trecut deci nu numai peste ideea de a da probleme din toate domeniile, inclusiv geometria în spațiu, ci și peste recomandarea de a evita ca două din problemele de concurs să fie propuse de aceeași delegație, repetîndu-se situația de la Olimpiada a 17-a (vezi 5.12), de data aceasta GB și NL avînd cîte două probleme între cele șase, toate acestea pentru a asigura un conținut cît mai adecvat listei de probleme propuse spre rezolvare concurenților.

S-a decis, la fel ca la Olimpiada precedentă, ca pentru fiecare problemă să se acorde un punctaj maxim de 7 puncte, deci un participant să poată realiza pînă la 42 puncte.

Cele șase probleme de concurs au fost deci următoarele : *1* (A1-GB), *2* (C1-NL), *3* (A3-SU) ; *4* (C4-GB), *5* (A5-NL), *6* (A6-VN). Enunțurile lor se află în 12.2, soluțiile — în 12.3, 12.5.

Iată și primul tabel de rezultate care, în condițiile în care toate problemele sînt egal cotat, apare simplificat (fig. 203, 119 concurenți) :

a Problemă	*1*(A1-GB)	*2*(C1-NL)	*3*(A3-SU)	*4*(C4-GB)	*5*(A5-NL)	*6*(A6-VN)
b Punctaj	7	7	7	7	7	7
c Punctaj total obținut de concurenți	549	154	362	450	655	304
c/b	78	22	51	64	93	43

Fig. 203

Deci problema de geometrie plană *5* (A5-NL) a fost cea mai simplă, iar cealaltă problemă de geometrie plană, *2* (C1-NL), de departe cea mai grea, dar nu atît de grea pe cît s-au dovedit problema *6* de la Olimpiada a 20-a (vezi 9.4), unde, cu 132 concurenți, la *c/b* apăruse 20, și problema *5* de la Olimpiada a 18-a (vezi 6.5), unde, cu 139 concurenți, la *c/b* apăruse 21,7.

Ne putem dispensa de liniile *b* și *c/b*.

Așteptat cu o anumită încordare, cel de-al doilea tabel de rezultate (vezi 6.6) a arătat ca în fig. 204.

42/3 (3)	41/–	40/2 (5)	39/–	38/2 (7)	37/3 (10)	36/1 (11)	35/4 (15)	34/3 (18)	33/2 (20)	32/3 (23)
31/2 (25)	30/5 (30)	29/6 (36)	28/3 (39)	27/3 (42)	26/4 (46)	25/1 (47)	24/1 (48)	23/6 (54)	22/4 (58)	21/3 (61)
20/3 (64)	19/4 (68)	18/4 (72)	17/5 (77)	16/2	15/1	14/4	13/4	12/2	11/5	10/5
9/2	8/1	7/3	6/–	5/–	4/1	3/3	2/3	1/5	0/1	

Fig. 204

Aspect normal. Conducerea juriului a avut deci dreptate, atît în ideile sale, cît și în modul în care le-a pus în aplicare și juriul s-a orientat către probleme pe măsura nivelului concurenților. Premiile s-au putut atribui respectînd întocmai prevederile regulamentului (6.6, 7.6) precum și principiile din 3.11. Coloanele barieră ar fi urmat să aproximeze numerele (119 concurenți) 9—10, 29—30, 59—60; acestea au fost, în urma votului, 10, 30 și 61, acordîndu-se deci 10 premii 1 pentru punctaje între 37—42, 20 premii 2 pentru punctaje între 30—36 și 31 premii 3 pentru punctaje între 21—29. Ca și la Olimpiada a 22-a, nu a fost acordat nici un premiu special.

* * *

Din descrierea desfășurării Olimpiadelor 15—23 se poate urmări cum fiecare țară organizatoare și-a adus o contribuție importantă în evoluția modului de organizare a acestei manifestări, la toate nivelurile, de la principii generale privind partea matematică la detalii de procedură. Numărul de delegații participante aproape s-a dublat în acești 10 ani, iar interesul acordat Olimpiadei de fiecare din aceste delegații a crescut.

BIBLIOGRAFIE

Ašić, M., Božić, M., Čukić, Lj., Janković, V., Kadelburg, Z., Mićić, V., Milin, L., Vukmirović, J., Vukomanović, Dj. *Medunarodne Matematičke Olimpijade* Beograd, Izdanja Društva MFA SR Srbije, 1977.

Coxeter, H. S. M. *Introduction to geometry* New York, London, John Wiley & Sons, Inc, 1961.

Greitzer, Samuel. *International Methematical Olympiads* 1959—1977 Washington. D.C., The Mathematical association of America, 1978.

Modenov, P. S. *Sbornik zadaci po matematike.* Moscova, Sovetskaia Nauka, 1953.

Morozova, E. A., Petrakov, I. S. *Mejdunarodnie matematiceskie olimpiadi*, Moscova, Prosveşcenie, 1971.

Morozova, E. A, Petrakov, I. S., Skvorţov, V. A. *Mejdunarodnie matematiceskie olimpiadi*, Moscova, Prosveşcenie, 1976.

Morozova, E. A., Petrakov, I. S., Skvortov, V. A. Olimpiadele Internaţionale de Matematică. Bucureşti, Editura Tehnică, 1978.

* * * *Poliskie Matematiceskie Olimpiadi*, Moscova, Mir, 1978.

* * * *Vengerskie Matematiceskie Olimpiadi*, Moscova, Mir, 1976.

* * * *Zbirnik zadaci respublikanskih matematiceskih olimpiad*, Kiiv, Vişcea şkola, 1979.

CUPRINS

Redactor: Valentina Crețu
Tehnoredactor: Elena Geru
Coperta de: arh. Mariana Zielinski

Bun de tipar: 25.VII.1984. Coli de tipar 22.
C. Z. 51(079.1)


I. P. I. c. 647
str. Brezoianu 23–25
București

Aproximativ trei sferturi din lucrare reprezintă probleme, cu soluții în detaliu, de la Olimpiadele Internaționale de Matematică ale elevilor din anii 1973–1982. Restul conține descrierea modului de desfășurare a acestor Olimpiade, cu accent în special pe aspectele matematice în legătură cu alegerea problemelor de concurs, cu stabilirea rezultatelor și atribuirea premiilor, prezentate de regulă pe exemple concrete.

Cartea este adresată în primul rînd elevilor ce doresc să se pregătească pentru Olimpiadele de Matematică, să-și perfecționeze măiestria în rezolvarea problemelor dificile de matematică. În aceeași măsură poate fi folosită de profesori din școli și licee, în activitatea de pregătire a elevilor buni, de organizare a unor concursuri de matematică. De asemenea, este utilă matematicienilor și altor specialiști interesați în a contribui la dezvoltarea problemisticii matematice, cititorilor Gazetei Matematice etc., oricărei persoane care dorește să contribuie la descoperirea de tinere talente matematice sau să utilizeze matematica în a-și antrena inteligența; rezolvarea problemelor de la Olimpiadele Internaționale de Matematică se bazează în mai mare măsură pe iscusință decît pe cunoștințe speciale.

Editura Tehnică

Lei 21